Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

2009-2010

Jean-Claude Saut

Un modèle asymptotique pour les ondes internes de grande amplitude

Séminaire É. D. P. (2009-2010), Exposé n° XIX, 14 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2009-2010____A19_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Exposé mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Séminaire *Équations aux dérivées partielles*
Centre de mathématiques Laurent Schwartz, 2009-2010
Exposé n^o XIX, 1-14

UN MODÈLE ASYMPTOTIQUE POUR LES ONDES INTERNES DE GRANDE AMPLITUDE

JEAN-CLAUDE SAUT

Résumé. On considère dans cet exposé le modèle asymptotique "shallow-water/shallow-water" obtenu dans [3] à partir du système d'Euler à deux couches avec fond plat et toit rigide pour décrire la propagation d'ondes internes de grande amplitude. En dimension d'espace un, ce système est de type hyperbolique et la théorie locale du problème de Cauchy ne pose pas de difficultés majeures, même si d'autres questions (explosion en temps fini, perte d'hyperbolicité) s'avèrent délicates. En dimension deux d'espace par contre, le système est non local. On montre qu'il conserve cependant des propriétés "de type hyperbolique" et que le problème de Cauchy associé est localement bien posé sous des conditions convenables sur les conditions initiales.

Abstract. We consider in this talk the "shallow-water/shallow-water" asymptotic model obtained in [3] from the two-layer system with rigid lid, for the description of large amplitude internal waves. For one-dimensional interfaces, this system is of hyperbolic type and its local wellposedness does not raise serious difficulties, though other issues (blow-up, loss of hyperbolicity,...) turn out to be delicate. For two- dimensional interfaces, the system turns out to be nonlocal. We prove that it conserves some properties of "hyperbolic type" and prove that the associated Cauchy problem is locally well posed in suitable Sobolev classes provided some natural restrictions are imposed on the data.

1. Introduction

1.1. **Présentation du problème.** Cet exposé, basé sur un travail en collaboration avec Philippe Guyenne et David Lannes [11], est consacré à l'étude du problème de Cauchy pour un système asymptotique modélisant les ondes de gravité de grande amplitude à l'interface de deux couches de fluides incompressibles de densités (constantes) différentes.

Ce système est l'un de ceux dérivés dans [3], dans une grande classe de régimes, pour décrire la propagation d'ondes internes à l'interface de deux couches de fluides immiscibles de densités différentes, sous l'hypothèse de toit rigide et de fond plat. Plus précisément, on considère un fluide inviscide homogène de profondeur d_1 et densité ρ_1 situé au dessus d'un autre fluide inviscide homogène de profondeur d_2 et densité $\rho_2 > \rho_1$. Les deux écoulements sont potentiels. Le fond et le toit sont plats et impénétrables. On néglige la tension de surface, ce qui est physiquement raisonnable.

On peut réduire alors le système d'Euler (en utilisant la formulation de Bernouilli, les conditions aux limites naturelles et le fait que l'interface est bordante : les particules de fluides sont transportées par elle) à un système d'équations d'évolution dans le domaine spatial $\mathbb{R}^d$, $d = 1, 2$, qui comprend deux opérateurs non locaux, un opérateur de Dirichlet-Neumann classique et un opérateur d'interface qui couple les traces à l'interface des potentiels des deux couches (voir [3] pour les détails).

Les modèles asymptotiques sont obtenus en développant les opérateurs non locaux en fonction de petits paramètres convenables dépendant de l'amplitude de l'onde, des longueurs d'onde et du rapport des hauteurs des deux couches. On montre en outre que les modèles asymptotiques sont consistants avec le système d'Euler bi-couches (voir la Définition 1).

De façon plus précise, notant a une amplitude typique de la déformation de l'interface et λ une longueur d'ondes horizontale typique, on introduit les paramètres sans dimension

$$\gamma := \frac{\rho_1}{\rho_2} \in [0,1], \quad \delta := \frac{d_1}{d_2}, \quad \varepsilon := \frac{a}{d_1}, \quad \mu := \frac{d_1^2}{\lambda^2}.$$

Il est aussi utile d'introduire deux autres paramètres ε_2 et μ_2 définis par

$$\varepsilon_2 = \frac{a}{d_2} = \varepsilon\delta, \qquad \mu_2 = \frac{d_2^2}{\lambda^2} = \frac{\mu}{\delta^2}.$$

Les paramètres ε_2 and μ_2 correspondent à ε et μ, avec d_2 plutôt que d_1 pris comme unité de longueur dans la direction verticale.

Le système d'Euler à deux couches avec toit rigide et fond plat peut s'écrire sous forme adimensionnée comprenant les paramètres γ, δ, ϵ et μ (voir [3]). Un point crucial est qu'on peut le réduire à un système de deux équations d'évolution couplant l'élévation de la surface libre ζ au potentiel des vitesses de la couche supérieure évalué à l'interface, à savoir ψ_1. Un tel système généralise la formulation de Zakharov, Craig-Sulem-Sulem ([20, 8]) du problème classique des *water waves*. Il s'écrit :

$$(1) \qquad \begin{cases} \partial_{\widetilde{t}}\widetilde{\zeta} - \dfrac{1}{\mu}G^{\mu}[\varepsilon\widetilde{\zeta}]\widetilde{\psi}_1 & = \quad 0, \\ \partial_{\widetilde{t}}\big(\mathbf{H}^{\mu,\delta}[\varepsilon\widetilde{\zeta}]\widetilde{\psi}_1 - \gamma\nabla\widetilde{\psi}_1\big) + (1-\gamma)\nabla\widetilde{\zeta} & \\ \qquad + \dfrac{\varepsilon}{2}\nabla\big(|\mathbf{H}^{\mu,\delta}[\varepsilon\widetilde{\zeta}]\widetilde{\psi}_1|^2 - \gamma|\nabla\widetilde{\psi}_1|^2\big) + \varepsilon\nabla\mathcal{N}^{\mu,\delta}(\varepsilon\widetilde{\zeta},\widetilde{\psi}_1) & = \quad 0, \end{cases}$$

où $\mathcal{N}^{\mu,\delta}$ est défini pour toutes les paires (ζ,ψ) assez régulières par la formule

$$\mathcal{N}^{\mu,\delta}(\zeta,\psi) := \mu\frac{\gamma\big(\frac{1}{\mu}G^{\mu}[\zeta]\psi + \nabla\zeta\cdot\nabla\psi\big)^2 - \big(\frac{1}{\mu}G^{\mu}[\zeta]\psi + \nabla\zeta\cdot\mathbf{H}^{\mu,\delta}[\zeta]\psi\big)^2}{2(1+\mu|\nabla\zeta|^2)}.$$

