Séminaire de topologie et géométrie différentielle

JEAN BENABOU

Treillis locaux et paratopologies

Séminaire de topologie et géométrie différentielle, tome 1 (1957-1958), exp. nº 2, p. 1-27
<http://www.numdam.org/item?id=SE_1957-1958__1__A2_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-
Séminaire de TOPOLOGIE
et de GÉOMETRIE DIFFÉRENTIELLE
(C. EHRESMANN)
Année 1957/1958
-:-:-:-

20 et 27 novembre 1957
et 11 décembre 1957

TREILLIS LOCAUX ET PARATOPOLOGIES

par Jean BENABOU

Section I.

Notions élémentaires sur les paratopologies

1. Introduction.

Dans un ensemble E , on définit une topologie par la donnée d'un sous-ensemble du treillis $\mathcal{P}(E)$ des parties de E , stable pour les réunions quelconques et les intersections finies. Ce sous-ensemble Ω est lui-même un treillis complet pour l'ordre induit par l'inclusion, dans lequel l'union coïncide avec la réunion des parties, mais l'intersection est donnée par :

$$\bigwedge_{\alpha\in A} O_\alpha = \bigcup\{O : O\in\Omega ,\quad O\subset O_\alpha \text{ pour tout } \alpha\in A\}$$

qui n'est autre que l'intérieur de l'intersection prise dans $\mathcal{P}(E)$. (Nous réserverons dans la suite les signes $\cup$ et $\cap$ aux opérations ensemblistes. Si plusieurs ensembles ordonnés interviennent simultanément et s'il y a possibilité de confusion on notera $\overset{T}{\bigvee} x_\alpha$ (resp. $\overset{T}{\bigwedge} x_\alpha$) l'union (resp. l'intersection) au sens de l'ordre de T , des x_α).

Les propriétés essentielles de l'espace topologique (E , Ω) dépendent uniquement de la structure algébrique du treillis Ω , lequel détermine d'ailleurs E à un homéomorphisme près dès que E est un espace T_1 .

C'est pourquoi on peut se proposer d'étudier les treillis qui sans être isomorphes aux treillis des ouverts des espaces topologiques en possédent les caractères essentiels.

Notons que dans Ω , l'intersection finie coïncide avec l'intersection dans $\mathcal{P}(E)$ ce qui entraîne pour tout $O\in\Omega$ et toute famille $\{O_\alpha\}$ d'éléments de Ω :

$$0 \wedge (\bigvee_\alpha 0_\alpha) = \bigvee_\alpha (0 \wedge 0_\alpha) \quad .$$

On trouvera des raisons plus profondes d'étudier de tels treillis dans la théorie des structures locales de Mr EHRESMANN.

2. Propriétés algébriques élémentaires des treillis locaux.

Les définitions et résultats de ce paragraphe se trouvent pour l'essentiel dans BIRKHOFF [1], chapitre 9.

(2.1) DÉFINITION. - Un treillis local est un treillis complet L, tel que pour tout élément $x \in L$ et toute famille $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ d'éléments de L, on ait :

$$x \wedge (\bigvee_\alpha x_\alpha) = \bigvee_\alpha (x \wedge x_\alpha) \quad .$$

Nous noterons 0 et e l'élément minimum et l'élément maximum de L.

(Dans BIRKHOFF un tel treillis est appelé distributif complet et pseudo-complémenté).

(2.2) DÉFINITION. - Un élément : a dans un treillis est simplifiable si pour tout couple x, y d'éléments de L :

$$\{a \wedge x = a \wedge y \ \text{ et } \ a \vee x = a \vee y\} \Rightarrow x = y \quad .$$

(2.3) PROPOSITION. - Un treillis est distributif si et seulement si tout élément est simplifiable.

(2.4) DÉFINITION. - Un élément a' est complémentaire de a si :

$$a \wedge a' = 0 \ \text{ et } \ a \vee a' = e \quad .$$

La proposition (2.3) entraîne l'unicité du complémentaire (quand il existe) dans tout treillis distributif.

Notons que si a' existe et si le treillis est distributif,

$$x \wedge a = 0 \ \text{ est équivalent à } \ x \leq a' \quad .$$

Ce qui justifie la définition suivante :

(2.5) DÉFINITION. - Un élément a^* est un complément de a si

$$x \wedge a = 0 \text{ est équivalent à } x \leq a^* .$$

(a^* est appelé pseudo-complément par BIRKHOFF, complément multiplicatif par d'autres auteurs).

a^* est la borne supérieure des éléments disjoints de a, donc est unique quand il existe. Si a admet un complémentaire a', alors a^* existe et $a' = a^*$.

(2.6) PROPOSITION. - Dans un treillis local tout élément admet un complément.

Soit en effet $a^* = \bigvee_{(x \wedge a = 0)} x$, alors $a \wedge a^* = a \wedge (\bigvee_{x \wedge a = 0} x) = \bigvee_{x \wedge a = 0} (a \wedge x) = 0$ et a^* est bien le complément de a.

(2.7) PROPOSITION. - L'application $\{*\} : x \rightarrow x^*$ vérifie

i. $a \leq b \Longrightarrow a^* \geq b^*$

ii. $a^{**} \geq a$.

iii. $a^{***} = a^*$

iv. $a^* \vee b^* \leq (a \wedge b)^*$

v. $(\bigvee_\alpha x_\alpha)^* = \bigwedge_\alpha x_\alpha^*$.

On voit d'après (v) que l'image L^* de L par $\{*\}$ est un treillis complet et d'après (iv) et (i) que la restriction de $\{*\}$ à L^* est un anti-isomorphisme ; de façon précise on a le théorème suivant dû à GLIVENKO, dont la démonstration figure dans [1].

(2.8) THÉORÈME. - L'application $\varphi : L \rightarrow L^* : \varphi(x) = x^{**}$ vérifie

i. $\varphi(\overset{L}{\bigvee_\alpha} a_\alpha) = \overset{L^*}{\bigvee_\alpha} \varphi(a_\alpha)$

ii. $(a \overset{L}{\wedge} b) = \varphi(a) \overset{L^*}{\wedge} \varphi(b)$

en outre L^* est une algèbre de Boole complète, l'intersection dans L^* coïncide avec l'intersection dans L et l'union dans L^* est donnée par :

$$\overset{L^*}{\bigvee_\alpha} x_\alpha = (\overset{L}{\bigwedge_\alpha} x_\alpha^*)^* .$$

Notons que φ n'est pas bi-univoque, un élément $a \neq e$ peut avoir pour image e. On dit alors qu'il est dense. En outre les éléments denses déterminent φ ; de façon précise $a^{**} = b^{**}$ si et seulement s'il existe un élément dense d, tel que $d \wedge a = d \wedge b$.

3. Paratopologie. Ouverts. Fermés. Voisinages.

(3.1) DÉFINITION. - Une paratopologie dans un treillis local L est définie par un sous-ensemble Ω de L vérifiant :

(O_1) toute union d'éléments de Ω appartient à Ω.

(O_2) toute intersection finie d'éléments de Ω appartient à Ω, les éléments de Ω sont appelés ouverts.

En appliquant (O_1) (resp. (O_2)) à la partie vide on en déduit

$$0 \in \Omega \quad (\text{resp. } e \in \Omega)$$

En prenant $\Omega = L$ et $\Omega = \{0, e\}$ on définit dans L la paratopologie discrète et la paratopologie solide.

(3.2) Dans une paratopologie (L, Ω) on appelle fermé tout élément $f \in L$ qui est le complément d'un ouvert.

L'ensemble Φ des fermés est donc l'image de Ω par l'application $x \to x^*$. La proposition (2.7) entraîne : 0 et e sont fermés, toute intersection de fermés est un fermé, mais en général une union même finie de fermés n'est pas un fermé, en outre le complément d'un fermé est de la forme ω^{**} où ω est un ouvert, donc n'est pas en général un ouvert.

(3.3) DÉFINITION. - Un voisinage d'un élément x de L est un élément v qui contient un ouvert contenant x.

Soit $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x. $\mathcal{V}(x)$ vérifie :

(V_1) si $v \in \mathcal{V}(x)$; $v \geqslant x$.

(V_2) si v_1 et $v_2 \in \mathcal{V}(x)$; $v_1 \wedge v_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(V_3) si $v \in \mathcal{V}(x)$ et $w \geqslant v$; $w \in \mathcal{V}(x)$.

(V_4) si $v \in \mathcal{V}(x)$, il existe $y \in \mathcal{V}(x)$ et $v \in \mathcal{V}(y)$.

(V_5) si $x = \bigvee_\alpha x_\alpha$; $\mathcal{V}(x) = \bigcap_\alpha v(x_\alpha)$.

(V_6) 0 est un voisinage de 0.

toutes ces propriétés sont des conséquences immédiates des axiomes (O_1) et (O_2) et de la définition (3.3). (Dans un espace topologique les axiomes des voisinages sont donnés pour les points de l'espace) on obtient alors (V_1), (V_2), (V_3), (V_4) et on définit ensuite pour un sous-ensemble A quelconque de E le filtre $\mathcal{V}(A)$ des voisinages, d'où la nécessité d'introduire les deux axiomes supplémentaires (V_5) et (V_6) qui ne sont pas conséquence des autres).

