Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE
Equations aux Dérivées Partielles
2006-2007

Benjamin Texier et Kevin Zumbrun

Bifurcation de Hopf d'ondes de choc pour les équations de Navier-Stokes compressible

Séminaire É. D. P. (2006-2007), Exposé n° IX, 22 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_2006-2007____A9_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram
Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
http://www.cedram.org/

Bifurcation de Hopf d'ondes de choc pour les équations de Navier-Stokes compressible

Benjamin Texier* et Kevin Zumbrun†

Les ondes dites galopantes sont des ondes de détonation qui oscillent périodiquement en temps au cours de leur propagation dans un mélange réactif gazeux. Nous montrons qu'une hypothèse spectrale de type bifurcation de Hopf permet de décrire ce phénomène, pour une classe de systèmes hyperboliques-paraboliques, qui contient en particulier les équations de Navier-Stokes compressible.

1 Introduction

Ce texte présente une partie des résultats de l'article [TZ3], dans lequel nous étendons les résultats de [TZ1] et [TZ2].

Les ondes dites galopantes sont des ondes de détonation qui oscillent périodiquement en temps au cours de leur propagation dans un mélange réactif gazeux; elles sont observées expérimentalement par exemple pour des chaleurs de réaction élevées [FD].

Nous avons traité la question de la description mathématique de ce phénomène unidimensionnel d'abord pour le système modèle dit de Majda, qui est une version simplifiée des équations de Navier-Stokes avec réaction, puis pour des systèmes de lois de conservations avec viscosité artificielle, et enfin pour des systèmes hyperboliques-paraboliques, en donnant pour chacune de ces classes de systèmes des résultats d'existence et d'unicité de solutions périodiques dans un voisinage d'une famille d'ondes progressives [TZ1, TZ2, TZ3].

Nous considérons ici, comme dans [TZ3], une famille de systèmes hyperboliques-paraboliques dépendants d'un paramètre de bifurcation, et montrons

*Institut de Mathématiques de Jussieu, Université Paris Diderot (Paris 7) et UMR CNRS 7586; texier@math.jussieu.fr: Research of B.T. was partially supported under NSF grant number DMS-0505780.

†Indiana University, Bloomington, IN 47405; kzumbrun@indiana.edu: Research of K.Z. was partially supported under NSF grant number DMS-0300487.

qu'une hypothèse spectrale de type bifurcation de Poincaré-Hopf permet de décrire les ondes galopantes. L'objet de ce travail est donc, à partir d'une hypothèse sur l'opérateur linéarisé, de prouver l'existence de solutions périodiques pour les équations non-linéaires. L'opérateur linéarisé en question est issu de la linéarisation du système d'équations autour d'une famille d'ondes progressives. Le fait que, pour un tel opérateur, la distance dans le plan complexe entre l'origine et le spectre essentiel soit nulle (*absence of spectral gap*) rend impossible la construction classique d'une variété centrale. Nous surmontons cette difficulté en effectuant une réduction de Lyapunov-Schmidt, à partir d'une description précise de la fonction de Green de l'opérateur linéarisé, à la suite de [ZH] et [MaZ].

La question de la vérification de cette hypothèse spectrale a été étudiée numériquement dans [KS], par des développements formels dans [BMR], et par l'étude de fonctions d'Evans dans [LyZ1, LyZ2].

En plus de cette hypothèse spectrale, nous faisons des hypothèses de structure, qui sont satisfaites par les équations de Navier-Stokes compressible et par les équations de la magnétohydrodynamique. Il serait naturel de chercher à étendre la validité du résultat que nous prouvons ici au système de Navier-Stokes avec réaction.

Mentionnons enfin deux approches différentes pour l'étude de bifurcations vers des solutions périodiques en l'absence de trou spectral, par Kunze et Schneider [KuS] et Sandstede et Scheel [SS].

2 Hypothèses et énoncé du théorème

Soit une famille à un paramètre de lois de conservations, en une dimension d'espace et avec viscosité partielle:

$$\begin{aligned} &\partial_t u_1 + \partial_x F_1(\varepsilon, u) = 0, \\ &\partial_t u_2 + \partial_x F_2(\varepsilon, u) = \partial_x(b(\varepsilon, u)\partial_x u_2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

L'inconnne $u := (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r$ dépend du temps $t \in \mathbb{R}_+$, de la position $x \in \mathbb{R}$, et du paramètre réel $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, pour un certain $\varepsilon_0 > 0$. Le flux $F := (F_1, F_2)$ et la matrice de viscosité b sont supposés assez réguliers, c'est-à-dire $\mathcal{C}^{k_0}$, avec $k_0 \geq 5$. On suppose connue une famille de solutions stationnaires $u(x,t) = \bar{u}^\varepsilon(x) = (\bar{u}_1^\varepsilon, \bar{u}_2^\varepsilon)(x)$ de (2.1), qui satisfont

$$\lim_{x \to \pm\infty} \bar{u}^\varepsilon(x) = u_\pm^\varepsilon \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Concernant la structure du système (2.1), nous faisons les hypothèse suivantes:

(A1) Le flux F_1 est une fonction linéaire de u :

$$F_1(\varepsilon,u) = F_{11}(\varepsilon)u_1 + F_{12}(\varepsilon)u_2 \in \mathbb{R}^{n-r},$$

et pour tous $(\varepsilon,u) \in (-\varepsilon_0,\varepsilon_0)\times\mathbb{R}^n$, la matrice $b(\varepsilon,u)\in\mathbb{R}^{r\times r}$ est de rang r.

(A2) Il existe une application $\mathcal{C}^{k_0}$

$$(\varepsilon,u)\mapsto A^0(\varepsilon,u) = \begin{pmatrix} A^0_{11}(\varepsilon,u) & 0 \\ 0 & A^0_{22}(\varepsilon,u)\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

à valeurs définies positives, telle que $A^0_{11}F_{11}$ soit symétrique et $A^0 b$ soit définie positive, pour tous ε, u.

Nous faisons de plus les hypothèses suivantes sur les états à l'infini $u^\varepsilon_\pm$ et sur les limites en $\pm\infty$ de l'opérateur linéarisé autour de $\bar u^\varepsilon$:

(H1) Le spectre de $F_{11}(\varepsilon)$ est réel, semi-simple, non nul, et de multiplicité indépendante de ε.