Ici $G^{\mu}[\varepsilon\widetilde{\zeta}]$ est un opérateur de Dirichlet-Neumann pour le fluide du haut alors que $\mathbf{H}^{\mu,\delta}[\varepsilon\widetilde{\zeta}]$ est l'opérateur (non local) d'interface qui relie la trace sur l'interface du potentiel des vitesses pour le fluide supérieur à la trace sur l' interface du potentiel des vitesses du fluide du bas. Ces deux opérateurs sont définis sous des hypothèses naturelles de non-cavitation.

Les modèles asymptotiques de [3] couplent l'élévation ζ de l'interface à une variable $\mathbf{v}$ définie par

$$(2) \qquad \mathbf{v} := \mathbf{H}^{\mu,\delta}[\varepsilon\zeta]\psi_1 - \gamma\nabla\psi_1,$$

et qui est essentiellement la différence de la composante horizontale des vitesses des deux fluides à l'interface et aussi le gradient de la deuxième variable canonique de la formulation hamiltonnienne de (1), (voir par exemple [2, 7]).

Remarque 1. Linéarisant les équations (1) autour de l'état de repos $\widetilde{\zeta} = 0$, $\widetilde{\psi}_1 = 0$ on trouve les équations

$$\begin{cases} \partial_t \zeta - \frac{1}{\mu} G^\mu[0]\psi_1 & = & 0, \\ \partial_t \big(\mathbf{H}^{\mu,\delta}[0]\psi_1 - \gamma \nabla \psi_1 \big) + (1-\gamma)\nabla \zeta & = & 0. \end{cases}$$

Puisque $G^\mu[0]$ et $\mathbf{H}^{\mu,\delta}[0]$ se calculent explicitement en variables de Fourier, cela conduit à la relation de dispersion

$$\omega^2 = (1-\gamma)\frac{|\mathbf{k}|}{\sqrt{\mu}} \frac{\tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|)\tanh(\frac{\sqrt{\mu}}{\delta}|\mathbf{k}|)}{\tanh(\sqrt{\mu}|\mathbf{k}|) + \gamma \tanh(\frac{\sqrt{\mu}}{\delta}|\mathbf{k}|)}; \tag{3}$$

correspondant aux solutions ondes planes $e^{i\mathbf{k}\cdot X - i\omega t}$.

La linéarisation autour de la solution nulle est donc bien posée au sens d'Hadamard quand $\gamma \leq 1$ mais la linéarisation autour d'un état présentant une discontinuité des vitesses horizontales à l'interface conduit, en l'absence de tension de surface, à des instabilités de Kelvin-Helmholtz (voir [5, 12]), pouvant être supprimées par la tension de surface (voir par exemple [13]).

Une situation voisine, (voir [5], §100), est celle des écoulements de cisaillement plan à vitesses horizontales constantes U_1 et U_2. L'interface plane développe alors des instabilités pour des perturbations de vecteurs d'ondes $\mathbf{k}$ tels que (en variables avec dimension)

$$|\mathbf{k}| \geq k_{min} = \frac{g(\rho_2^2 - \rho_1^2)}{\rho_1 \rho_2 (U_2 - U_1)^2} \tag{4}$$

Cette formule montre en particulier le rôle stabilisant de la gravité sur les ondes longues.

On est en fait en présence d'un paradoxe apparent. Des instabilités de Kelvin-Helmholtz apparaissent dans le système à deux couches en l'absence de tension de surface. Or les effets de tension de surface sont physiquement négligeables dans des situations océanographiques et (souvent) expérimentales, alors qu'on observe, dans l'océan et en laboratoire, des structures "stables" (au sens "observables sur des échelles de temps suffisamment grandes") qui ne semblent pas présenter d'instabilités.

Une réponse à ce paradoxe a été apportée récemment par D. Lannes [15] qui montre que la partie "stable" (au sens "observable") de l'onde est stabilisée par la gravité. Les basses fréquences sont donc stabilisées par la gravité alors qu'une (petite) tension de surface stabilise les grandes fréquences mais n'affecte pas la "partie principale" de l'onde. Nous reviendrons sur ce travail dans les remarques finales.

1.2. **Les modèles asymptotiques.** Le tableau suivant tiré de [3] résume en fonctions des paramètres ϵ, μ et δ les différents régimes pour lesquels on peut dériver des modèles asymptotiques.

	$\varepsilon = O(1)$	$\varepsilon \ll 1$
$\mu = O(1)$	Full equations	$\delta \sim 1$: FD/FD eq'ns
$\mu \ll 1$	$\delta \sim 1$: SW/SW $\delta^2 \sim \mu \sim \varepsilon_2^2$: SW/FD	$\mu \sim \varepsilon$ and $\delta^2 \sim \varepsilon$: B/FD $\mu \sim \varepsilon$ and $\delta \sim 1$: B/B $\delta^2 \sim \mu \sim \varepsilon^2$: ILW $\delta = 0$ and $\mu \sim \varepsilon^2$: BO

On retrouve ici des systèmes classiques de type Boussinesq, KdV, "Intermediate Long Waves" ou Benjamin-Ono mais aussi des modèles nouveaux. Il est montré dans [3] que tous les modèles asymptotiques sont consistants au sens suivant.