(3.4) PROPOSITION. - Soit $\mathcal{V}$ une application d'un treillis local L dans l'ensemble $\mathcal{P}(L)$ de ses parties, telle que les $\mathcal{V}(x)$ vérifient $(V_1) \dots (V_6)$; il existe une paratopologie unique dans L telle que les $\mathcal{V}(x)$ soient les voisinages de x relativement à cette paratopologie.

En effet si une telle paratopologie existe, l'ensemble Ω des ouverts, est l'ensemble des éléments ω de L tels que : $\omega \in \mathcal{V}(\omega)$. On vérifie facilement que Ω ainsi défini satisfait à (O_1) et (O_2) et que les voisinages de x pour la paratopologie définie par Ω sont justement les éléments de $\mathcal{V}(x)$.

(3.5) DEFINITION. - Un élément x est intérieur à un élément a de L si a est un voisinage de x.

(V_5) implique que toute union d'éléments intérieurs à a est intérieure à a, donc les éléments intérieurs ont une borne supérieure notée $\mathring{a}$ qui est appelée intérieur de a.

On voit facilement que $\mathring{a}$ est toujours ouvert, et que c'est le plus grand ouvert contenu dans a.

(V_2) entraîne : si y est intérieur à a et b, il est intérieur à $a \wedge b$; donc $\mathring{a} \wedge \mathring{b} \leq \overset{\circ}{\widehat{a \wedge b}}$, d'autre part si $x \leq y$, $\mathring{x} \leq \mathring{y}$ donc $\overset{\circ}{\widehat{a \wedge b}} \leq \mathring{a}$ et à $\mathring{b}$, d'où

$$\mathring{a} \wedge \mathring{b} = \overset{\circ}{\widehat{a \wedge b}}$$

(3.6) DEFINITION. - Un élément x est adhérent à un élément a de L si pour tout ouvert ω, $\omega \wedge x \neq 0$ entraîne $\omega \wedge a \neq 0$. Notons que 0 est adhérent à tout élément, et que si $x \neq 0$ est adhérent à a, tout voisinage de x rencontre a.

Toute union d'éléments x_α adhérents à a est adhérente à a car : $\omega \wedge (\bigvee_\alpha x_\alpha) \neq 0 \Longleftrightarrow \exists\, x_\alpha$ tel que $\omega \wedge x_\alpha \neq 0$ mais alors $\omega \wedge a \neq 0$. Il existe donc une borne supérieure notée $\bar{a}$ des éléments adhérents à a, on l'appelle adhérence de a .

(3.7) PROPOSITION. - Un élément a est fermé si et seulement si il est égal à son adhérence.

Soit en effet a fermé, il existe un ouvert ω tel que $a = \omega^*$; alors $\omega \wedge a = 0$ donc $\omega \wedge \bar{a} = 0$ donc $\bar{a} \leq \omega^* = a$. D'autre part il est immédiat que pour tout $x \in L$, $x \leq \bar{x}$ donc $\bar{a} = \omega^* = a$. Inversement si $a = \bar{a}$, soit $\varpi = \mathring{a}^*$ et $\tilde{a} = \varpi^*$. Soit ω un ouvert quelconque, $\omega \wedge a = 0 \Longleftrightarrow \omega \leq \mathring{a}^* = \varpi$ donc $\omega \wedge \tilde{a} = 0$. L'autre implication étant immédiateon a $\tilde{a} = \bar{a}$. Notons que l'application $a \rightarrow \bar{a}$ vérifie : $\bar{\bar{a}} = \bar{a}$; $\bar{a} \geqslant a$, mais pas $\overline{a \vee b} = \bar{a} \vee \bar{b}$. on a seulement $\overline{a \vee b} \geqslant \bar{a} \vee \bar{b}$.

(3.8) DÉFINITION. - Un élément a est dense par rapport à b si $b \leq \bar{a}$, il est partout dense si $\bar{a} = e$.

Si a est dense par rapport à b et b dense par rapport à c , a est dense par rapport à c . En effet $\bar{a} \geqslant b \rightarrow \bar{\bar{a}} = \bar{a} \geqslant \bar{b} \geqslant c$.

(Un élément peut être partout dense pour la paratopologie discrète, sans que ce soit l'élément maximum).

4. <u>Comparaison des paratopologies. Bases d'uns paratopologie.</u>

(4.1) DÉFINITION. - Si Ω_1 et Ω_2 sont deux paratopologies dans L ,on dit que Ω_1 est plus fine que Ω_2 , si $\Omega_1 \supset \Omega_2$.

On définit ainsi un ordre sur l'ensemble $\mathcal{G}$ des paratopologies ayant pour élément maximum la paratopologie discrète et pour élément minimum la paratopologie solide.

(4.2) PROPOSITION. - Pour deux paratopologies Ω_1 et Ω_2 dans L , les propositions suivantes sont équivalentes.

i. Ω_1 est plus fine que Ω_2

ii. pour tout $x \in L$, tout voisinage de x pour Ω_2 est un voisinage pour Ω_1

iii. pour tout $x \in L$, $\mathring{x}_{(\Omega_1)} \geqslant \mathring{x}_{(\Omega_2)}$

(i) $\Rightarrow$ (ii) en effet si v est un voisinage de x pour Ω_2 , il existe $\omega_2 \in \Omega_2$ tel que $x \leq \omega_2 \leq v$ mais $\Omega_1 \supset \Omega_2$ donc $\omega_2 \in \Omega_1$ et v est voisinage pour Ω_1.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) x est voisinage de $\overset{\circ}{x}_{(\Omega_2)}$ pour Ω_2 donc aussi pour Ω_1 donc $\overset{\circ}{x}_{(\Omega_2)}$ est intérieur à x pour Ω_1 et $\overset{\circ}{x}_{(\Omega_2)} \leq \overset{\circ}{x}_{(\Omega_1)}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) soit $\omega_2 \in \Omega_2$, $\overset{\circ}{\omega}_{2(\Omega_2)} = \omega_2 \Rightarrow \overset{\circ}{\omega}_{2(\Omega_1)} \geq \omega_2$, l'inégalité opposée est triviale donc $\omega_2 \in \Omega_1$.

Notons enfin que si $\Omega_1 \supset \Omega_2$, pour tout $x \in L$, $\bar{x}_{(\Omega_1)} \leq \bar{x}_{(\Omega_2)}$ la réciproque étant en général inexacte.

Si $\{\Omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ est une famille de paratopologies dans L, $\Omega = \bigcap_\alpha \Omega_\alpha$ est la borne inférieure dans $\mathcal{T}$ des paratopologies Ω_α. $\mathcal{T}$ est donc un treillis complet.

Soit M un sous-ensemble quelconque de L. Il existe une borne inférieure pour toutes les paratopologies Ω contenant M, définie par $\Omega(M) = \bigcap \{\Omega : \Omega \in T, \ \Omega \supset M\}$. On l'appelle paratopologie engendrée par M. On peut aussi construire $\Omega(M)$ de la façon suivante : si M_1 est l'ensemble des intersections finies d'éléments de M, $\Omega(M)$ est l'ensemble des unions quelconques d'éléments de M_1 (la vérification est immédiate, mais suppose de façon essentielle la distributivité de la définition (2.1)).

(4.3) DEFINITION. - Soit (L, Ω) un treillis paratopologique, un sous-ensemble B de Ω est une base de Ω sit tout ouvert est une union d'éléments de B.

B satisfait alors à :

(B_1) $e = \bigvee_{b \in B} b$ et

(B_2) si ω_1 et $\omega_2 \in B$ il existe $B' \subset B$ tel que $\omega_1 \wedge \omega_2 = \bigvee_{b \in B'} b'$.

Inversement si un sous-ensemble de L vérifie (B_1) et (B_2) on voit aisément que c'est une base de la paratopologie qu'il engendre.

5. Structure paratopologique induite.

(5.1) DEFINITION. - Soit a un élément d'un treillis local L, le treillis local induit par L sur a est l'ensemble $L(a) = \{x : x \leq a\}$ muni de l'ordre induit.

On vérifie immédiatemment que $L(a)$ est un treillis local.

(5.2) DÉFINITION. - Soient (L , Ω) un treillis paratopologique, a un élément de L. On appelle paratopologie induite sur a, la paratopologie définie dans $L(a)$ par la famille $\Omega(a) = \{\omega \wedge a : \omega \in \Omega\}$; les éléments de $\Omega(a)$ sont dits "ouverts dans a".

La vérification des axiomes (0_1) et (0_2) pour $\Omega(a)$ dépend essentiellement de la distributivité de la définition (2.1). Si $b \leq a$ les paratopologies induites sur b par (L , Ω) et $(L(a) , \Omega(a))$ sont identiques.

Une condition nécessaire et suffisante pour que tout ouvert dans a soit un ouvert dans e est que a soit ouvert dans e.

(5.3) PROPOSITION. - Les éléments fermés dans a sont les traces sur a des éléments fermés dans e.