(H2) Le spectre de la matrice

$$A^\varepsilon_\pm := \begin{pmatrix} F_{11}(\varepsilon) & F_{12}(\varepsilon) \\ \partial_{u_1}F_2(\varepsilon,u^\varepsilon_\pm) & \partial_{u_2}F_2(\varepsilon,u^\varepsilon_\pm)\end{pmatrix},$$

est réel, simple, et non nul, et de multiplicité indépendante de ε.

(H3) Il existe $\theta>0$, tel que, si λ est une valeur propre de $i\xi A^\varepsilon_\pm - \xi^2 B^\varepsilon_\pm$, où $B^\varepsilon_\pm := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon,u^\varepsilon_\pm)\end{pmatrix}$ et $\xi\in\mathbb{R}$, alors $\Re\lambda \le \frac{\theta\xi^2}{1+\xi^2}$.

L'onde stationnaire $\bar u^\varepsilon$ satisfait

$$\begin{pmatrix} 0 \\ b(\varepsilon,u)u_2' \end{pmatrix} = F(\varepsilon,u) + C. \tag{2.3}$$

Les hypothèses **(A1)**, **(A2)** et **(H1)** impliquent en particulier que (2.3) est une équation différentielle résolue en u_2, dont le linéarisé autour de $\bar u^\varepsilon$ s'écrit

$$u_2' = b(\varepsilon,\bar u^\varepsilon)^{-1}a(\varepsilon,\bar u^\varepsilon)u_2, \tag{2.4}$$

où

$$a := \partial_{u_2}F_2(\varepsilon,\bar u^\varepsilon) - \partial_{u_1}F_2(\varepsilon,\bar u^\varepsilon)F_{11}^{-1}F_{12} - (\partial_u b(\varepsilon,\bar u^\varepsilon)\,\cdot)(\bar u^\varepsilon_2)'.$$

D'après (2.2), u_+^ε et u_-^ε sont des points d'équilibre de (2.3), de sorte que $C = F(\varepsilon, u_-^\varepsilon)$. Par ailleurs, un calcul de déterminant par blocs donne $\det A_\pm^\varepsilon = \det F_{11}(\varepsilon) \det a(\varepsilon, u_\pm^\varepsilon)$, et donc d'après **(H1)** et **(H2)**, $\det a(\varepsilon, u_\pm^\varepsilon) \neq 0$, si bien que $\bar{u}^\varepsilon$ converge exponentiellement vers $u_\pm^\varepsilon$ en $\pm\infty$, et $\partial_x^k \bar{u}^\varepsilon$ converge exponentiellement vers 0 en $\pm\infty$, pour $k \leq k_0 + 1$.

Soit $\mathcal{U}_-^\varepsilon$ et $\mathcal{S}_+^\varepsilon$ les variétés instable et stable en $(u_-^\varepsilon)_2$ et $(u_+^\varepsilon)_2$ de (2.3) (vue comme une équation différentielle sur $\mathbb{R}^r$), et U_-^ε et S_+^ε les sous-espaces associés, dont on note d_- et d_+ les dimensions; d_- est donc le nombre de valeurs propres positives de $a(\varepsilon, u_-^\varepsilon)$ et d_+ le nombre de valeurs propres négatives de $a(\varepsilon, u_+^\varepsilon)$. Les hypothèses **(H1)** et **(H2)** et le Lemme 1.2 de [MaZ] impliquent que d_+ et d_- ne dépendent pas de ε, et que

$$n - (i_- + i_+) = r - (d_- + d_+), \tag{2.5}$$

où i_- est le nombre de valeurs propres positives de A_-^ε et i_+ le nombre de valeurs propres négatives de A_+^ε.

Nous faisons l'hypothèse (où T_x désigne l'espace tangent en x):

(H4) (i) $d_- + d_+ = r + 1$, et
(ii) pour tout $u \in \mathcal{U}_-^\varepsilon \cap \mathcal{S}_+^\varepsilon$, $\dim(T_u \mathcal{U}_-^\varepsilon + T_u \mathcal{S}_+^\varepsilon) = r$.

Avec l'égalité (2.5), l'hypothèse **(H4)**(i) peut se lire $i_+ + i_- = n + 1$, et signifie donc que le choc $\bar{u}^\varepsilon$ est de type Lax.

Une orbite globale de (2.3) qui tend vers $(u_\pm^\varepsilon)_2$ en $\pm\infty$ prend ses valeurs sur $\mathcal{U}_-^\varepsilon \cap \mathcal{S}_+^\varepsilon$. L'hypothèse **(H4)**(ii) signifie que l'intersection $\mathcal{U}_-^\varepsilon \cap \mathcal{S}_+^\varepsilon$ est transverse, ce qui implique que $\mathcal{U}_-^\varepsilon \cap \mathcal{S}_+^\varepsilon$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^r$, de codimension égale à

$$\operatorname{codim} \mathcal{U}_-^\varepsilon + \operatorname{codim} \mathcal{S}_+^\varepsilon = r - 1,$$

d'après **(H4)**(i). Remarquons par ailleurs que le caractère autonome de (2.1) implique en particulier que les translatés de $\bar{u}^\varepsilon$ sont tous solutions de (2.3). Une conséquence de **(H4)** est donc

$$\mathcal{U}_-^\varepsilon \cap \mathcal{S}_+^\varepsilon = \{\bar{u}^\varepsilon(x), x \in \mathbb{R}\}, \tag{2.6}$$

c'est-à-dire que l'ensemble des orbites globales de (2.3) qui satisfont (2.2) est l'ensemble des translatés de $\bar{u}^\varepsilon$.