Définition 1. Le système à deux couches (1) est *consistant* avec un système S de $d+1$ équations en ζ et $\mathbf{v}$ si pour toute solution suffisamment régulière (ζ, ψ_1) de (1) satisfaisant une hypothèse de non cavitation, la paire $(\zeta, \mathbf{v} = \mathbf{H}^{\mu,\delta}[\varepsilon\zeta]\psi_1 - \gamma\nabla\psi_1)$ résoud S à un petit terme d'erreur près appelé la *précision* du modèle asymptotique.

On s'intéresse dans l'exposé au régime **Shallow water/Shallow water (SW/SW)**, c'est à dire on suppose que $\mu \ll 1$, et $\mu_2 \ll 1$. Dans ce régime, on autorise des ondes de grande amplitude par rapport à la couche supérieure ($\varepsilon = O(1)$) et à la couche inférieure ($\varepsilon_2 = O(1)$). *On prendra dorénavant pour simplifier $\varepsilon = 1$ (et donc $\varepsilon_2 = \delta$).*

Le modèle s'écrit en dimension $d = 1$,

$$(5) \qquad \begin{cases} \partial_t \zeta + \partial_x\big(\dfrac{h_1 h_2}{\delta h_1 + \gamma h_2}\mathbf{v}\big) = 0, \\ \partial_t \mathbf{v} + (1-\gamma)\partial_x\zeta + \dfrac{1}{2}\partial_x\big(\dfrac{(\delta h_1)^2 - \gamma h_2^2}{(\delta h_1 + \gamma h_2)^2}\mathbf{v}^2\big) = 0, \end{cases}$$

où $h_1 = 1-\zeta$ et $h_2 = 1+\delta\zeta$ (ce système est aussi dérivé formellement dans [7] et dans une forme légèrement différente dans [6] mais n'avait apparemment jamais été étudié comme un système hyperbolique). Il est démontré dans [3] que le système (1) est consistant avec (5).

La généralisation bi-dimensionnelle ($d = 2$) de (5) a été donnée pour la première fois dans [3]. Elle comporte un terme non local et s'écrit

$$(6) \qquad \begin{cases} \partial_t \zeta + \nabla\cdot\big(h_1 \mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big) = 0, \\ \partial_t \mathbf{v} + (1-\gamma)\nabla\zeta + \dfrac{1}{2}\nabla\Big(\big|\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2 - \gamma\big|\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2\Big) = 0, \end{cases}$$

où $h_1 = 1-\zeta$, $h_2 = 1+\delta\zeta$, et l'opérateur $\mathfrak{R}[\zeta]$, qui contient les effets non locaux, est défini comme suit.

Définition 2. Soit $\gamma \in [0,1)$, $,\delta > 0$ et $\zeta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ tel que

$$\big|\frac{1-\gamma}{\gamma+\delta}\delta\zeta\big|_\infty < 1.$$

L'opérateur $\mathfrak{R}[\zeta]$ est alors défini par

$$\mathfrak{R}[\zeta]: \begin{array}{lcl} L^2(\mathbb{R}^d)^d & \to & L^2(\mathbb{R}^d)^d \\ \mathbf{u} & \mapsto & \mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{u} := \dfrac{1}{\gamma+\delta}\big(1-\Pi(\dfrac{1-\gamma}{\gamma+\delta}\delta\zeta\Pi\cdot)\big)^{-1}\Pi\big(h_2\mathbf{u}\big), \end{array}$$

où $h_2 = 1+\delta\zeta$, et $\Pi := \frac{\nabla\nabla^T}{\Delta}$ désigne le projecteur orthogonal sur les champs de gradients dans $L^2(\mathbb{R}^d)^d$.

Remarque 2. L'hypothèse $\left|\frac{1-\gamma}{\gamma+\delta}\delta\zeta\right|_\infty < 1$ permet de définir $(1-\Pi(\frac{1-\gamma}{\gamma+\delta}\delta\zeta\Pi\cdot))^{-1}$ par sa série de Neumann :

$$\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{u} = \frac{1}{\gamma+\delta}\sum_{n=0}^{\infty}\big(\Pi(\frac{1-\gamma}{\gamma+\delta}\delta\zeta\Pi\cdot)\big)^n\Pi(h_2\mathbf{u}). \tag{7}$$

Noter aussi que lorsque $d=1$, on a $\Pi = 1$ et

$$\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{u} = \frac{h_2}{\delta h_1+\gamma h_2}\mathbf{u},$$

de telle sorte que (6) et (5) coïncident alors comme attendu.

En fait l'opérateur $\mathfrak{R}[\zeta]$ apparait quand on cherche (par une méthode BKW après réduction à un domaine plat par un difféomorphisme convenable) une solution approchée :

$$\underline{\Phi}_{app} = \Phi^{(0)} + \mu_2\Phi^{(1)},$$

au problème elliptique linéaire qui conduit à la définition de $\mathbf{H}^{\mu,\delta}$.

Le raccord de la condition aux limites en $z=-1$ conduit à la restriction

$$\nabla\cdot(h_2\nabla\Phi^{(0)}) = -\delta\nabla\cdot(h_1\nabla\psi_1),$$

qui implique que $\Pi(h_2\nabla\Phi^{(0)}) = \Pi(-\delta h_1\nabla\psi_1)$.

Remarque 3. On peut montrer [3] que $\nabla\cdot(h_1\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}) = \nabla\cdot(h_2\mathbf{v})$ quand $\gamma=0$ et $\delta=1$. Le système (6) dégénère alors en le système de Saint-Venant (shallow-water) en $2D$ qui ne comprend pas de termes non locaux. Ceux-ci sont donc spécifiques des ondes *internes*. De plus, V. Duchêne a montré récemment [10] qu'ils sont une conséquence de l'hypothèse de toit rigide. Il obtient, dans le cas d'une surface supérieure libre, un système hyperbolique (sous certaines conditions) *local* qui tend formellement vers (6) quand l'amplitude de l'onde supérieure tend vers zéro.