Soit f un élément fermé, $f \wedge a$ sa trace sur a. Soient $x \leq a$ un élément adhérent à $f \wedge a$ dans a et ω un ouvert quelconque tel que $\omega \wedge x \neq 0$; $\omega \wedge x = (\omega \wedge a) \wedge x \neq 0$ et x adhérent à $f \wedge a$ entraînent $(\omega \wedge a) \wedge (f \wedge a) \neq 0$ donc $\omega \wedge f \neq 0$ et x est adhérent à f dans e ; donc $x \leq f \wedge a$ lequel est bien fermé dans a. Inversement si φ est fermé dans a, soit $\bar{\varphi}$ sa fermeture dans e ; on a $\varphi \leq \bar{\varphi} \wedge a$, mais tout ouvert dans a coupant $\bar{\varphi} \wedge a$ coupe φ donc la fermeture de φ dans a contient $\bar{\varphi} \wedge a$. φ étant fermé dans a, on a bien $\varphi = \bar{\varphi} \wedge a$.

(5.4) PROPOSITION. - Si d est partout dense dans un treillis paratopologique (L , Ω), tout voisinage relativement à d d'un élément $x \leq d$, a pour fermeture un voisinage de x dans (L , Ω).

En effet $v \geqslant \omega \wedge d \geqslant x$ $(\omega \in \Omega)$ implique $\bar{v} \geqslant \overline{\omega \wedge d} \geqslant \omega \wedge \bar{d} = \omega \geqslant x$.

(5.5) PROPOSITION. - Si a est partout dense dans un treillis topologique (L , Ω) tout voisinage relativement à a d'un élément $x \leq a$, a pour fermeture un voisinage de x dans (L , Ω).

Soit v contenant un ouvert dans a de la forme $\omega \wedge a$ $(\omega \in \Omega)$ et $\omega \wedge a \geq x$. On a $\bar{v} \geqslant \overline{\omega \wedge a} \geqslant \omega \wedge \bar{a} = \omega \wedge e = \omega \geqslant x$.

6. Filtres.

Les filtres d'un treillis distributif avec 0 et e ont été étudiés et utilisés principalement par WALLMAN [7] et SAMUEL [6].

Rappelons rapidement les définitions et les résultats essentiels.

(6.1) DÉFINITION. - Un sous-ensemble F d'un treillis distributif avec 0 et e est un filtre s'il vérifie :

(F_1) : si $x \in F$ et $y \geqslant x$, alors $y \in F$.

(F_2) : si x et $y \in F$, $x \wedge y \in F$.

si en outre $0 \notin F$ on dira que F est un filtre propre, cela est équivalent à $F \neq L$ d'après (F_1).

(6.2) DÉFINITION. - Un filtre F' est plus fin qu'un filtre F si $F' \supset F$.

L'ensemble Φ de tous les filtres est ainsi ordonné, il a un élément minimum $\{e\}$ et un élément maximum le filtre impropre L. Si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille de filtres elle a dans Φ une borne inférieure $F = \bigcap_i F_i$ qui est encore un filtre. Si l'un des F_i est propre, F est propre. L'ensemble Φ est donc un treillis complet.

Soit G un sous-ensemble quelconque de L. Il existe une borne inférieure pour tous les filtres contenant G définie par $F(G) = \bigcap \{F : F \in \Phi \ , F \supset G\}$. On peut aussi définir $F(G)$ ainsi : soit G' l'ensemble des intersections finies d'éléments de G ; $F(G)$ est l'ensemble des $x \in L$ qui contiennent un élément de G' (cela se vérifie immédiatement parce que L est distributif). Cette définition permet de voir que pour que $F(G)$ soit un filtre propre il faut et il suffit que $0 \notin G'$ c'est-à-dire que toute intersection finie d'éléments de G soit différente de 0.

Une famille G ayant cette propriété sera dite famille compatible ; le filtre propre $F(a)$ est dit filtre engendré par G. En particulier si $G = F_1 \cup \{a\}$ où F_1 est un filtre et a un élément quelconque, G est compatible si et seulement si : quel que soit $x \in F_1$, $x \wedge a \neq 0$.

(6.3) DÉFINITION. - Un sous-ensemble B de L est une base du filtre qu'il engendre si $F(B)$ est l'ensemble des éléments supérieurs à un élément de B ; deux bases B et B' sont équivalentes si $F(B) = F(B')$.

B est une base de filtre si : b_1 et $b_2 \in B \Rightarrow$ il existe $b_3 \in B$, $b_3 \leqslant b_1 \wedge b_2$; $F(B)$ est propre si $0 \notin B$.

Pour qu'un filtre de base B soit plus fin qu'un filtre de base B' il faut et il suffit que tout élément de B' contienne un élément de B.

(6.4) THÉORÈME. - L'ensemble Φ des filtres <u>dans</u> L est un treillis local; nous savons déjà que Φ est un treillis complet, il suffit de voir que pour tout filtre F et toute famille $\{F_\alpha\}$ de filtres, on a :

$$F \wedge (\overset{\Phi}{\bigvee_\alpha} F_\alpha) \subset \overset{\Phi}{\bigvee_\alpha}(F \wedge F_\alpha)$$

Car l'inclusion opposée est vraie dans tout treillis.

Soit $x \in F \wedge (\overset{\Phi}{\bigvee_\alpha} F_\alpha)$. On a $x \in F$ et $x = x_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge x_{\alpha_n}$ $(x_{\alpha_1} \in F_{\alpha_1})$ car $\overset{\Phi}{\bigvee_\alpha} F_\alpha$ est l'ensemble des intersections finies d'éléments de $\bigcup_\alpha F_\alpha$ donc $x = \overset{L}{\bigwedge_{i=1\dots n}} (x_{\alpha_i} \vee x)$, or les $x_{\alpha_i} \vee x \in F_{\alpha_i} \wedge F$ donc $x \in \overset{\Phi}{\bigvee_\alpha} (F_\alpha \wedge F)$.

(6.5) DÉFINITION. - On appelle ultrafiltre un <u>filtre propre</u> U tel que tout filtre propre qui le contient lui est identique (filtre maximal dans $\Phi - \{L\}$).

(6.6) THÉORÈME. - Tout filtre propre est contenu dans un ultrafiltre.

En effet si $\{F_\alpha\}$ est une famille totalement ordonnée de filtres propres $\bigcup_\alpha F_\alpha$ est un filtre propre donc l'ensemble des filtres propres est inductif.

(6.7) PROPOSITION. - Un filtre propre F est un ultrafiltre si et seulement si :

$$a \notin F \Rightarrow F \cup \{a\} \text{ est incompatible.}$$

En effet soit F un ultrafiltre et $a \notin F$, $F \cup \{a\}$ compatible entraîne l'existence d'un filtre propre contenant F et a donc $\neq F$.

Inversement soit F un filtre tel que $a \notin F \Rightarrow F \cup \{a\}$ est incompatible et G un filtre contenant F et propre, tout élément de G est compatible avec F donc $F = G$.

(6.8) PROPOSITION. - Soit U un ultrafiltre; si a et b sont tels que $a \vee b \in U$ alors on a : $a \in U$ ou $b \in U$.

Si a et $b \notin U$ l'ensemble G des éléments $x \neq 0$ tels que $a \vee x \in U$ est un filtre propre contenant U et b, donc strictement plus fin que U ce qui est contradictoire. On en déduit que si $a_1 \vee a_2 \dots \vee a_n \in U$ où U est un ultrafiltre, l'un des a_i appartient à U.

Dans la suite nous supposerons que L est un treillis local.

(6.9) THÉORÈME. - Un sous-ensemble compatible C de L est un ultrafiltre si et seulement si pour tout $a \in L$ on a : $a \in C$ ou $a^* \in C$. En effet si C est un ultrafiltre et si $a \notin C$, d'après la proposition 8, il existe $x \in C$ et $x \wedge a = 0$ donc $x \leq a^*$ donc $a^* \in C$. Inversement si pour tout $a \in L$ on a $a \in C$ ou $a^* \in C$, soit F un filtre propre contenant C, a un élément de F si $a \notin C$, $a^* \in C$ donc $a^* \in F$, c'est impossible car $a \wedge a^* = 0 \notin F$, donc $a \in C$ et $C = F$

(6.10) COROLLAIRE. - Si U est un ultrafiltre, $a^{**} \in U \Rightarrow a \in U$ (car $a^* \notin U$).

7. <u>Exemples de treillis locaux.</u>

(7.1) E étant un ensemble quelconque $\mathcal{P}(E)$ est un treillis local; les notions de topologie, filtre, etc., <u>dans</u> le treillis local $\mathcal{P}(E)$ coïncident avec les définitions habituelles de topologie, filtre, etc. <u>sur</u> l'ensemble E.

(7.2) E étant un espace topologique, l'ensemble des ouverts de E est un treillis local (l'exemple 1 est le cas particulier où E est muni de la topologie discrète).

(7.3) Si B est une algèbre de Boole complète, c'est un treillis local, car la loi de distributivité y est vérifiée.