Sous l'hypothèse **(H4)**, pour tout x, $(\bar{u}_2^\varepsilon)'(x)$ génère $T_{\bar{u}_2^\varepsilon(x)} \mathcal{U}_-^\varepsilon \cap T_{\bar{u}_2^\varepsilon(x)} \mathcal{S}_+^\varepsilon$. Soit

$$\{(\bar{u}_2^\varepsilon)'(x), w_1^-(x), \ldots, w_{d_- - 1}^-(x)\}, \tag{2.7}$$

une base de $T_{\bar u_2^\varepsilon(x)}\mathcal{U}_-^\varepsilon$, et

$$\{(\bar u_2^\varepsilon)'(x), w_1^+(x), \dots, w_{d_+-1}^+(x)\}, \tag{2.8}$$

une base de $T_{\bar u_2^\varepsilon(x)}\mathcal{S}_+^\varepsilon$. Alors (d'après **(H4)**(i)) le déterminant

$$\gamma(x) = \det\big((\bar u_2^\varepsilon)', w_1^-, \dots, w_{d_--1}^-, w_1^+, \dots, w_{d_+-1}^+\big)(x), \tag{2.9}$$

est bien défini, et l'hypothèse de transversalité **(H4)**(ii) implique

$$\gamma(x) \neq 0, \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, supposons **(H4)**(i), et soit $\{x \mapsto w_j^-(x)\}_{1\le j\le d_--1}$ une famille d'applications telle que pour tout x, (2.7) est une base de $T_{\bar u_2^\varepsilon(x)}\mathcal{U}_-^\varepsilon$, et une famille d'applications $\{x \mapsto w_k^+(x)\}_{1\le k\le d_+-1}$, telle que pour tout x, (2.8) est une base de $T_{\bar u_2^\varepsilon(x)}\mathcal{S}_+^\varepsilon$. Alors pour tous j, k, w_j^- et w_k^+ sont des solutions de l'équation linéarisée (2.4) qui satisfont $\lim_{-\infty} w_j^- = 0$, et $\lim_{+\infty} w_k^+ = 0$. Le déterminant γ correspondant est un Wronskien; il s'annule identiquement sur $\mathbb{R}$ ou ne s'annule jamais. On en conclut que, sous l'hypothèse **(H4)**(i), si on suppose de plus (2.6), alors la condition algébrique

$$\gamma(x_0) \neq 0, \qquad \text{pour un certain } x_0 \in \mathbb{R},$$

est équivalente à la condition de transversalité **(H4)**(ii).

Soit $L(\varepsilon)$ l'opérateur linéarisé autour de l'onde de référence $\bar u^\varepsilon$:

$$L(\varepsilon)u := -\partial_x(A^\varepsilon u) + \partial_x(B^\varepsilon \partial_x u), \tag{2.10}$$

où

$$A^\varepsilon u := \begin{pmatrix} F_{11}(\varepsilon)u_1 + F_{12}(\varepsilon)u_2 \\ \partial_u F_2(\varepsilon, \bar u^\varepsilon)\cdot u \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ (\partial_u b(\varepsilon, \bar u^\varepsilon)\cdot u)(\partial_x \bar u^\varepsilon)_2 \end{pmatrix},$$

et

$$B^\varepsilon := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b(\varepsilon, \bar u^\varepsilon) \end{pmatrix}.$$

L'opérateur $L(\varepsilon)$ est asymptotiquement constant à l'infini:

$$L(\varepsilon) \to L_\pm(\varepsilon) := \partial_x(A_\pm^\varepsilon \cdot) + \partial_x(B_\pm^\varepsilon \partial_x \cdot), \qquad x \to \pm\infty,$$

où $A_\pm^\varepsilon$ et $B_\pm^\varepsilon$ sont les matrices qui apparaissent dans les énoncés des hypothèses **(H2)** et **(H3)**.

L'hypothèse cruciale pour la description des ondes galopantes est la suivante:

(**PH**) Dans l'intersection d'un voisinage de $\{\Re\lambda \geq 0\} \setminus \{0\}$ avec une assez grande boule centrée en l'origine, l'équation aux valeurs propres de $L(\varepsilon)$ dans L^2,

$$(L(\varepsilon) - \lambda)u = 0,$$

a exactement deux solutions de multiplicité une, $\lambda_\pm = \gamma(\varepsilon) \pm i\tau(\varepsilon)$, avec $\gamma(0) = 0$, $\tau(0) \neq 0$, $\gamma'(0) \neq 0$.

On peut montrer (en bornant la norme de la résolvante par des estimations d'énergie, voir par exemple la Proposition 4.7 de [Z1]) que $L(\varepsilon)$ n'a pas de valeur propre dans un domaine de la forme $\{\Re\lambda \geq -\theta_0, |\lambda| \geq R\}$, où $\theta_0 > 0$ et $R > 0$. Dans l'hypothèse **(PH)**, « assez grande » se réfère donc à R et θ_0. Sous l'hypothèse **(PH)**, nous savons donc que les seules valeurs propres de $L(\varepsilon)$ dans $\{\Re\lambda \geq -\theta_0\} \setminus \{0\}$ sont $(\gamma \pm i\tau)(\varepsilon)$. Par ailleurs, le spectre essentiel est confiné dans un domaine du plan complexe de la forme

$$\{\lambda, \quad \Re\lambda \leq -\theta_1 |\Im\lambda|^2/(C + |\Im\lambda|^2)\},$$

pour $\theta_1 > 0$ et $C > 0$, et donc, pour ε assez petit, les valeurs propres $\lambda_\pm(\varepsilon)$ sont séparées du spectre essentiel.

Etant donnée $\omega(x) > 0$ une fonction poids, on note L^p_ω l'espace des distributions $f \in \mathcal{S}'$ telles que $\omega f \in L^p$. On munit L^2_ω du produit scalaire $(f,g)_{L^2_\omega} := (\omega f, \omega g)_{L^2}$. On note, pour $k \in \mathbb{N}$, H^k_ω l'espace de Sobolev des distributions $f \in \mathcal{S}'$ telles que $\omega\partial_x^j f \in L^2$, pour tout $0 \leq j \leq k$. On note $\|\cdot\|_{k,\omega}$ la norme de H^k_ω, c'est-à-dire

$$\|f\|_{k,\omega} := \sum_{j=0}^{k} \|\omega\partial_x^j f\|_{L^2}.$$

Soit une fonction poids η, telle que pour un certain $\eta_0 > 0$, un certain $C > 0$, et pour $1 \leq k \leq k_0$,

$$1 \leq \eta \leq e^{\eta_0(1+x^2)^{1/2}}, \quad \eta^{-1} \in L^\infty, \quad \eta^{-1}\partial_x^k \eta \in L^\infty, \tag{2.11}$$

$$\eta(x) \leq C\eta(x-y)\eta(y), \qquad \text{pour tous } x, y, \tag{2.12}$$

et

$$\eta^{-2} \in L^1(\mathbb{R}). \tag{2.13}$$

Alors $\|f\|_{s,\eta} \leq C\|\eta f\|_{s,1}$, et pour $s \geq 1$, $\|fg\|_{s,\eta^2} \leq C\|f\|_{s,\eta}\|g\|_{s,\eta}$ par l'inégalité de Moser. Nous allons utiliser les espaces

$$X_1 := H^2_\eta, \qquad X_2 := H^2_\eta \cap \partial_x(H^1_{\eta^2}). \tag{2.14}$$

On définit une norme sur X_2 par

$$\|\partial_x f\|_{X_2} := \|\partial_x f\|_{2,\eta} + \|f\|_{1,\eta^2}. \tag{2.15}$$

Enfin, étant donnés deux espaces de Banach X et Y, on note $\mathcal{L}(X,Y)$ l'espace des applications continues de X vers Y, normé par $\|f\|_{\mathcal{L}(X,Y)} := \sup_{\|u\|_X=1} \|f(u)\|_Y$; $\mathcal{L}(X)$ désigne $\mathcal{L}(X,X)$.