2. Le problème de Cauchy pour le système SW/SW

2.1. Le cas $d=1$. Soit $f(\zeta)$ définie par

$$f(\zeta) = \frac{h_1h_2}{\delta h_1+\gamma h_2}. \tag{8}$$

On vérifie que (5) s'écrit alors sous la forme conservative

$$\begin{cases} \partial_t\zeta + \partial_x\big(f(\zeta)\mathbf{v}\big) = 0, \\ \partial_t\mathbf{v} + (1-\gamma)\partial_x\zeta + \dfrac{1}{2}\partial_x\big(f'(\zeta)\mathbf{v}^2\big) = 0. \end{cases} \tag{9}$$

Un calcul simple mais fastidieux montre par ailleurs que le système (5) peut se mettre sous la forme “quasi-linéaire” :

$$\partial_t U + A(U)\partial_x U = 0, \qquad U = (\zeta, \mathbf{v})^T, \tag{10}$$

avec

$$A(U) = \begin{pmatrix} a(U) & b(\zeta) \\ c(U) & a(U) \end{pmatrix}$$

et

$$a(U) = f'(\zeta)\mathbf{v}, \qquad b(\zeta) = f(\zeta), \qquad c(U) = (1-\gamma) + \frac{1}{2}f''(\zeta)\mathbf{v}^2, \tag{11}$$

Les deux formulations sont équivalentes.

On vérifie que (10) est strictement hyperbolique pourvu que

$$\begin{cases} \inf_{\mathbb{R}}(1-\zeta) > 0, \\ \inf_{\mathbb{R}}(1+\delta\zeta) > 0, \\ \inf_{\mathbb{R}}\big[1-\gamma(1+\delta\dfrac{(1+\delta)^2}{(\delta+\gamma-\delta(1-\gamma)\zeta)^3}\mathbf{v}^2)\big] > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Les deux premières conditions (pas de cavitation) sont les contre-parties exactes de la condition d’hyperbolicité du système de Saint-Venant. La troisième condition peut s’interpréter comme une “trace" des éventuelles instabilités de Kelvin-Helmholtz dans le système à deux couches (voir [15] et [16]).

Le théorème suivant s’obtient en utilisant les méthodes classiques des systèmes hyperboliques quasi-linéaires symétrisables mais nous indiquons quand même les étapes de la preuve qui servent de cadre au cas bi-dimensionnel (voir [11] pour des détails).

Théorème 1. *Soit $\delta > 0$ et $\gamma \in [0,1)$. Soit aussi $t_0 > 1/2$, $s \geq t_0 + 1$ et $U^0 = (\zeta^0, \mathbf{v}^0)^T \in H^s(\mathbb{R})^2$ tels que (12) est satisfaite. Alors*
- *Il existe $T_{max} > 0$ et une unique solution maximale $U = (\zeta, \mathbf{v})^T \in C([0, T_{max}); H^s(\mathbb{R})^2)$ de (5) satisfaisant (12) sur $[0, T_{max})$ et avec condition initiale U^0 ;*
- *Cette solution satisfait la conservation de l’énergie sur $[0, T_{max})$:*

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}}[(1-\gamma)\zeta^2 + v^2 f(\zeta)]dx = 0,$$

  avec $f(\zeta)$ comme dans (8).
- *Si $T_{max} < \infty$ alors $\lim_{t\to T_{max}}|U(t)|_{W^{1,\infty}} = \infty$ ou bien l’une des trois conditions de (12) cesse d’être vérifiée quand $t \to T_{max}$.*

Démonstration. **Etape 1.** Construction d’un système d’équations régularisées en tronquant les grandes fréquences. Soit χ une fonction paire, régulière, à support compact, définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,\infty)$, égale à 1 dans un voisinage de l’origine. Pour tout $\iota > 0$, on définit l’opérateur χ_ι par

$$\chi_\iota = \chi(\iota D);$$

χ_ι est donc un opérateur régularisant envoyant continûment H^s dans H^r pour tout $s, r \in \mathbb{R}$. La régularisation de (5) est alors définie par

$$\partial_t U^\iota + \chi_\iota\big(A(U^\iota)\chi_\iota(\partial_x U^\iota)\big) = 0. \tag{13}$$

Puisque U^0 satisfait (12), l'application $U \mapsto \chi_\iota(A(U)\chi_\iota(\partial_x U))$ est localement lipschitzienne dans un voisinage de U^0 dans H^s, pour tout $s \geq t_0 > 1/2$. L'existence/unicité d'une solution maximale $U^\iota \in C([0,T^\iota); H^s)$ (avec $T^\iota > 0$) de (13) avec condition initiale U^0 et satisfaisant (12) est donc une conséquence directe du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDO dans les espaces de Banach.
Etape 2. Choix d'un symétriseur. Un choix naturel est :

$$S(U) = \begin{pmatrix} b(\zeta)^{-1} & 0 \\ 0 & c(U)^{-1} \end{pmatrix}.$$

Etape 3. Estimations d'énergie. On les obtient en multipliant l'équation pour $\widetilde{U} = \Lambda^s U^\iota$ (où $\Lambda^s = (I-\Delta)^{\frac{s}{2}}$ par $S(U^\iota)$ en utilisant des estimations de commutateurs.
Etape 4. Convergence de U^ι vers une solution U par une méthode standard de compacité (voir *eg* [19], Chapter 16). La preuve de la condition d'explosion est aussi classique.
Etape 5. La conservation de l'énergie découle de la structure hamiltonienne de (9). En fait, posant

$$H(\zeta, v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} [(1-\gamma)\zeta^2 + v^2 f(\zeta)]dx,$$

on peut écrire (9) sous forme hamiltonienne (qui correspond à (5.24) dans [7])

$$\partial_t U + \mathfrak{J}\nabla H(U) = 0, \tag{14}$$

où $\mathfrak{J}$ est l'opérateur anti-adjoint $\mathfrak{J} = \partial_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

□

Nous renvoyons à [11] pour des conditions d'explosion plus précises. On peut montrer en particulier le résultat suivant (qui a été observé dans les simulations numériques de [11]) :