(7.4) Dans l'exemple 2 si O est un ouvert, O^{**} est l'intérieur de la fermeture de O. Donc le théorème de Glivenko (Théorème 2) entraîne que l'ensemble des ouverts qui sont les intérieurs de leurs fermetures est un treillis local, puisque c'est une algèbre de Boole complète. Cette algèbre de Boole ne possède aucun atome si aucun point n'est isolé dans l'espace topologique E. (c'est le cas pour R^n).

(7.5) Si E est un ensemble muni d'une mesure μ, l'algèbre de Boole des ensembles définis à un ensemble de mesure nulle près est un treillis local.

(7.6) Si E est un espace de Riesz complètement réticulé et e un élément ≥ 0 de E, l'ensemble des éléments $x \in E$, $0 \leq x \leq e$ est un treillis local.

C'est le cas en particulier pour le treillis complet des applications continues d'un espace compact totalement discontinu dans $[0, 1]$.

Section II

Théorèmes d'immersion d'ensembles ordonnés dans les treillis locaux.

1. Soient L un treillis complet et P un sous-ensemble de L muni de l'ordre induit et tel que $0 \in P$.

A tout sous-ensemble A de P faisons correspondre le sous-ensemble $\bar{A}$ de P défini par :

$$\bar{A} = \{x : x \leq \overset{L}{\bigvee} A \ ; \ x \in P\}$$

(1.1) PROPOSITION. - L'application $A \to \bar{A}$ vérifie les axiomes d'une fermeture au sens de Moore.

i. $\bar{A} \supset A$;

ii. $A \supset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$;

iii. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

et en outre pour tout $a \in P$

iv. $\overline{\{a\}} = \{x : x \in P , x \leq a\}$

la vérification est immédiate.

Un sous-ensemble A de P est dit fermé si $A = \bar{A}$. La proposition (1.1) entraîne que l'intersection d'une famille quelconque de fermés est un fermé et que $\overline{\{0\}} = \{0\}$ est contenu dans tout fermé. L'ensemble Φ des fermés de P, ordonné par inclusion est donc un treillis complet.

(1.2) LEMME. - L'application $\mathfrak{J}$ de P dans Φ définie par $\mathfrak{J}(x) = \overline{\{x\}}$ est un isomorphisme de P sur un sous-ensemble de Φ, respectant toutes les intersections qui existent dans P. En effet

$$x \leq y \Leftrightarrow \mathfrak{J}(x) \subset \mathfrak{J}(y) \quad ;$$

si $\{x_\alpha\}$ est une famille d'éléments de P ayant $x \in P$ pour intersection (prise dans P, i.e. : $x = \overset{P}{\bigwedge} x_\alpha$) $\mathfrak{J}(x) \subset \mathfrak{J}(x_\alpha)$ pour tout $\alpha \Rightarrow \mathfrak{J}(x) \subset \bigcap_\alpha \mathfrak{J}(x_\alpha)$ d'autre part $y \in \bigcap_\alpha \mathfrak{J}(x_\alpha) \Rightarrow y \leq x_\alpha$ pour tout α donc $y \leq x$ et $y \in \mathfrak{J}(x)$.

(1.3) LEMME. - L'application φ de Φ dans L définie par $\varphi(F) = \overset{L}{\bigvee} F$ est une application bi-univoque, respectant les unions quelconques. L'image par φ de Φ est le sous-ensemble L' de L formé de toutes les unions d'éléments de P . L'application composée $\varphi \circ \mho$ est l'injection canonique de P dans L . En effet

$$F_1 \supset F_2 \Longleftrightarrow \varphi(F_1) = \overset{L}{\bigvee} F_1 \supset \overset{L}{\bigvee} F_2 = \varphi(F_2)$$

donc φ est injective. Si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille de fermés ; le plus petit fermé contenant tous les F_i est $F = \overline{\bigcup_i F_i}$. On a $\varphi(F) = \overset{L}{\bigvee} \overline{\bigcup_i F_i}$ mais pour tout $A \subset P$, $\overset{L}{\bigvee} A = \overset{L}{\bigvee} \overline{A}$ donc

$$\varphi(F) = \overset{L}{\bigvee}(\bigcup_i F_i) = \overset{L}{\bigvee_i} \overset{L}{\bigvee} F_i = \overset{L}{\bigvee_i} \varphi(F_i)$$

donc φ respecte les unions quelconques. Tout élément de $\varphi(\Phi)$ est union d'éléments de P , par définition. D'autre part, soit $x \in L$ et $x = \overset{L}{\bigvee_{i \in I}} x_i$, les x_i appartenant à P . Soit $F = \overline{\{x_i \,:\, i \in I\}}$ on a $x = \varphi(F)$; enfin la dernière affirmation est triviale.

(1.4) REMARQUE. - Φ ainsi que toutes les applications qui s'en déduisent ne dépend que de P et de L' . On pourra donc supposer dans toute la suite que tout élément de L est union d'éléments de P .

(1.5) THÉORÈME. - A tout plongement d'un ensemble ordonné avec 0 , P , dans un treillis complet L , tel que tout élément de L soit union d'éléments de P correspond une saturation $A \rightarrow \overline{A}$ vérifiant (i) (ii) (iii) (iv). Inversement si $A \rightarrow \overline{A}$ vérifie (i) ... (iv) , l'ensemble Φ des fermés est un treillis complet, l'application $\mho : P \rightarrow \Phi$ est une immersion ; tout élément de Φ est union d'images d'éléments de P et la saturation associée est $A \rightarrow \overline{A}$.
La première partie résulte de (1.2) et (1.3) . Φ treillis complet résulte de (i) , (ii) et (iii) , tout le reste est immédiat.

La théorème (1.3) permet de caractériser tous les plongements de P dans un treillis complet engendré par l'image de P , à un isomorphisme près, uniquement à l'aide de sous-ensembles de P .

2. Plongements d'un demi-treillis dans un treillis local.

Nous supposerons dans la suite que P est un demi-treillis pour l'intersection ce qui n'est pas une grande restriction, et nous allons chercher à plonger P dans un treillis local. Si A et B sont des sous-ensembles de P, notons $A \wedge B = \{x \wedge y \; ; \; x \in A \, , \, y \in B\}$.

(2.1) PROPOSITION. - Si P est plongé dans un treillis local L, on a pour tous sous-ensembles A et B de P,

$$(\mathrm{v}) \qquad \overline{A \underset{P}{\wedge} B} = \overline{A} \underset{P}{\wedge} \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B} .$$

Notons d'abord que pour tout $A \subset P$, $\overline{A}$ est un "cône" (c'est-à-dire : $\{x \in \overline{A}$ et $y \leq x\} \Rightarrow y \in \overline{A})$; de là résulte immédiatement que $\overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$. D'autre part on a :

$$x \in \overline{A} \wedge \overline{B} \Leftrightarrow x \leq \Big(\overset{L}{\bigvee_{a \in A}} a\Big) \wedge \Big(\overset{L}{\bigvee_{b \in B}} b\Big) = \overset{L}{\bigvee_{\substack{a \in A \\ b \in B}}} (a \wedge b)$$

(d'après le distributivité) donc $x \leq \overset{L}{\bigvee} (A \underset{P}{\wedge} B)$ et $x \leq \overline{A \wedge B}$ d'où $\overline{A \wedge B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ d'autre part $A \wedge B \subset \overline{A}$ et $A \wedge B \subset \overline{B}$ donc $A \wedge B \subset \overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \wedge B} \subset \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ce qui achève la démonstration.

En outre, cette propriété est caractéristique en effet on a :

(2.2) PROPOSITION. - Soit $A \rightarrow \overline{A}$ une saturation vérifiant $(\mathrm{i}, \ldots, \mathrm{v})$ l'ensemble Φ des fermés pour cette saturation est un treillis local. On sait déjà que Φ est un treillis complet, il suffit donc de vérifier que si $F \in \Phi$ et si $\{F_i\}_{i \in I}$ est une famille d'éléments de Φ on a :

$$F \cap \Big(\overset{\Phi}{\bigvee} F_i\Big) = \overset{\Phi}{\bigvee} (F \cap F_i)$$

Or

$$F \cap \overset{\Phi}{\bigvee} F_i = F \cap \big(\overline{\bigcup F_i}\big) = \overline{F \underset{P}{\wedge} \big(\bigcup_i F_i\big)}$$

d'après (v), mais F et $\bigcup\limits_i F_i$ étant des cônes

$$F \wedge \Big(\bigcup_i F_i\Big) = F \cap \Big(\bigcup_i F_i\Big) = \bigcup_i (F \cap F_i)$$

donc

$$F \cap \big(\overset{\Phi}{\bigvee} F_i \big) = \overline{\bigcup_i F \cap F_i} = \overset{\Phi}{\bigvee} (F \wedge F_i) \quad .$$

Démontrons encore un lemme qui nous sera utile pour la construction effective de saturations vérifiant (i ; ... , v) dans bien des applications.