Théorème 2.1. *Soit $\bar{u}^\varepsilon$ et* (2.1) *une famille d'ondes stationnaires et de systèmes satisfaisants les hypothèses* **(A1)-(A2)**, **(H1)-(H4)** *et* **(PH)**. *Pour $\eta_0 > 0$ assez petit, il existe $C > 0$ et $r_0 > 0$, tels que si η est une fonction poids satisfaisant* (2.11), (2.12) *et* (2.13), *il existe deux fonctions continues $r \to \varepsilon(r)$, $r \to T(r)$, définies sur $(-r_0, r_0)$, telles que $\varepsilon(0) = 0$, $T(0) = 2\pi/\tau(0)$, et une famille de solutions globales $\{u^r\}_{|r|<r_0}$ de* (2.1) *pour les valeurs $\varepsilon = \varepsilon(r)$ du paramètre de bifurcation, telles que pour tout $|r| < r_0$, u^r est $T(r)$-périodique en t, et, pour tout $t \geq 0$,*

$$C^{-1}r \leq \|u^r(\cdot,t) - \bar{u}^{\varepsilon(r)}\|_{2,\eta} \leq Cr. \tag{2.16}$$

Le Théorème 2.1 n'est *pas* un résultat d'instabilité asymptotique de la famille d'ondes stationnaires $\bar{u}^\varepsilon$. L'estimation (2.16) signifie en effet que l'onde galopante u^r est assez loin, *pour tout temps*, de la solution stationnaire $u^{\varepsilon(r)}$. (On peut cependant montrer directement que, pour $\varepsilon > 0$, la solution stationnaire $\bar{u}^\varepsilon$ est orbitalement non-linéairement instable, en utilisant le trou spectral entre $(\gamma \pm i\tau)(\varepsilon)$ et le reste du spectre de $L(\varepsilon)$.)

3 Exemple

Un exemple simple de système physique satisfaisant nos hypothèses est celui des équations de Navier-Stokes compressible isentropique en coordonnées lagrangiennes, qui s'écrit

$$\begin{aligned} \partial_t v - \partial_x u &= 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(v) &= \partial_x((\nu/v)\partial_x u), \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $\rho > 0$ est la densité et $v = 1/\rho$, u est la vitesse de l'écoulement, et p la pression. Le nombre $\nu > 0$ est un coefficient de viscosité.

On considère une famille d'ondes progressives $u(x,t) = \bar{u}^\varepsilon(x - s(\varepsilon)t)$ solutions de (3.1). Dans le référentiel de l'onde progressive, le système s'écrit

$$\begin{aligned} &\partial_t v - s(\varepsilon)\partial_x v - \partial_x u = 0, \\ &\partial_t u - s(\varepsilon)\partial_x u + \partial_x p(v) = \partial_x((\nu/v)\partial_x u). \end{aligned} \tag{3.2}$$

On pose $u_1 = v$ et $u_2 = u$. Alors **(A1)** et **(H1)** sont vérifiées. L'hypothèse **(A2)** est vérifiée, avec $A^0 = \mathrm{Id}$. Un calcul direct montre que, si $\partial_v p(\bar{v}^\varepsilon_\pm) < 0$ pour tout $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, alors **(H2)** et **(H3)** sont satisfaites. La preuve de l'existence de profils de Lax transverses, satisfiant **(H4)**, remonte à Gilbarg [Gi].

Les équations de Navier-Stokes non isentropique (et les équations de la magnétohydrodynamique) satisfont aussi **(A1)-(A2)**, **(H1)-(H3)** (voir le paragraphe 5 de [TZ3], et les exemples A.6 et A.8 de l'appendice A de [Z2]).

Les équations de la dynamique des gaz écrites en coordonnées euleriennes ne satisfont pas **(A1)**. Elles ne satisfont pas non plus l'estimation non-linéaire cruciale du Corollaire 5.2 (voir l'appendice de [TZ3]).

4 Remarques

La formulation de **(A1)-(A2)** ci-dessus correspond à une version légèrement plus forte des hypothèses de structure de [MaZ] (voir les remarques 1.3 et 3.5 de [TZ3]). L'hypothèse de linéarité **(A1)** est cruciale en vue de l'obtention d'estimations non-linéaires sans pertes de dérivées; les équations de Navier-Stokes compressible écrites en coordonnées euleriennes ne satisfont pas **(A1)**. Voir à ce sujet l'appendice de [TZ3].

Les hypothèses **(H1)-(H3)** sont celles de l'article [MaZ], qui donne une description de la fonction de Green de l'opérateur linéarisé « réduit » ($(1 - \Pi)L(\varepsilon)$, où Π est un projecteur sur le plan des vecteurs propres de bifurcation), description que nous utilisons au paragraphe 5.4.

L'hypothèse **(H3)** est la condition de dissipativité de Kawashima-Shizuta [KSh].

L'analyse de [TZ3] couvre le cas des profils de choc sur-compressifs (correspondants à $i > n + 1$), et contient donc une version plus faible de **(H4)**.

La fonction d'Evans D_ε associée à $L(\varepsilon)$ est définie comme le Wronskien des fonctions qui engendrent les sous-espaces instables et stables de l'équation

$$(L(\varepsilon) - \lambda)u = 0,$$

en $-\infty$ et $+\infty$ respectivement; D_ε est une fonction analytique, dont les racines dans le complémentaire du spectre essentiel de $L(\varepsilon)$ sont les valeurs propres de $L(\varepsilon)$. Pour ε_0 assez petit et $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, les valeurs propres $(\gamma \pm i\tau)(\varepsilon)$ sont loin du spectre essentiel. L'hypothèse **(PH)** est donc une hypothèse d'annulation de D_ε.