Corollaire 1. *Sous les hypothèses du Théorème 1, si le temps d'existence maximal T_{max} est fini et si $\gamma > 0$ alors :*
- *$U = (\zeta, \mathbf{v})$ est uniformément borné sur $[0, T_{max}) \times \mathbb{R}$*
- $\lim_{t\to T_{max}} |\partial_x U(t,\cdot)|_\infty = \infty$

Il est possible que la hauteur de l'une des couches s'annule quand $t \to T_{max}$. Dans ce cas, une information supplémentaire peut être donnée sur l'explosion de $\partial_x U(t,\cdot)$:
- *Si* $\lim_{t\to T_{max}} \inf_{\mathbb{R}}(1-\zeta(t,\cdot)) = 0$ *alors* $\lim_{t\to T_{max}} \sup_{\mathbb{R}} \partial_x \mathbf{v}(t,\cdot) = \infty$.
- *Si* $\lim_{t\to T_{max}} \inf_{\mathbb{R}}(1+\delta\zeta(t\cdot)) = 0$ *alors* $\lim_{t\to T_{max}} \inf_{\mathbb{R}} \partial_x \mathbf{v}(t,\cdot) = -\infty$.

Remarque 4. Il est bien sûr possible d'avoir un choc sur la vitesse sans annulation de la hauteur d'une des couches. Ce scenario est aussi observé dans les simulations numériques.

Remarque 5. Nous renvoyons également à [11] pour la preuve que, sous les hypothèses du Théorème 1, on a toujours $T_{max} < \infty$ pour *la plupart* des données initiales $U^0 \neq (0,0)$ à support compact. Cela résulte du fait que le domaine dans lequel le système est *vraiment non linéaire* est un “gros" sous-ensemble du domaine de stricte hyperbolicité.

2.2. **Le cas bi-dimensionnel.** Nous résumons d'abord dans un lemme des propriétés utiles de l'opérateur $\mathfrak{R}[\zeta]$ (voir [11] pour les preuves).

Lemme 1. *Soit* $\gamma \in [0,1)$, $\delta > 0$ *et* $t_0 > 1$. *Supposons aussi que* $\zeta \in H^s(\mathbb{R}^2)$, *avec* $s \geq t_0 + 1$, *et satisfasse*

$$\inf_{\mathbb{R}}(1 - |\zeta|_\infty) > 0 \quad \textit{and} \quad \inf_{\mathbb{R}}(1 - \delta|\zeta|_\infty) > 0.$$

Alors, pour tout $\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$, *on a*

$$\nabla \cdot \mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v} = \delta \frac{\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v}}{\delta h_1 + \gamma h_2} \cdot \nabla\zeta + \frac{h_2}{\delta h_1 + \gamma h_2} \nabla \cdot \mathbf{v}$$

et, pour $j = 1, 2$,

$$\partial_j\big(\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big) = \delta\mathfrak{R}[\zeta]\big(\frac{\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v}}{h_2}\partial_j\zeta\big) + \mathfrak{R}[\zeta]\partial_j\mathbf{v}.$$

De plus, pour tout $\mathbf{v} \in L^2(\mathbb{R}^2)^2$,

$$|\mathfrak{R}[\zeta](\frac{\mathbf{v}}{h_2}) - \frac{1}{\delta h_1 + \gamma h_2}\Pi\mathbf{v}|_2 \leq C\big(\frac{1}{\gamma + \delta - \delta(1-\gamma)|\zeta|_\infty}, \delta(1-\gamma)|\zeta|_{H^{t_0+1}}\big)|\Pi\mathbf{v}|_{H^{-1}}.$$

Remarque 6. La première partie du Lemme montre comment les opérateurs divergence et dérivation agissent sur $\mathfrak{R}[\zeta]$.

La seconde partie montre que $\mathfrak{R}[\zeta]$ agit sur les champs de gradient comme un opérateur local modulo un terme plus régulier. Nous rappelons qu'en dimension un, $\mathfrak{R}[\zeta](\frac{\mathbf{v}}{h_2}) = \frac{1}{\delta h_1 + \gamma h_2}\mathbf{v}$.

Il est plus délicat quand $d = 2$ de mettre (6) sous une forme quasi-linéaire à cause de la présence du terme non local $\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}$. On peut cependant écrire (6) sous la forme :

$$\partial_t U + A^j[U]\partial_j U = 0, \qquad U = (\zeta, \mathbf{v})^T, \tag{15}$$

où

$$A^j[U] = \begin{pmatrix} a^j(U) & \mathbf{b}^j(U)^T \\ \mathbf{c}^j[U] & D^j[U] \end{pmatrix}, \qquad (j = 1, 2),$$

et

$$a^j(U) = (\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v})_j - \gamma(\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v})_j \frac{h_2}{\delta h_1 + \gamma h_2}, \tag{16}$$

$$\mathbf{b}^j(U) = \frac{h_1 h_2}{\delta h_1 + \gamma h_2}\mathbf{e}^j, \tag{17}$$

$$\mathbf{c}^j[U]\bullet = \mathbf{e}^j - \gamma\Big[\mathbf{e}^j + \delta(\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v})_j\mathfrak{R}[\zeta]\big(\frac{\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v}}{h_2}\bullet\big)\Big], \tag{18}$$

$$D^j[U]\bullet = (\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v})_j\mathrm{Id}_{2\times 2} - \gamma(\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v})_j\mathfrak{R}[\zeta]\bullet, \tag{19}$$

où

$$\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v} = \mathbf{v} + (1-\gamma)\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v} \tag{20}$$

On peut alors démontrer, en utilisant en particulier le Lemme 1 :

Proposition 1 (Le cas $d = 2$). *Soit $T > 0$, $t_0 > 1$ et $s \geq t_0 + 1$. Soit aussi $U = (\zeta, v) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)^3)$ tel que pour tout $t \in [0,T]$,*

$$(1 - |\zeta(t,\cdot)|_\infty) > 0 \quad \textit{and} \quad (1 - \delta|\zeta(t,\cdot)|_\infty) > 0 \quad \text{et} \quad \text{curl } \mathbf{v}(t,\cdot) = 0.$$

Alors U résoud (6) si et seulement si U résoud (15).