(2.3) LEMME. - Soit P un treillis pour l'intersection ayant un 0 et soit Γ une application de $\mathcal{P}(P)$ dans $\mathcal{P}(P)$ vérifiant

(i) $\qquad \Gamma(A) \supset A \quad ;$

(ii) $\qquad A \supset B \Rightarrow \Gamma(A) \supset \Gamma(B) \quad ;$

(iv) $\qquad \Gamma(\{a\}) = \{x : x \leq a\}$

et les formes affaiblies de (iii) et (v) que sont :

(iii bis) $\qquad \Gamma(\Gamma(\{a\})) = \Gamma(\{a\})$

(v bis) $\qquad A \wedge B \subset C \Rightarrow \Gamma(A) \wedge B \subset \Gamma(C)$

l'ensemble des fermés pour Γ (i.e. $\Gamma(A) = A$) est un treillis complet, l'application $A \rightarrow \bar{A} = \bigcap \{ F : F$ fermé pour Γ et $F \supset A \}$ vérifie (i) (ii) (iii) (iv) et (v).

La vérification de (i) (ii) (iii) et (iv) est très facile, pour démontrer (v) nous allons donner une construction de $\bar{A}$.

Pour tout ordinal α définissons A_α par induction : $A_0 = A$, $A_{\alpha+1} = \Gamma(A)$ et $A_\tau = \bigcup_{\alpha < \tau} A_\alpha$ si τ est un ordinal limite.

La suite totalement ordonnée des A_α possède un élément maximal A_λ car elle est inductive alors $A_{\lambda+1} \supset A_\lambda$ en vertu de (i) donc $A_{\lambda+1} = A_\lambda$ donc A_λ est fermé et contient A , donc $A_\lambda \supset \bar{A}$. D'autre part de $A \subset \bar{A}$ on déduit $A_\alpha \subset \bar{A}$ pour tout α (par récurrence) donc $A_\lambda = \bar{A}$.

Notons ensuite que (ii) et (iv) entraînent que, pour tout A , $\Gamma(A)$ est un "cône". Soient maintenant A , B , C trois sous-ensembles de P tels que : $A \wedge B \subset \bar{C}$. Montrons que $\bar{A} \wedge B \subset \bar{C}$.

1° $A_0 \wedge B = A \wedge B \subset \bar{C}$ par hypothèse.

2° Si $A_\alpha \wedge B \subset \bar{C}$, $A_{\alpha+1} \wedge B = \Gamma(A_\alpha) \wedge B \subset \Gamma(\bar{C}) = \bar{C}$ d'après (v bis) .

3° Soit τ un ordinal limite; si pour tout $\alpha < \tau$, $A_\alpha \wedge B \subset \overline{C}$.

$$A_\tau \wedge B = \left(\bigcup_{\alpha<\tau} A_\alpha\right) \wedge B$$

donc, si $x \in A_\tau \wedge B$, $\exists\ \alpha < \tau$, $a \in A_\alpha$, $b \in B$; tels que $x = a \wedge b$; mais alors $x \in A_\alpha \wedge B$; donc $x \in \overline{C}$, et $A_\tau \wedge B \subset \overline{C}$.

La propriété est donc vraie pour tout ordinal et $\overline{A} \wedge B \subset \overline{C}$. L'intersection étant commutative, on voit que :

$$A \wedge B \subset \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \cap B \subset \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \subset \overline{\overline{C}} = \overline{C}$$

or $\overline{A}$ et $\overline{B}$ étant des cônes, on a $A \wedge B \subset \overline{A} \wedge \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$, donc $\overline{A \wedge B} \subset \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{A} \wedge \overline{B}$. L'autre inclusion se déduit de

$$A \wedge B \subset \overline{A \wedge B} = \overline{C} \Rightarrow \overline{A} \wedge \overline{B} \subset \overline{C}$$

ce qui achève la démonstration.

Dans toute la suite du paragraphe, une saturation vérifiera toujours (i), ..., (v). $\mathcal{S}$ Désignera l'ensemble des saturations.

(2.4) DEFINITION. - Si Γ_1 et Γ_2 sont deux saturations, Γ_1 sera dite plus fine que Γ_2, si tout saturé pour Γ_2 est saturé pour Γ_1. Cette relation est un ordre sur l'ensemble des saturations, et on a :

(2.5) PROPOSITION. - Soient $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ une famille non vide de saturations et Φ_i l'ensemble des fermés relatifs à Γ_i, la famille $\{\Gamma_i\}_{i \in I}$ a une borne supérieure Γ notée $\Gamma = \bigvee^{\mathcal{S}} \Gamma_i$; la famille Φ des fermés de Γ est l'ensemble des intersections quelconques de fermés de tous les Φ_i. Soit en effet $\Gamma(A) = \bigcap \{F : F \in \bigcup_i \Phi_i, F \supset A\}$ que nous noterons $\overline{A}$. On vérifie immédiatement (i), ..., (iv). En outre, soient $F \in \bigcup_i \Phi_i$, et A et B deux sous-ensembles quelconques de P, $F \supset A \wedge B \Longleftrightarrow F \supset \overline{A} \wedge \overline{B}$. En effet $\exists\ i \in I$ avec $F \in \Phi_i$ donc $F \supset (A \wedge B) \Longleftrightarrow F \supset \Gamma_i(A \wedge B) = \Gamma_i(A) \cap \Gamma_i(B)$ donc $\overline{A \wedge B} = \overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

D'autre part toute saturation Γ' de fermés Φ' plus fine que toutes les Γ_i est telle que $\Phi' \supset \bigcup_i \Phi_i$ donc aussi toutes les intersections de sous-ensembles de $\bigcup_i \Phi_i$ donc $\Phi' \supset \Phi$.

(2.6) PROPOSITION. - Il existe une extension plus fine que toutes les autres, ses fermés sont tous les "cônes" de P.

Soit $\Gamma(A) = \{x : \exists\ a \in A \text{ et } x \leq a\}$ le "cône" engendré par A; l'application $A \to \Gamma(A)$ vérifie (i), ... (iv) (immédiat). Si A et $B \subset P$

$x \in \overline{A \wedge B} \Leftrightarrow \exists\, a \in A$ et $b \in B$ et $x \leq a \wedge b \Leftrightarrow x \in \overline{A} \cap \overline{B}$. D'autre part tout fermé dans une saturation quelconque est un cône donc Γ est bien la borne supérieure de toutes les saturations.

(2.7) THÉORÈME. - Il existe une saturation Γ_0 telle que l'application $\mho$ de P dans l'ensemble Φ_0 des fermés de Γ_0 , respecte toutes les intersections de P et toutes les unions distributives de P (une union est dite distributive dans P si pour tout $x \in P$, $x \wedge \bigvee_\alpha x_\alpha = \bigvee_\alpha (x \wedge x_\alpha)$. Soit $A \subset P$, définissons $\Gamma(A)$ comme l'ensemble des éléments de P qui sont inférieurs à une union distributive d'éléments de A . (On notera $\bigvee^* x_\alpha$ l'union des x_α si elle est distributive) l'application $A \longrightarrow \Gamma(A)$ vérifie toutes les conditions du lemme (2.3) (les 4 premières trivialement). Quant à (v bis) supposons $A \wedge B \subset C$ et soit $x \in \Gamma(A) \wedge B$. Alors $x = a \wedge b$ avec $a \leq \bigvee^*_\alpha a_\alpha$, $a_\alpha \in A$ et $b \in B$. On a donc $x \leq (\bigvee^*_\alpha a_\alpha) \wedge b = \bigvee^*_\alpha (a_\alpha \wedge b)$ les $a_\alpha \wedge b$ appartenant à C , $\bigvee^*_\alpha (a_\alpha \wedge b) \in \Gamma(C)$ et $x \in \Gamma(C)$. D'après le lemme (2.3) , la saturation Γ_0 déduite de Γ vérifie $(i, \ldots, v)$ et l'ensemble Φ_0 est un treillis local.

On a vu que dans tous les cas $\mho$ respecte les intersections quelconques. Supposons que $x = \bigvee^* x_i$, on a $x \geq x_i$ pour tout, donc $\mho(x) \supset \mho(x_i)$ et $\mho(x) \supset \overset{\Phi}{\bigvee_i} \mho(x_i)$. D'autre tous les x_i appartiennent à $\overset{\Phi}{\bigvee_i} \mho(x_i)$ et $x = \bigvee^* x_i$ donc $x \in \overset{\Phi}{\bigvee_i} \mho(x_i)$ qui est saturé, donc $\mho(x) \subset \bigvee_i \mho(x_i)$ et $\mho$ conserve toutes les unions distributives.

(2.8) THÉORÈME. - Toute saturation Γ est plus fine que Γ_0 .

Soit en effet $\Gamma(A)$ le saturé d'un ensemble quelconque et $a \in \Gamma(A)$. Il existe une famille a_α d'éléments de A tels que :

$$\Gamma(\{a\}) = \overset{\Phi}{\bigvee} \Gamma(\{a_\alpha\})$$

cela entraîne que $a = \overset{P}{\bigvee} a_\alpha$ et que cette union est distributive (car Φ est un treillis local) donc $a \in \Gamma_0(\{a\})$ et $\Gamma_0(A) \supset \Gamma(A)$. On a alors

$$\Gamma(\Gamma_0(A)) \subset \Gamma_0(\Gamma_0(A)) = \Gamma_0(A)$$

donc $\Gamma_0(A)$ est fermé pour Γ et Γ est plus fine que Γ_0 .