Le Théorème 1.4 de [MaZ] affirme que, sous les hypothèses **(A1)-(A2)**, **(H1)-(H4)**, le choc $\bar{u}^\varepsilon$ est linéairement orbitalement stable si et seulement si D_ε a exactement une seule racine simple dans $\{\Re\lambda \geq 0\}$, en $\lambda = 0$. L'hypothèse **(H4)** signifie en particulier que D_ε a une racine simple en $\lambda = 0$. Sous les hypothèses **(A1)-(A2)**, **(H1)-(H4)**, l'hypothèse **(PH)** exprime donc le fait que le système effectue une transition de la stabilité (orbitale) linéaire vers l'instabilité linéaire.

Le Théorème 2.1 est un résultat d'existence. Le théorème prouvé dans [TZ3] contient un résultat d'unicité. Nous prouvons en particulier dans [TZ3] que si $\bar{u}^\varepsilon$ est une famille de chocs de Lax, les solutions périodiques décrites dans le Théorème 2.1 sont les seules solutions périodiques de (2.1) dans un voisinage de $\bar{u}^\varepsilon$, à des translations en x, t près.

Les fonctions poids $\eta = 1 + |x|$ [TZ2] et $\eta = e^{\eta_0(1+x^2)^{1/2}}$ [TZ3] satisfont (2.11), (2.12) et (2.13)

Les hypothèses **(A1)-(A2)** et **(H1)-(H3)** sont aussi satisfaites par les équations de la magnétohydrodynamique (voir le paragraphe 5 de [TZ3]).

5 Ebauche de preuve

On cherche d'abord la solution u comme une perturbation de l'onde de référence $\bar{u}^\varepsilon$, en posant $u = \bar{u}^\varepsilon + \dot{u}$, où $\dot{u}$ dépend bien sûr de ε. Si u est une solution de (2.1), alors $\dot{u}$ satisfait

$$\partial_t \dot{u} - L(\varepsilon)\dot{u} = \partial_x Q(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \dot{u}). \tag{5.1}$$

D'après **(A1)**, le reste de Taylor Q s'écrit

$$Q = (0, Q_2) \in \mathbb{R}^{n-r} \times \mathbb{R}^r, \tag{5.2}$$

avec

$$Q_2 = \int_0^1 (1-t)\big((\partial_u^2 b(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon + t\dot{u}) \cdot (\dot{u}, \dot{u}))(\partial_x \bar{u}^\varepsilon)_2 - \partial_u^2 F_2(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon + t\dot{u}) \cdot (\dot{u}, \dot{u})\big)\, dt;$$

en particulier, pour $1 \leq s \leq k_0$, (rappelons que k_0 est l'indice de régularité du flux et de la matrice de viscosité) en utilisant (2.11),

$$\|Q\|_{s,\eta^2} \leq C\|u\|_{s,\eta}^2\,, \tag{5.3}$$

où C dépend de $\|\bar u^\varepsilon\|_{W^{s+1,\infty}}$ et de $\|\dot u\|_{L^\infty}$.

Un temps $T_0 > 0$ étant donné, par des estimations d'énergie classiques (voir par exemple la Proposition 1.16 de [Z1]) on prouve l'existence d'une unique solution $\dot u \in \mathcal{C}^0([0, T_0], H^s_\eta(\mathbb{R}))$ de (2.1) issue d'une donnée initiale $u_0 \in H^s_\eta$, pour $2 \leq s \leq k_0$ et $\|u_0\|_{H^s_\eta} \leq \delta$, où δ dépend de T_0; la solution $\dot u$ satisfait de plus la borne uniforme en temps: $\|\dot u(t)\|_{s,\eta} \leq C\|u_0\|_{s,\eta}$, pour tout $t \in [0, T_0]$, où C dépend de T_0, mais ni de ε ni de u_0. (Les espaces fonctionnels et les normes que nous utiliserons sont définis en (2.14) et (2.15).)

5.1 Estimations non-linéaires

Lemme 5.1. *La solution $\dot u$ de* (2.1) *issue d'une donnée initiale u_0 assez petite dans H^s_η satisfait l'estimation, pour $1 \leq s \leq k_0$,*

$$\|\dot u\|^2_{s,\eta} + \int_0^t \|\dot u_2(t')\|^2_{s+1,\eta}\, dt' \leq C\|u_0\|^2_{s,\eta}, \tag{5.4}$$

uniformément en $(\varepsilon, t) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [0, T_0]$.

Preuve. On pose $E_{s,\eta}(u) = \sum_{j=0}^s (A^0(\bar u^\varepsilon)\partial_x^j u, \partial_x^j u)_{L^2_\eta}$, où A^0 est le symétriseur donné par l'hypothèse **(A2)**; $E_{s,\eta}(\cdot)^{1/2}$ définit une norme équivalente à la norme H^s_η. On évalue $\partial_t E_{s,\eta}(\dot u)$, qui est égal à la somme pour $0 \leq j \leq s$ des termes $2\Re(A^0(\bar u^\varepsilon)\partial_t\partial_x^j \dot u, \partial_x^j \dot u)_{L^2_\eta}$, qu'on développe en utilisant (5.1). Avec **(A1)** et (2.11), on trouve que la contribution du terme de flux est

$$O(\|\dot u_2\|_{j+1,\eta}\|\dot u\|_{j,\eta}) + 2\Re(A^0_{11}F_{11}\partial_x^{j+1}\dot u_1, \partial_x^j \dot u_1)_{L^2_\eta},$$

et **(A2)** implique que ce terme est de la forme $O(\|\dot u_2\|_{j+1,\eta}\|\dot u\|_{j,\eta}) + O(\|\dot u\|^2_{j,\eta})$. La contribution du terme de viscosité est

$$O(\|\dot u_2\|_{j+1,\eta}\|\dot u_2\|_{j,\eta}) - 2\Re(A^0_{22}b\partial_x^{j+1}\dot u_2, \partial_x^{j+1}\dot u_2)_{L^2_\eta}.$$

Avec (5.3), la contribution du reste est majorée par $C\|\dot u_2\|_{j+1,\eta}\|\dot u\|^2_{j,\eta}$, où C dépend de $\|\dot u\|_{L^\infty}$, si bien qu'on obtient l'égalité

$$\partial_t E_{s,\eta}(\dot u) = O(\|\dot u_2\|_{s+1,\eta}\|\dot u\|^2_{s,\eta}) + O(\|\dot u\|^2_{s,\eta}) - 2\Re(A^0_{22}b\partial_x^{s+1}\dot u_2, \partial_x^{s+1}\dot u_2)_{L^2_\eta},$$

et on conclut avec **(A2)** et une inégalité de Gronwall. □

On pose

$$N(\varepsilon, t, u_0) := \int_0^t e^{(t-t')L(\varepsilon)}\partial_x Q(\varepsilon, \bar u^\varepsilon, \dot u)\, dt'. \tag{5.5}$$

Corollaire 5.2. *La solution $\dot u$ de* (2.1) *issue d'une donnée initiale u_0 assez petite dans H^s satisfait l'estimation, pour $1 \le s \le k_0$,*

$$\|N\|_{s,\eta^2} \le C\|u_0\|^2_{s,\eta}, \tag{5.6}$$

uniformément en $(\varepsilon, t) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [0, T_0]$.