Remarque 7. Le système (15) n'est pas *stricto sensu* un système quasi-linéaire puisque $\mathbf{c}^j[U]$ (resp. $D^j[U]$) n'est pas une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (resp. à valeurs dans les matrices 2×2) mais un opérateur linéaire défini sur l'espace des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ (resp. les matrices 2×2). Cependant, ces opérateurs sont d'ordre zéro et, comme nous le verrons plus bas, (15) peut être traité en gros comme un système quasi-linéaire.

On montre par ailleurs qu'une solution de (15) qui est initialement à rotationnel nul le reste sur son temps d'existence :

Proposition 2. *Soit $T > 0$, $t_0 > 1$ et $s \geq t_0 + 1$. Soit aussi $U = (\zeta, \mathbf{v}) \in C([0,T]; H^s(\mathbb{R}^2)^3)$ une solution de (15) telle que curl $\mathbf{v}(0,.) = 0$. Alors curl $\mathbf{v}(t,.) = 0$ pour tout $t \in [0,T]$.*

Démonstration. En utilisant la relation curl $\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v} = 0$, on vérifie que la variable $\mathbf{v}$ dans le système (6) satisfait l'équation

$$\partial_t \mathbf{v} + \nabla F - (\text{curl } \mathbf{v})(\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v})^\perp = 0, \tag{21}$$

où

$$F = (1 - \gamma\zeta) + \frac{1}{2}\Big(\big|\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2 - \gamma\big|\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2\Big).$$

Soit $\omega = \text{curl } \mathbf{v}$. On montre ensuite que ω satisfait

$$\partial_t \omega + \text{curl } [\omega(\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v})^T] = 0 \tag{22}$$

Multipliant par ω et intégrant sur $\mathbb{R}^2$ utilisant le fait que $\nabla(\mathbf{v} - \gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}) \in L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)$, on obtient après intégration par parties

$$\frac{d}{dt}|\omega(t,.)|_2^2 \leq C\int_0^t |\omega(s,.)|_2^2 ds,$$

et on conclut par le lemme de Gronwall. □

Nous passons maintenant à l'étude du problème de Cauchy local pour le système SW/SW bi-dimensionnel (6).

Les conditions suivantes généralisent les conditions d'hyperbolicité du cas mono-dimensionnel.

$$\begin{cases} 1 - |\zeta|_\infty > 0, \\ 1 - \delta|\zeta|_\infty > 0, \\ 1 - \gamma - \gamma\delta\dfrac{|\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v}|_\infty^2}{\gamma + \delta - \delta(1-\gamma)|\zeta|_\infty} > 0, \end{cases} \tag{23}$$

avec $\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v}$ comme dans (20).

Le résultat principal est le suivant

Théorème 2. *Soit $\delta > 0$ and $\gamma \in [0,1)$. Soit aussi $t_0 > 1$, $s \geq t_0 + 1$ et $U^0 = (\zeta^0, \mathbf{v}^0)^T \in H^s(\mathbb{R}^2)^3$ tels que (23) soit satisfaite et* $\operatorname{curl} \mathbf{v}^0 = 0$. *Il existe alors $T_{max} > 0$ et une unique solution maximale $U = (\zeta, \mathbf{v})^T \in C([0, T_{max}); H^s(\mathbb{R}^2)^3)$ de (6) avec donnée initiale U^0. De plus, si $T_{max} < \infty$, alors au moins l'une des conditions suivantes est satisfaite :*

(i) $\lim_{t \to T_{max}} |U(t)|_{H^{t_0+1}} = \infty$

(ii) *L'une des trois conditions de (23) est violée quand $t \to T_{max}$.*

Démonstration. La preuve est calquée sur celle des systèmes hyperboliques quasi-linéaires symétrisables (voir le cas de la dimension un). Nous indiquons les étapes principales en insistant sur les difficultés spécifiques à la dimension deux (voir [11] pour les détails).

Etape 1. Equations régularisées. Cette étape est standard, on obtient un système approché de dimension finie en tronquant les grandes fréquences comme en dimension un.

Etape 2. Choix d'un symétriseur. On cherche $S[U]$ sous la forme

$$S[U] = \begin{pmatrix} s_1(U) & 0 \\ 0 & S_2[U] \end{pmatrix}, \tag{24}$$

avec $s_1(\cdot) : H^s(\mathbb{R}^2)^3 \mapsto H^s(\mathbb{R}^2)$ et $S_2[U]$ opérateur linéaire envoyant $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ dans lui-même. Définissant $C[U]$ par

$$\forall \widetilde{\mathbf{v}} = (\widetilde{\mathbf{v}}_1, \widetilde{\mathbf{v}}_2)^T \in L^2(\mathbb{R}^2)^2, \qquad C[U]\widetilde{\mathbf{v}} = \mathbf{c}_1[U]\widetilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{c}_2[U]\widetilde{\mathbf{v}}_2,$$

une généralisation naturelle du cas (local) de la dimension un consisterait à prendre $s_1(U) = b(U)^{-1}$ and $S_2[U] = C[U]^{-1}$; malheureusement, un tel choix n'est pas possible car l'opérateur $C[U]$ n'est pas auto-adjoint. Il s'avère cependant que $C[U]$ est auto-adjoint (modulo un terme régularisant) sur la restriction de $L^2(\mathbb{R}^2)^2$ aux champs de gradients, comme le montre le lemme ci-dessous.

Nous devons d'abord définir l'opérateur $C_1[U]$ par

$$C_1[U] = (1-\gamma)\mathrm{Id} + \frac{1}{2}\delta\gamma \begin{pmatrix} c_1[U] + c_1[U]^* & 0 \\ 0 & c_1[U] + c_1[U]^* \end{pmatrix}, \tag{25}$$

avec $c_1[U] : L^2(\mathbb{R}^2) \to L^2(\mathbb{R}^2)$ donné par

$$c_1[U] = \frac{1}{\delta h_1 + \gamma h_2}(2\mathfrak{S}_1\mathfrak{S}_2\Pi(\mathbf{e}^2\cdot)_1 + \mathfrak{S}_1^2\Pi(\mathbf{e}^1\cdot)_1 + \mathfrak{S}_2^2\Pi(\mathbf{e}^2\cdot)_2), \tag{26}$$

et où $\mathfrak{S}_j = (\mathfrak{S}[\zeta]\mathbf{v})_j$.