(2.9) COROLLAIRE. - L'ensemble des saturations forme un treillis complet. En effet toute famille non vide a une borne supérieure (2.5) et il existe une saturation moins fine que toutes les autres (2.8).

(2.10) DÉFINITION. - Si P est un demi-treillis pour l'intersection et Λ un treillis local, appelons homomorphisme de P dans Λ une application $f : P \to \Lambda$ telle que pour $x, y \in P$,

$$f(x \underset{P}{\wedge} y) = f(x) \underset{\Lambda}{\wedge} f(y)$$

et pour toute famille $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}$ d'éléments de P ayant une union distributive,

$$f(\overset{P}{\bigvee}{}^{*} x_\alpha) = \bigvee{}^{*} f(x_\alpha)$$

(2.11) THÉORÈME. - Soit Φ_0 l'extension minimale de P, $\mathfrak{J}_0$ l'injection de P dans Φ_0. A tout homomorphisme f de P dans un treillis local quelconque L, correspond un homomorphisme $\tilde{f}$ unique de Φ_0 dans L tel que $\tilde{f} \circ \mathfrak{J}_0 = f$. Si on identifie P à son image par $\mathfrak{J}_0$ on peut encore dire que tout homomorphisme de P se prolonge de manière unique en un homomorphisme de Φ_0. Cette propriété caractérise Φ_0 à un isomorphisme près.

$$\begin{tikzcd} & \Phi_0 \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ P \arrow[ur, "\mathfrak{J}_0"] \arrow[r, "f"'] & L \end{tikzcd}$$

Soit F un élément quelconque de Φ_0, c'est un sous-ensemble de P ; posons par définition $\tilde{f}(F) = \overset{L}{\bigvee}_{x\in F} f(x)$.

i. Si $F = F_1 \cap F_2$, $\tilde{f}(F) = \overset{L}{\bigvee}_{x\in F_1\wedge F_2} f(x)$;

$$\tilde{f}(F_1) \wedge \tilde{f}(F_2) = (\overset{L}{\bigvee_{x_1\in F_1}} f(x_1) \wedge (\overset{L}{\bigvee_{x_2\in F_2}} f(x_2)) = \overset{L}{\bigvee_{\substack{x_1\in F_1\\ x_2\in F_2}}} (f(x_1) \wedge f(x_2))$$

$$= \overset{L}{\bigvee_{\substack{x_1\in F_1\\ x_2\in F_2}}} f(x_1 \wedge x_2) = \overset{L}{\bigvee_{x\in F_1\wedge F_2}} f(x) = \tilde{f}(F) \quad .$$

ii. Si $F = \overset{\Phi_0}{\bigvee_{\alpha}} F_\alpha$, $F \supset F_\alpha$ pour tout $\alpha \Rightarrow \tilde{f}(F) \supset \overset{L}{\bigvee} \tilde{f}(F_\alpha)$.

D'autre part, si $x \in F$, il existe un sous-ensemble A de $\bigcup_\alpha F_\alpha$ tel que $x \leq \overset{P}{\bigvee_{a\in A}}{}^{*} a$ donc

$$f(x) \leq \bigvee_{a \in A}^{L} f(a) \qquad \bigvee_{y \in \bigcup_\alpha F_\alpha}^{L} f(y) = \bigvee_{\alpha}^{L} \tilde{f}(F_\alpha)$$

donc

$$\tilde{f}(F) \subset \bigvee_{\alpha}^{L} \tilde{f}(F_\alpha)$$

et les deux membres sont égaux.

iii. il est immédiat que $\tilde{f}(\mathfrak{I}_o(x)) = f(x)$.

iv. l'unicité de $\tilde{f}$ résulte de : $F = \bigvee_{x \in F}^{\Phi_o} \mathfrak{I}_o(x)$ pour tout $F \in \Phi_o$.

v. L'unicité de Φ_o , à un isomorphisme près, est vraie seulement si on suppose que l'image de P engendre tout le treillis local. Dans ce cas, elle est triviale.

(2.12).COROLLAIRE. - Si P est un treillis local, Φ_o est isomorphe à P .

Section III

Somme directe d'une famille de treillis locaux

Plongement d'un treillis local dans une algèbre de Boole.

1. Somme directe d'une famille de treillis locaux.

(1.1) DÉFINITION. - Une application f d'un treillis local L dans un treillis local L' est un homomorphisme si :

i. $f(0_L) = 0_{L'}$ $\qquad$ 0_L (resp. $0_{L'}$) minimum de L (resp. L')

ii. $f(a \underset{L}{\wedge} b) = f(a) \underset{L'}{\wedge} f(b)$ $\qquad$ $a , b \in L$.

iii. $f(\bigvee_{\alpha}^{L} a_\alpha) = \bigvee_{\alpha}^{L'} f(a_\alpha)$ $\qquad$ $\{a_\alpha\}_{\alpha \in A}$ famille d'éléments de L .

iv. $f(e_L) = e_{L'}$ $\qquad$ e_L (resp. $e_{L'}$) maximum de L (resp. de L')

Par exemple si E et E' sont deux espaces topologiques et $\varphi : E \to E'$ une application continue, l'application $\varphi^{-1} : \mathcal{P}(E') \to \mathcal{P}(E)$ est un homomorphisme, et sa restriction aux treillis Ω' et Ω des ouverts de E' et E est encore un homomorphisme.

Soit E_i $(i \in I)$ une famille d'espaces topologiques et $\prod_i E_i$ l'espace produit. Le treillis des ouverts du produit n'est pas le produit cartésien des treillis locaux des ouverts des E_i (On voit même très facilement que le produit cartésien est isomorphe au treillis des ouverts de l'espace somme des E_i). Par contre si F est un espace topologique quelconque et $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille d'applications continues de F dans les E_i $(f_i : F \to E_i)$ les $\{f_i\}$ se "factorisent " en une application continue $\prod_i f_i : F \to \prod_i E_i$ telle que le diagramme ci-contre soit commutatif pour tout i .

$$\begin{tikzcd} & \prod_i E_i \arrow[d, "pr_i"] \\ F \arrow[ur, "\prod_i f_i"] \arrow[r, "f_i"'] & E_i \end{tikzcd}$$

On est donc conduit à la construction pour toute famille $\{T_i\}$ de treillis locaux d'un treillis local T , et d'une famille d'homomorphismes $\Pi_i : T_i \to T$ tels que si $\{h_i\}$ est une famille d'homomorphismes $h_i : T_i \to \mathcal{T}$ (où $\mathcal{T}$ est un treillis local quelconque) il existe un homomorphisme $h : T \to \mathcal{T}$ unique tel que le diagramme précédent commute pour tout i .

$$\begin{tikzcd} & T \arrow[d, "h"] \\ T_i \arrow[ur, "\Pi_i"] \arrow[r, "h_i"'] & \mathcal{T} \end{tikzcd}$$

T apparaît ainsi dans la catégorie des treillis locaux, avec pour morphismes les homomorphismes de la définition (1.1) comme la somme directe des T_i . Il est donc unique, à un isomorphisme près, s'il existe.

Avant de démontrer l'existence de T posons quelques définitions : $\prod_i T_i$ désignera le produit cartésien des T_i ; $p_i = pr_i : \prod_i T_i \to T_i$ les projections canoniques. On vérifie immédiatement que pour l'ordre :

$$(a_i) < (b_i) \iff a_i < b_i$$

pour tout i , $\prod_i T_i$ est un treillis local.

Un pavé est un élément $a \in \prod_i T_i$ tel que $p_i(a) = e_i$ sauf pour un nombre fini d'indices.