Preuve. Le terme de Duhamel N défini en (5.5) satisfait l'équation,

$$\partial_t N = L(\varepsilon)N + \partial_x Q(\varepsilon, \bar u^\varepsilon, \dot u), \tag{5.7}$$

avec une donnée initiale nulle. En procédant comme dans la preuve du Lemme 5.1, on obtient

$$\begin{aligned}\partial_t E_{s,\eta^2}(N) &= O(\|\dot u_2\|_{s+1,\eta}\|\dot u\|^2_{s,\eta}) + O(\|N\|^2_{s,\eta^2})\\ &\quad + O(\|N_2\|_{s+1,\eta^2}\|N_2\|_{s,\eta^2}) - 2\Re(\eta^2 A^0_{22} b \partial_x^{j+1}\dot N_2, \eta^2\partial_x^{j+1}\dot N_2)_{L^2},\end{aligned}$$

et on conclut par **(A2)**, (5.4) et une inégalité de Gronwall. □

Le Corollaire 5.2 est faux dans le cas d'un système hyperbolique; dans le cas strictement parabolique, il découle d'estimations classiques pour le semi-groupe.

L'opérateur $L(\varepsilon)$ est fermé, de domaine H^2 dense dans L^2. On peut montrer par une estimation d'énergie (voir par exemple la preuve de la Proposition 3.6 de [Z1]) que la norme d'opérateur dans L^2 de $(\lambda - L(\varepsilon))^{-k}$, pour tout $k \ge 1$, est contrôlée par $C|\lambda - \gamma_0|^{-k}$, pour $\gamma_0 > 0$ assez grand, et $\lambda > \gamma_0$. On en déduit (voir par exemple le Théorème 5.3, chapitre 1, de [Pa]) que $L(\varepsilon)$ génère un semi-groupe $\mathcal{C}^0$ (dans la terminologie de Pazy, voir définition 2.1, chapitre 1, de [Pa]), qui pour $t \in [0, T_0]$, satisfait $\|e^{tL(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(L^2)} \le C$.

Lemme 5.3. *Pour toute fonction poids $\omega > 0$, le semi-groupe généré par $L(\varepsilon)$ satisfait l'estimation*

$$\|e^{tL(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(L^2_\omega)} \le C, \qquad \Big\|\int_{-\infty}^x (e^{tL(\varepsilon)}\partial_x f)(x')\,dx'\Big\|_{L^2_\omega} \le C\|f\|_{L^2_\omega}, \tag{5.8}$$

uniformément en $(\varepsilon, t) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [0, T_0]$.

Preuve. La première estimation est une version à poids de l'estimation classique qui précède l'énoncé du Lemme. Pour prouver la deuxième estimation, on pose $U = \int_{-\infty}^x (e^{tL(\varepsilon)}\partial_x f)(x')\,dx'$; alors U satisfait

$$\partial_t U = L^\sharp(\varepsilon)U = -A^\varepsilon \partial_x U + B^\varepsilon \partial_x^2 U, \qquad U(0) = f,$$

avec les notations de (2.10). L'opérateur $L^\sharp(\varepsilon)$ génère un semi-groupe $\mathcal{C}^0$, qui satisfait $\|e^{tL^\sharp(\varepsilon)}\|_{\mathcal{L}(L^2_\omega)} \le C$, et $U = e^{tL^\sharp(\varepsilon)}f$, d'où la deuxième estimation. □

Nous allons utiliser le Corollaire 5.2 sous la forme suivante:

Corollaire 5.4. *La solution $\dot{u}$ de* (2.1) *issue d'une donnée initiale u_0 assez petite dans H^s satisfait les estimations*

$$\|N\|_{X_2} \le C\|u_0\|^2_{X_1}, \qquad \|\partial_{u_0}N\|_{X_2} \le C\|u_0\|_{X_1}, \tag{5.9}$$

uniformément en $(\varepsilon, t) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times [0, T_0]$.

Preuve. Le Lemme 5.3 implique que la norme $H^1_{\eta^2}$ de $\int_{-\infty}^x N dx'$ est contrôlée par $\int_0^t \|Q\|_{1,\eta^2}\, dt'$, et avec (5.3), (5.4) et (5.6), la première inégalité de (5.9) est prouvée. Pour prouver la deuxième inégalité, on se donne deux données initiales u_0 et u_0'; on note $\dot{u}$ et $\dot{u}'$ les solutions qu'elles génèrent, et Q et Q' les termes non-linéaires correspondants. Si $\|u_0\|_{2,\eta}$ est assez petit, $\|\partial_u Q\|_{2,\eta^2} \le C\|u\|_{2,\eta}$, si bien qu'en reproduisant les preuves du Corollaire 5.2 et du Lemme 5.1, on obtient $E_{2,\eta^2}(N - N') \le C \int_0^t \|Q - Q'\|_{2,\eta^2}\, dt'$, et $\|\dot{u} - \dot{u}'\|_{2,\eta} \le C\|u_0 - u_0'\|_{2,\eta}$, qui impliquent $\|\partial_{u_0}N\|_{2,\eta^2} \le C\|u_0\|_{2,\eta}$. On majore enfin la norme $H^1_{\eta^2}$ de $\int_{-\infty}^x (N - N')dx'$ en utilisant le Lemme 5.3 comme ci-dessus. $\square$