Enonçons alors le

Lemme 2. *Soit $t_0 > 1$ et $U = (\zeta, \mathbf{v}) \in H^{t_0+1}(\mathbb{R}^2)^3$ tels que (23) est satisfaite. On définit aussi $C_1[U]$ comme dans (25) et on pose $C_2[U] = C[U] - C_1[U]$. Pour tout $\widetilde{\zeta} \in L^2(\mathbb{R}^2)$, on a*

$$|C_2[U]\nabla\widetilde{\zeta}|_2 \leq \mathfrak{c}(U)|\widetilde{\zeta}|_2.$$

On choisit maintenant les coefficients $s_1[U]$ et $S_2[U]$ du symétriseur $S[U]$ donné par (24) comme suit

$$s_1(U) = b(U)^{-1}, \tag{27}$$

$$S_2[U] = C_1[U]^{-1}. \tag{28}$$

On vérifie alors que $C_1[U]$ est inversible dans $\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^2)^2; L^2(\mathbb{R}^2))$.

L'opérateur $S[U]$ serait alors un bon “symétriseur" si $S[U]A^j[U]$ $(j = 1, 2)$ étaient symétriques, ce qui n'est malheureusement pas le cas. Cependant, on peut montrer que $\Pi S[U]A^j[U]\Pi$, où Π dénote comme précedemment la projection sur les champs de gradients, est symétrique à l'ordre principal.

Etape 3. Estimations d'énergie. Elles sont délicates. On utilise diverses propriétés des coefficients des matrices $A^j[U]$ et des estimations de commutateurs (voir par exemple [14], Theorem 6).

Etape 4. Convergence des solutions approchées. On obtient d'abord la convergence vers l'unique solution de (15) qui se trouve être aussi l'unique solution de (6) puisqu'on a supposé que curl $\mathbf{v}_0 = 0$.

Etape 5. Condition d'explosion. Elle résulte d'un argument de continuation standard.

$\square$

Remarque 8. Nous ignorons si (6) possède une énergie conservée ou une structure hamiltonienne. L'existence de solutions à temps de vie finie, quoique hautement attendue est également inconnue.

3. Remarques finales

3.1. **Simulations numériques.** Comme indiqué plus haut on trouvera dans [11] des simulations numériques sous des conditions périodiques en x et y, et utilisant une méthode pseudo-spectrale. C'est un choix naturel pour le calcul de l'opérateur non local $\mathfrak{R}[\zeta]$ puisque chaque terme dans sa série de Neumann (7) est une concaténation de multiplicateurs de Fourier (à travers l'opérateur Π) avec ζ.

3.2. **Extensions : toit non rigide ; bathymétrie non triviale ; effets de tension de surface.** Une extension naturelle, (en vue d'applications à des problèmes d'océanographie) des résultats précédents est de considérer le cas d'une surface libre au lieu d'un toit rigide et/ou le cas d'un fond non plat (bathymétrie non triviale). Nous avons déjà mentionné le travail de V. Duchêne [10] qui traite la première situation. Des modèles asymptotiques pour des ondes internes avec bathymétrie non triviale sont établis dans [10] et [9].

L'effet principal de la tension de surface sur le système à deux couches est d'empêcher l'apparition d'instabilités de Kelvin-Helmholtz. Dans le problème voisin d'écoulements de cisaillement plan (voir [5] et l'Introduction), en notant σ le coefficient de tension de surface, l'interface plane pour des écoulements de vitesses horizontales constantes U_1 and U_2 ne développe pas d'instabilités pour des perturbations de vecteurs d'onde $\mathbf{k}$ tels que (comparer à (4)) :

$$\frac{\rho_1\rho_2}{(\rho_1+\rho_2)^2}(U_1-U_2)^2 < g|\mathbf{k}|\{\frac{\alpha_2-\alpha_1}{|\mathbf{k}|}+\frac{|\mathbf{k}|\sigma}{g(\rho_1+\rho_2}\}. \tag{29}$$

En particulier, il n'y a pas d'instabilités de Kelvin-Helmholtz quand σ est assez grand pour assurer que

$$(U_1-U_2)^2 < \frac{2}{\alpha_1\alpha_2}\sqrt{\frac{\sigma g(\alpha_2-\alpha_1)}{\rho_1+\rho_2}}. \tag{30}$$

Revenant au système à deux couches (1), on vérifie que la tension de surface ajoute un terme $-\frac{\sigma}{\rho_2}\nabla K(\widetilde{\zeta})$ au membre de gauche de la deuxième équation de (1), où $K(\widetilde{\zeta}) = (\frac{\nabla\widetilde{\zeta}}{\sqrt{1+|\nabla\widetilde{\zeta}|^2}})$.

En fait, dans les applications en océanographie, les effets de tension de surface sont très faibles et peuvent être négligés dans la dérivation des modèles asymptotiques (ils apparaissent comme effets du second ordre). Dans des situations où ils sont petits mais du même ordre que les "petits" paramètres intervenant dans les développements asymptotiques (les ε ou les μ) il faut ajouter un terme de "capillarité" cubique dans l'équation de $\mathbf{v}$ (voir [9] où divers régimes sont considérés). Dans le cas du régime SW/SW par exemple, (6) doit être remplacé par

(31)
$$\begin{cases} \partial_t\zeta + \nabla\cdot\big(h_1\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big) = 0, \\ \partial_t\mathbf{v} + (1-\gamma)\nabla\zeta + \frac{1}{2}\nabla\Big(\big|\mathbf{v}-\gamma\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2 - \gamma\big|\mathfrak{R}[\zeta]\mathbf{v}\big|^2\Big) - \sqrt{\mu}\nu\Delta\nabla\zeta = 0, \end{cases}$$

où $\nu = \frac{\sigma}{\rho_2\lambda^2}$.