Un 0-pavé est un pavé dont une au moins des composantes est un 0 . Soit $\{a^\alpha\}_{\alpha \in A}$ une famille de pavés dont toutes les projections sauf une sont égales (c'est-à-dire $p_i(a^\alpha) = p_i(a^\beta)$ quels que soient α, β et pour tout $i \neq i_o$) la "soudure" suivant la projection p_{i_o} est le pavé noté : $\sum_{(i_o)} a^\alpha$ défini par :

$$p_i(\sum_{i_o} a^\alpha) = p_i(a^\alpha) \quad \text{si} \quad i \neq i_o \quad \text{et} \quad p_{i_o}(\sum_{i_o} a^\alpha) = \bigvee_\alpha^{T_i} p_{i_o}(a^\alpha) \quad .$$

L'ensemble P des pavés, muni de l'ordre induit par celui de $\top_i\top\ T_i$ est un demi-treillis pour les intersections finies. Soit P_0 le quotient de P par la relation qui identifie tous les 0-pavés et ceux-là seuls. La relation d'ordre dans P, passe au quotient dans P_0 et en fait encore un demi-treillis pour l'intersection, avec 0. Dans P nous définissons une opération Γ qui à tout sous-ensemble A de P fait correspondre un sous-ensemble $\Gamma(A)$ de P de la façon suivante : $\Gamma(A)$ est l'ensemble des soudures d'éléments inférieurs à un élément de A. (Remarquons que l'opération de soudure passe au quotient dans P_0. Car dans P toute soudure de 0-pavés est encore un 0-pavé). Montrons que Γ vérifie les conditions du lemme (2.3) de la section II. Pour (i) (ii) (iv) et (iii bis) c'est immédiat. Vérifions (v bis) soient A, B, C trois sous-ensembles de P_0 tels que $A \wedge B \subset C$ et soit $x \in \Gamma(A) \wedge B$; si x est la classe d'un 0-pavé il est trivial que $x \in \Gamma(C)$; sinon il existe $b \in B$, $\{a^\alpha\}$ une famille d'éléments de A et un indice i tel que $x = (\sum_i a^\alpha) \wedge b$. Or $(\sum_i a^\alpha) \wedge b = \sum_i a^\alpha \wedge b$, car :

$$p_j[(\textstyle\sum_I a^\alpha) \wedge b] = p_j(\textstyle\sum_I a^\alpha) \wedge p_j(b) = p_j(a^\alpha) \wedge p_j(b) = p_j(a^\alpha \wedge b) \quad \text{si} \quad j \neq i$$

et

$$p_i[(\textstyle\sum_I a^\alpha) \wedge b] = [\bigvee_\alpha p_i(a^\alpha)] \wedge [(p_i(b)] = \bigvee_\alpha p_i(a^\alpha \wedge b)$$

Donc Γ définit une fermeture dans P_0, et l'ensemble T des fermés est un treillis local. (Proposition (2.2), section II) on a une immersion de P_0 dans ce treillis local, et tout élément est union d'images d'éléments de P_0. C'est ce treillis qui est la somme directe des T_i. Définissons-les $\top_i\top$: $T_i \to T$.

Soit $x \in T_i$, $a(x)$ sera le pavé tel que $p_j(a(x)) = e_j$, si $j \neq i$ et $p_i(a(x)) = x$, c'est un 0-pavé si et seulement si $x = 0_i$. Par définition $\top_i\top(x)$ est l'image de $a(x)$ par l'injection de P_0 dans T.

(1.2) LEMME. Pour tout i, $\top_i\top$ est un homomorphisme.

i. si $x = 0_i$, $a(x)$ est un 0-pavé, son saturé est donc 0_T.

ii. si $x = e_i$, $a(x)$ est le pavé maximum, son image est e_T.

iii. si $x = \bigvee^{T_i}_\alpha x_\alpha$, $a(x) \geq a(x_\alpha)$ pour tout α entraîne $\top_i\top(x) \geq \top_i\top(x_\alpha)$ pour tout α.

D'autre part $a(x) = \sum_i a(x_\alpha)$, donc $a(x) \in \Gamma(\{a(x_\alpha)\})$ et $\pi_i(x) \leq \bigvee^T \pi_i(x_\alpha)$

iv. Si $x = x_1 \overset{T_i}{\wedge} x_i$ on a : $a(x) = a(x_1) \overset{P}{\wedge} a(x_2)$ donc $\pi_i(x) = \pi_i(x_1) \wedge \pi_i(x_2)$ car l'injection de P_o dans T conserve les intersections ; en fait on a même

$$\pi_i(\overset{T_i}{\bigwedge_\alpha} x_\alpha) = \overset{T}{\bigwedge_\alpha} \pi_i(x_\alpha) .$$

Notons que tout élément de T_i s'identifie à un élément de P_o ; que tout élément de P_o est alors intersection finie d'éléments de T_i (car un pavé n'a qu'un nombre fini de composantes différentes de l'élément maximum) ; tout élément de T est alors une famille saturée de pavés.

Si $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$ sont des éléments de $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$, l'image dans T du pavé qu'ils définissent sera notée $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \rangle$. On a alors dans T : $\langle x_{i_1}, \dots, x_{i_n} \rangle = \langle x_{i_1} \rangle \wedge \langle x_{i_2} \rangle \wedge \dots \wedge \langle x_{i_n} \rangle$.

(1.4) DÉFINITION. - Soient $\mathcal{T}$ un treillis local quelconque et $h_i : T_i \to \mathcal{T}$ une famille d'homomorphismes. Définissons $h : T \to \mathcal{T}$ par

$$h(t) = \overset{T'}{\bigvee_{\langle x_{i_1} \dots x_{i_n} \rangle \in t}} \left(\overset{T'}{\bigwedge_{i_p}} h_{i_p}(x_{i_p}) \right) .$$

On vérifie immédiatement que k ainsi défini est un homomorphisme et que $h \circ \pi_i = h_i$.

L'unicité de h résulte du fait que h est déterminé sur les $\langle x_i \rangle$ par $h \langle x_i \rangle = h_i(x_i)$, que c'est un homomorphisme ; et que T est engendré par les $\langle x_i \rangle$ par intersections finies et unions quelconques.

On a donc le théorème

(1.5) THÉORÈME. - La catégorie des treillis locaux est une catégorie à sommes directes infinies.

2. Plongement d'un treillis local dans une algèbre de Boole.

On sait (théorème dû à STONE) que tout treillis distributif peut être plongé dans le treillis des parties d'un ensemble avec conservation des intersections et réunions finies. LESIEUR [3] a montré que si le treillis vérifie la propriété de disjonction de Stone $(a \neq b \Longrightarrow \exists\, c$ vérifiant : $(a \wedge c \neq 0$ et $b \wedge c = 0)$ ou $(a \wedge c = 0 , b \wedge c \neq 0))$ il peut être plongé dans une algèbre de Boole complète avec conservation des intersections quelconques et réunions finies ; l'algèbre de Boole n'étant plus une algèbre d'ensembles. Nous allons montrer que tout treillis distributif avec 0 et I peut être ainsi immergé dans une algèbre de Boole complète (non atomique en général) avec conservation des intersections finies et des réunions distributives quelconques. En particulier si le treillis est local l'immersion conservera toutes les réunions.

Soit T un treillis distributif. T^* sera l'ensemble des couples (a , a') où $a , a' \in T$ avec la relation $(a , a') < (b , b') \Longleftrightarrow a < a' \vee b$ et $a \wedge b' < a'$. (Si $T = \mathcal{P}(E)$, $(a , a') < (b , b')$ est la condition nécessaire et suffisante pour que $a \cap \complement_E a' \subset b \cap \complement_E b')$.

LEMME 1. - La relation $<$ est un préordre sur T^*.

i. $(a , a') < (a , a')$ car $a < a' \vee a$ et $a \wedge a' < a'$

ii. $(a , a') < (b , b')$ et $(b , b') < (c , c')$ entraînent :

$$a < a' \vee b , \quad a \wedge b' < a' , \quad b < b' \vee c , \quad b \wedge c' < b' ,$$

d'où on déduit :

(α) $a < a' \vee b < a' \vee b' \vee c$ donc : $a = (a \wedge a') \vee (a \wedge b') \vee (a \wedge c') < a' \vee (a \wedge b') \vee c = a' \vee c$

(β) $a' > a \wedge b' > a \wedge b \wedge c'$ et aussi $a' > a \wedge a' \wedge c$ d'où : $a' > (a \wedge c' \wedge a') \vee (a \wedge c' \wedge b)$ d'où $a' > (a \wedge c') \wedge (a' \vee b) = a \wedge c'$.

(α) donne $a < a' \vee c$ et (β) donne $a' > a \wedge c'$, donc $(a , a') < (c , c')$

Appelons T' le quotient de T^* par la relation

$$(a , a') \sim (b , b') \Longleftrightarrow (a , a') < (b , b') \text{ et } (a , a') > (b , b') .$$

T' est ordonné par la relation quotient, la classe de (a , a') dans T' sera notée $[a , a']$.

LEMME 2. - Si $\bigwedge_T^* a_i$ et $\bigvee_T^* a_i'$ existent alors $\bigwedge_{T'} [a_i , a_i']$ existe et est égale à : $[\bigwedge_T^* a_i , \bigvee_T^* a_i']$.

(α) pour tout i on a : $\bigwedge_T^* a_i < (\bigvee_T^* a'_i) \vee a_i$ et $(\bigwedge_T^* a_i) \wedge a'_i < \bigvee_T^* a'_i$

donc $[\bigwedge_T^* a_i , \bigvee_T^* a'_i] < [a_i , a'_i]$ quel que soit i .

(β) Soit $[x , x'] < [a_i , a'_i]$ pour tout i , alors :

$$\left.\begin{aligned} &x < x' \vee a_i \Rightarrow x < \bigwedge_T (x' \vee a_i) = x' \vee (\bigwedge_T^* a_i) \\ &x \wedge a'_i < x' \Rightarrow \bigvee^T (x \wedge a'_i) = x \wedge (\bigvee^T{}^* a'_i) < x \end{aligned}\right\} \text{donc } [x , x'] < [\bigwedge_T^* a_i , \bigvee_T^* a'_i]$$

ce qui achève la démonstration.