5.2 Choix de coordonnées

Soit Π le projecteur de $L^2(\mathbb{R})$ sur le plan $\{\phi^\varepsilon_+, \phi^\varepsilon_-\}$ des vecteurs propres de $L(\varepsilon)$ associés aux valeurs propres de bifurcation $(\gamma \pm i\tau)(\varepsilon)$ définies dans l'hypothèse **(PH)**, parallèlement à l'orthogonal du plan $\{\tilde{\phi}^\varepsilon_+, \tilde{\phi}^\varepsilon_-\}$ des vecteurs propres de l'adjoint de $L(\varepsilon)$ associés aux valeurs propres $(\gamma \mp i\tau)(\varepsilon)$. On note

$$\Pi f = (\tilde{\phi}^\varepsilon_-, f)_{L^2}\, \phi^\varepsilon_- + (\tilde{\phi}^\varepsilon_+, f)_{L^2}\, \phi^\varepsilon_+. \tag{5.10}$$

L'hypothèse d'hyperbolicité des états à l'infini **(A1)** (et la localisation du spectre essentiel, décrite à la suite de l'hypothèse **(PH)**) implique que les vecteurs propres $\phi^\varepsilon_\pm$ et $\tilde{\phi}^\varepsilon_\pm$ sont exponentiellement décroissants à l'infini, et donc, si dans (2.11) η_0 est assez petit, alors $\tilde{\phi}^\varepsilon_\pm, \phi^\varepsilon_\pm \in H^2_\eta$, et pour tout $f \in L^2$,

$$\|\Pi f\|_{2,\eta} \le C\|f\|_{L^2}. \tag{5.11}$$

Les coefficients de $L(\varepsilon)$ étant réels et les valeurs de u_0 et $\dot{u}$ étant réelles, on choisit ϕ^ε_- égal au complexe conjugué de ϕ^ε_+, et on pose

$$\Pi\dot{u} = w_1 \Re\phi^\varepsilon_+ + w_2 \Im\phi^\varepsilon_+, \qquad (1 - \Pi)\dot{u} = v, \tag{5.12}$$

et

$$\Pi u_0 = a_1 \Re \phi_+^\varepsilon + a_2 \Im \phi_+^\varepsilon, \qquad (1-\Pi)u_0 = b. \tag{5.13}$$

On note $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$, et $w=(w_1,w_2)\in\mathcal{C}^0([0,T_0],\mathbb{R}^2)$. Les coordonnées (w,v) de $\dot u$ satisfont le système

$$\begin{aligned} \partial_t w &= (\gamma(\varepsilon)+\tau(\varepsilon)J)w + \Pi\partial_x Q(\varepsilon,\bar u^\varepsilon,\dot u),\\ \partial_t v &= (1-\Pi)L(\varepsilon)v + (1-\Pi)\partial_x Q(\varepsilon,\bar u^\varepsilon,\dot u), \end{aligned} \tag{5.14}$$

où $J=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

Remarquons qu'on peut adapter la preuve du Corollaire 5.4 au cas d'une équation dont l'opérateur d'évolution est $(1-\Pi)L(\varepsilon)$ et dont le terme de reste non-linéaire a la forme $(1-\Pi)\partial_x Q$. Cette adaptation peut se faire d'une part en écrivant $(1-\Pi)L = L-\Pi L$, où ΠL apparaît comme une correction d'ordre 0, et d'autre part en écrivant

$$\phi_\pm^\varepsilon = \partial_x \Phi_\pm^\varepsilon, \tag{5.15}$$

où les $\Phi_\pm^\varepsilon$ sont exponentiellement décroissants à l'infini, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre k_0+1, ce qui permet d'écrire $(1-\Pi)\partial_x Q$ sous la forme $\partial_x\tilde Q$, pour un certain $\tilde Q$ qui vérifie les mêmes bornes que Q. Le terme non-linéaire dans la formulation de Duhamel de l'équation en v est donc redevable du Corollaire 5.4. (L'égalité (5.15) est une conséquence de la forme conservative de $L(\varepsilon)$ et de l'équation aux valeurs propres $L(\varepsilon)\phi_\pm^\varepsilon = (\gamma\pm i\tau)(\varepsilon)\phi_\pm^\varepsilon$, qui impliquent $\int_{\mathbb{R}}\phi_\pm^\varepsilon = 0$.)

Proposition 5.5. *La solution (w,v) de (5.14) issue de (a,b), pour $|a|+\|b\|_{X_1}$ assez petit, satisfait les bornes, pour $t\in[0,T_0]$,*

$$\|v(t)\|_{X_1}\le C(\|b\|_{X_1}+|a|^2), \tag{5.16}$$

et

$$C^{-1}|a| - C\|b\|_{X_1}^2 \le |w(t)| \le C(|a|+\|b\|_{X_1}^2). \tag{5.17}$$

Preuve. La formule de Duhamel pour v s'écrit

$$v = e^{t(1-\Pi)L(\varepsilon)}b + \int_0^t e^{(t-t')(1-\Pi)L(\varepsilon)}(1-\Pi)\partial_x Q\,dt',$$

et par le Corollaire 5.4 et la remarque qui précède la Proposition 5.5,

$$\Big\|\int_0^t e^{(t-t')(1-\Pi)L(\varepsilon)}(1-\Pi)\partial_x Q\,dt'\Big\|_{2,\eta}\le CT_0\|u_0\|_{2,\eta}^2,$$

d'où (5.16), la contribution de la condition initiale étant bornée par (5.8). De même,

$$|w| \leq C(|a| + \int_0^t \|Q\|_{L^2}\, dt'),$$

d'où (5.17), par (5.3). □

5.3 Application de premier retour de Poincaré

La solution de (5.14) issue de (a, b), qui vérifie les estimations de la Proposition 5.5, est T-périodique si et seulement si $(w, v)(T) = (a, b)$, ce que nous écrivons

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, T, a, b) &= 0, \\ g(\varepsilon, T, a, b) &= 0, \end{aligned} \tag{5.18}$$

où (f, g) est l'application de premier retour de Poincaré, définie par

$$\begin{aligned} f(\varepsilon, T, a, b) &= (\mathrm{Id} - R(\varepsilon, T))a - N_1(\varepsilon, T, a, b), \\ g(\varepsilon, T, a, b) &= (\mathrm{Id} - S(\varepsilon, T))b - N_2(\varepsilon, T, a, b), \end{aligned} \tag{5.19}$$

où

$$R(\varepsilon, T) := e^{T(\gamma Id + \tau J)}, \qquad S(\varepsilon, T) := e^{T(1-\Pi)L(\varepsilon)}. \tag{5.20}$$

et

$$\begin{aligned} N_1(\varepsilon, T, a, b) &= \int_0^T R(\varepsilon, T - t)\Pi\partial_x Q(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \dot{u})(t)\, dt, \\ N_2(\varepsilon, T, a, b) &= \int_0^T S(\varepsilon, T - t)(1 - \Pi)\partial_x Q(\varepsilon, \bar{u}^\varepsilon, \dot{u})(t)\, dt. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Nous allons résoudre (5.18) en résolvant d'abord l'equation en dimension infinie $g = 0$.