3.3. **Justification rigoureuse du système SW/SW.** L'analyse précédente ne justifie pas complèment le système SW/SW. La notion de consistance que nous avons utilisée n'est pas une notion dynamique (voir l'analogie avec la notion de consistance des schémas aux différences finies...).

Une justification complète des modèles asymptotiques suppose que l'on établisse que le système à deux couches (avec petite tension de surface) possède des solutions satisfaisant des estimations uniformes sur des échelles de temps convenables et que les systèmes asymptotiques aient aussi des solutions (également sur des échelles de temps correctes). Enfin, il faut établir l'analyse de stabilité des modèles asymptotiques (c'est à dire une estimation des termes de reste qui apparaissent quand on fait la différence entre les solutions du système à deux couches et des modèles asymptotiques).

Un tel programme pour les ondes de surface a été essentiellement achevé par B. Alvarez-Samaniego et D. Lannes dans [1]. Dans le contexte des ondes internes, le premier résultat dans cette direction est celui de Ohi et Iguchi [18] qui démontrent que le système à deux couches avec tension de surface est localement bien posé en $1D$, le temps d' existence tendant vers zéro quand le coefficient de tension de surface tend vers zéro. Ils justifient cependant rigoureusement l'équation de Benjamin-Ono dans cette situation.

Par ailleurs, dans le travail récent [15] que nous avons déjà mentionné, D. Lannes a montré que le système à deux couches avec tension de surface est bien posé, ce qui conduit à la justification des modèles asymptotiques. Plus précisément, il introduit un *critère de stabilité* qui généralise le critère classique de Taylor pour les ondes de surface. Ce critère de stabilité (ou une version "pratique" de celui-ci) assure l'existence d'une solution dont le temps de vie ne se réduit pas à zéro quand le coefficient de tension de surface tend vers zéro, et qui est uniformément minoré par rapport aux paramètres physiques ϵ et μ. Cela conduit en particulier à la justification complète du système SW/SW sans terme de tension de surface (6). La présence de la tension de surface est cependant nécessaire pour assurer *l'existence* de solutions au système à deux couches, bornées dans des normes convenables sur des échelles de temps pertinentes. Le résultat de [15] dit que ces solutions sont bien approchées par celles de (6).

3.4. **Ecoulements non irrotationnels.** Dans [4] D. Bresch et M. Renardy ont récemment étudié un système bi-dimensionnel de type SW/SW qui relaxe l'hypothèse d'irrotationnalité faite dans [11].

Références

[1] B. Alvarez-Samaniego and D. Lannes, *Large time existence for 3D water-waves and asymptotics*, Inventiones Math. **171** (2008), 485-541.

[2] T.B.Benjamin and T.J.Bridges, *Reappraisal of the Kelvin-Helmholtz problem.Part I. Hamiltonian structure*, J. Fluid Mech. **333** (1997) 301-325.

[3] J. Bona, D. Lannes, and J.-C. Saut, *Asymptotic models for internal waves*, J. Math. Pures Appl. **89** (2008) 538-566.

[4] D. Bresch and M. Renardy, *Well-posedness of two-layer shallow water flow between two horizontal rigid plates*, preprint 2010.

[5] S. Chandrasekhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford : Clarendon Press (1961).

[6] W. Choi and R. Camassa, *Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system*, J. Fluid Mech. **396** (1999) 1-36.

[7] W. Craig, P. Guyenne and H. Kalisch, *Hamiltonian long-wave expansions for free surfaces and interfaces*, Comm. Pure. Appl. Math. **58** (2005) 1587-1641.

[8] W. Craig, C. Sulem, and P.-L. Sulem, *Nonlinear modulation of gravity waves : a rigorous approach*, Nonlinearity **5** (1992), 497-522.

[9] Cung The Anh, *Influence of surface tension and bottom topography on internal waves*, M3AS, **19**, 12 (2009), 2145-2175.

[10] V. Duchêne, *Asymptotic shallow water models for internal waves in a two-fluid system with a free surface*, arXiv : 0906.0839 (June 2009).

[11] P. Guyenne, D. Lannes and J.-C. Saut, *On the Cauchy problem for a nonlocal system modelling large amplitudes internal waves*, Nonlinearity **23** (2010), 237-275.

[12] T.Y. Hou and P. Zhang, *Growth rates for the linearized motion of 3-D fluid interfaces with surface tension far from equilibrium*, Asian J. Math.. **2** (1998) 263-288.

[13] T. Iguchi, N. Tanaka, and A. Tani, *On the two-phase free boundary problem for two-dimensional water waves*, Math. Ann. **309** (1997) 199-223.

[14] D. Lannes, *Sharp estimates for pseudo-differential operators with symbols of limited smoothness and commutators*, J. Funct. Anal. **232** (2006) 495-539.

[15] D. Lannes, *A stability criterion for two-fluid interfaces and applications*, arXiv. 1005.4565v1 (May 2010).

[16] D. Lannes and J.-C. Saut, en préparation.

[17] P. Milewski, E. Tabak, C. Turner, R. Rosales, and F. Menzaque, *Nonlinear stability of two-layer flows*, Commun. Math. Sci. **2** (2004) 427-442.

[18] K. Ohi and T. Iguchi, *A two-phase problem for capillary-gravity waves and the Benjamin-Ono equation*, Disc. Cont. Dyn. Systems A, **23**, 4 (2009), 1205-1240.

[19] M. E. Taylor, *Partial differential equations. III. Nonlinear equations*, Corrected reprint of the 1996 original. Applied Mathematical Sciences, **117**. Springer-Verlag, New York, 1997.

[20] V.E.Zakharov, *Stability of periodic waves of finite amplitude on the surface of a deep fluid*, J. Appl. Mech. Tech. Phys.**2** (1968) 190-194.

Laboratoire de Mathématiques, UMR 8628,, Université Paris-Sud et CNRS,, 91405 Orsay, France

E-mail address: jean-claude.saut@math.u-psud.fr