Remarquons que dans T toutes les unions et intersections finies existent et sont distributives, donc T' est un demi-treillis pour l'intersection.

LEMME 3. - Dans T' :

i. pour tout $x \in T$, on a : $[x , x] = [0 , 0] = 0_{T'}$

ii. $[I , 0] > [a , b]$ pour tout $[a , b] \in T'$

iii. $[a , 0]$ et $[I , a]$ sont complémentaires quel que soit $a \in T$.

i. et ii. se vérifient immédiatement.

iii. $[a , 0] \wedge [I , a]$ existe et vaut $[a \wedge I , 0 \vee a] = [a , a] = [0 , 0]$ (lemmes 2 et 3) ; d'autre part si $[x , x'] > [I , a]$ et $[x , x'] > [a , 0]$ on a: $a < x$, donc $a \vee x = x$, d'autre part $I < a \vee x$, donc $a \vee x = x = I$. En outre $I \wedge x' < a \Rightarrow x' < a$, d'autre part $a \wedge x' < 0 \Rightarrow x' = 0$, donc $[x , x'] = [I , 0]$, et $[a , 0] \vee [I , a]$ existe et vaut $[I , 0]$. Notons en outre que $[a , 0] \vee [I , a]$ est une union distributive dans T' . Il suffit pour le vérifier de démontrer que, pour tout $[x , x'] \in T'$,
$([x , x'] \wedge [a , 0]) \vee ([x , x'] \wedge [I , a])$ existe et est égale à $[x , x']$.
Soit $[y , y'] > [x , x'] \wedge [a , 0] = [x \wedge a , x']$ et $[y , y'] > [x , x'] \wedge [I,a] =$ $= [x , x' \vee a]$. On a :

(1) $\quad a \wedge x < x' \vee y$

(2) $\quad a \wedge x \wedge y' < x'$

(3) $\quad x < a \vee x' \vee y$

(4) $\quad x \wedge y' < a \vee x'$

$(3) \Rightarrow x = x \wedge (a \vee x' \vee y) = (x \wedge a) \vee (x \wedge (x' \vee y))$

$(1) < (x' \wedge y) \vee (x \wedge (x' \vee y)) = x' \vee y$.

De $x' > x' \wedge x \wedge y'$ et (2) on déduit :

$$x' > (a \wedge x \wedge y') \vee (x' \wedge x \wedge y') = (a \vee x') \wedge (x \wedge y')$$

et avec (4) :

$$x' > x \wedge y' .$$

Donc $[y , y'] > [x , x']$ et $[x , x']$ est bien l'union de $([x , x'] \wedge [a , 0])$ et $([x , x'] \wedge [I , a])$. Enfin dans T' on a pour tout $[a , a']$:
$[a , a'] = [a , 0] \wedge [I , a']$ (lemme 2) .

THÉORÈME 1. - L'application $f : T \rightarrow T'$ définie par $f(a) = [a , 0]$ est un isomorphisme de T sur un sous-ensemble de T' qui transforme 0 et I de T en 0 et I de T' , transforme toute intersection distributive dans T en intersection dans T' et toute union distributive dans T' .

i. $[a , 0] < [b , 0] \Longleftrightarrow a < 0 \vee b$ et $a \wedge 0 < 0 \Longleftrightarrow a < b$ f est un isomorphisme

ii. les propriétés d'intersection de 0 et de I résultent des lemmes 2 et 3

iii. a , a' et b étant trois éléments quelconques de T ,
$a < b \Rightarrow [a , a'] < [b , a']$ en particulier si les $\{a_i\}_{i \in I}$ ont une $\bigvee^*$ on a pour tout $i \in I$ et $\forall\, a' \in T$

$$[a_i , a'] < [\bigvee^* a_i , a']$$

si $[x , x'] > [a_i , a']$ pour tout i :

$$a_i < x \vee a' \Rightarrow \bigvee^* a_i < a' \vee x \quad \text{et} \quad a_i \wedge x' < a' \Rightarrow (\bigvee^* a_i) \wedge x' < a'$$

c'est-à-dire

$$[\bigvee^* a_i , a'] < [x , x']$$

donc

$$\bigvee_{T'} [a_i , a'] = [\bigvee_T^* a_i , a']$$

et en particulier

$$\bigvee_{T'} [a_i , 0] = [\bigvee_T^* a_i , 0] .$$

Montrons que cette union est distributive dans T' ; soit $[b , b'] \in T'$;

$$[b , b'] \wedge ([\bigvee_{T'} [a_i , 0]]) = [b , b'] \wedge [\bigvee_T^* a_i , 0] = (\text{lemme } 2)$$

$$[b \wedge (\bigvee_T^* a_i) , b'] = \bigvee_{T'} [b \wedge a_i , b'] = \bigvee_{T'} ([b , b'] \wedge [a_i , 0])$$

3. <u>Construction de l'algèbre de Boole</u>.

T' est un demi-treillis avec 0 et I, on peut le plonger dans un treillis local Λ par une application biunivoque $\Phi : T' \to \Lambda$ vérifiant :

$$\Phi(0_{T'}) = 0_\Lambda , \quad \Phi(I_{T'}) = I_\Lambda , \quad \Phi(\bigwedge_{T'} x_\alpha) = \bigwedge_\Lambda \Phi(x_\alpha) \quad \text{et} \quad \Phi(\bigvee_{T'}^* x_\alpha) = \bigvee_\Lambda \Phi(x_\alpha)$$

tout élément $\lambda \in \Lambda$ est de la forme $\lambda = \bigvee_\Lambda \Phi(t'_\alpha)$ avec les $t'_\alpha \in T'$. Notons φ l'application canonique de $\Lambda \to \Lambda^{**}$ définie par $\varphi(\lambda) = \lambda^{**}$; la composition des applications f , Φ , φ définit une application $p = \varphi \circ \Phi \circ f$ de T dans l'algèbre de Boole complète $\Lambda^{**} = B$ vérifiant $p(0_T) = 0_B$; $p(I_T) = I_B$; $p(\bigwedge_{i=1}^n x_i) = \bigwedge_i^B p(x_i)$, $p(\bigvee_T^* x_\alpha) = \bigvee_B p(x_\alpha)$ car f , Φ, φ respectent 0 , 1 , les intersections finies et les unions distributives quelconques.

Tout élément λ^{**} de B est image d'un élément λ de Λ par φ, mais $\lambda = \bigvee_\Lambda \Phi(t'_\alpha)$ et les t_α sont de la forme $[x_\alpha , x'_\alpha] = f(x_\alpha) \wedge \complement_T f(x'_\alpha)$, $x_\alpha , x'_\alpha \in T$ (le symbole $\complement_T$ désignant le complémentaire dans T') ; donc en définitive tout élément de B est une union d'éléments de la forme : $p(x_\alpha)$ ou $\complement_B p(y_\beta)$, les x_α et y_β étant des éléments quelconques de T (l'image de T par p engendre B par les opérations de passage au complémentaire et d'unions quelconques).

THÉORÈME 2. - p est une application biunivoque.

$x \neq y \Rightarrow \Phi \circ f(x) \neq \Phi \circ f(y)$ car f et Φ sont injectives. Mais on sait en outre que $f(x) = [x , 0]$ et $f(y) = [y , 0]$ ont dans T' des complémentaires

$[I, x]$ et $[I, y]$ et que $[x, 0] \vee [I, x]$ est distributive donc $\Phi[x, 0]$ et $\Phi[I, x]$ sont complémentaires, de même pour $\Phi[y, 0]$ et $\Phi[I, y]$. Posons $\lambda = \Phi \circ f(x)$ et $\mu = \Phi \circ f(y)$. $\lambda \neq \mu$. λ et μ ayant dans Λ des complémentaires, $\lambda = \lambda^{**}$ et $\mu = \mu^{**}$ donc

$$\varphi(\lambda) = p(x) = \lambda^{**} = \lambda \neq \mu = \mu^{**} = p(y) .$$

COROLLAIRE. - Si T est un treillis local, toutes les unions sont distributives dans T donc p respecte toutes les unions, et les intersections finies.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BIRKHOFF (Garrett). - Lattice theory. - New York, American mathematical Society, 1948 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., n° 25).

[2] EHRESMANN (Charles). - Cours de géométrie différentielle professé à la Faculté des Sciences de Paris en 1957/1958.

[3] LESIEUR (Léonce). - Treillis géométriques I et II, Séminaire Châtelet-Dubreil, t. 7, 1953/54, n° 1 et 2.

[4] NÖBELING (Georg). - Grundlagen der analytischen Topologie. - Berlin, Springer, 1954.

[5] PAPERT (Seymour et Dona). - Sur les treillis des ouverts et les paratopologies, Séminaire C. EHRESMANN, t. 1, 1957/58, n° 1.

[6] SAMUEL (Pierre). - Ultrafiltrers and compactification of uniform spaces, Trans. Amer. math. Soc., t. 64, 1948, p. 100-132.

[7] WALLMAN (Henry). - Lattices and topological spaces, Annals of Math., Series 2, t. 39, 1938, p. 112-126.