5.4 Estimations ponctuelles de la fonction de Green

L'objet de ce paragraphe est d'établir la Proposition suivante, où on note

$$\Omega = [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times (0, +\infty).$$

Proposition 5.6. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, $(\mathrm{Id} - S(\varepsilon, T))$ *a un inverse à droite*

$$(\mathrm{Id} - S(\varepsilon, T))^{-1} : \quad X_2 \to H^2,$$

qui appartient à $\mathcal{L}(X_2, X_1)$, *localement uniformément en* $(\varepsilon, T) \in \Omega$.

Le semi-groupe généré par $(1-\Pi)L(\varepsilon)$ (voir la discussion qui précède le Lemme 5.3) satisfait la formule de représentation inverse de Laplace, pour $\gamma > \gamma_0$,

$$S(\varepsilon, t)f = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{t\lambda}(\lambda - (1-\Pi)L)^{-1} f \, d\lambda, \tag{5.22}$$

où, pour $f \in H^2_\eta$, la convergence a lieu dans $L^2([0,\infty[_t, L^2_\eta)$ (voir la Proposition 6.24 de l'appendice A de [Z1]). La fonction de Green G et le noyau de la résolvante G_λ de $(1-\Pi)L(\varepsilon)$ sont définis comme des distributions sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_{x,y})$, par

$$\big(G(\varepsilon, x, t; y), \phi(x)\psi(y)\big)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_{x,y})} := \big(\phi(x), e^{t(1-\Pi)L(\varepsilon)}\psi(x)\big)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)},$$

et

$$\big(G_\lambda(\varepsilon, x, y), \phi(x)\psi(y)\big)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}^2_{x,y})} := \big(\phi(x), (\lambda - (1-\Pi)L(\varepsilon))^{-1}\psi(x)\big)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_x)},$$

de sorte qu'on a en particulier

$$S(\varepsilon, t)f = \big(G(\varepsilon, x, t; y), f(y)\big)_{\mathcal{D}', \mathcal{D}(\mathbb{R}_y)}. \tag{5.23}$$

De (5.22), on déduit, pour $\gamma > \gamma_0$ (voir la Proposition 2.5 de [MaZ]),

$$G(\varepsilon, x, t; y) = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma-iR}^{\gamma+iR} e^{t\lambda} G_\lambda(\varepsilon, x, y) \, d\lambda, \tag{5.24}$$

dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2_{x,y})$. En utilisant l'analyticité de G_λ, on peut déformer le contour d'intégration, et obtenir, pour $\nu_0, \mu > 0$ assez petits, $G = G_I + G_{II}$, avec

$$\begin{aligned} G_I &:= \oint_\Gamma e^{t\lambda} G_\lambda(\varepsilon, x, y)\, d\lambda, \\ G_{II} &:= \lim_{R\to\infty} \Big(\int_{-\nu_0 - iR}^{-\nu_0 - i\mu} e^{\lambda t} G_\lambda(\varepsilon, x, y)\, d\lambda + \int_{-\nu_0 + i\mu}^{-\nu_0 + iR} e^{\lambda t} G_\lambda(\varepsilon, x, y)\, d\lambda \Big), \end{aligned}$$

où Γ est le grand arc de cercle, orienté positivement, du cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{\nu_0^2 + \mu^2}$, qui relie le point $-\nu_0 - i\mu$ au point $-\nu_0 + i\mu$. La composante G_I de G représente la contribution des hautes fréquences, alors que le terme G_{II} représente les basses fréquences. On note S_I et S_{II} les opérateurs dont les noyaux (au sens de (5.23)) sont G_I et G_{II}, de sorte que $S = S_I + S_{II}$.

Lemme 5.7. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} S_{II}(\varepsilon, nT)$ *est absolument convergente dans* $\mathcal{L}(X_1)$, *localement uniformément en* $(\varepsilon, T) \in \Omega$.

Preuve. D'après la Proposition 7.1 de [MaZ], pour $0 \leq j \leq 2$, $\partial_x^j G_{II}$ se décompose en une somme de termes « hyperboliques » de la forme

$$O(e^{-\nu t})\delta_{x-\alpha t}(-y)\partial_y^j, \qquad \nu > 0,$$

où α est une valeur propre de F_{11}, et de termes de reste en $O(e^{-\nu(|x-y|+t)})\partial_y^j$. On en déduit directement la convergence de la suite

$$\sum_{n=0}^{N} \Big\| \int \partial_x^j G_{II}(\cdot, NT; y) f(y)\, dy \Big\|_{L^2_\eta},$$

pour $f \in X_1$, uniformément en (ε, T), pour T loin de zéro. $\square$

Lemme 5.8. *Sous les hypothèses du Théorème* 2.1, *la série* $\sum_{n=0}^{\infty} S_I(\varepsilon, nT)$ *converge dans* $\mathcal{L}(\partial_x(L^\infty_{\eta^2}), H^2)$, *localement uniformément en* $(\varepsilon, T) \in \Omega$, *et sa limite appartient à* $\mathcal{L}(\partial_x(L^\infty_{\eta^2}), X_1)$, *localement uniformément en* $(\varepsilon, T) \in \Omega$.

Preuve. Pour prouver le premier énoncé, il suffit de prouver la convergence dans $\mathcal{L}(L^\infty_{\eta^2}, L^2)$ des suites d'opérateurs de noyaux, pour $0 \leq j \leq 2$,

$$\sum_{n=0}^{N} \partial_x^j \partial_y G_{II}(x, T; y) = \oint_\Gamma \sum_{n=0}^{N} e^{\lambda n T} \partial_x^j \partial_y G_\lambda(x, y)\, d\lambda = g_1 + g_{2,N},$$

où

$$\begin{aligned} g_1(x,y) &:= \oint_\Gamma \Big(\frac{1}{1 - e^{\lambda T}}\Big) \partial_x^j \partial_y G_\lambda(x,y), d\lambda, \\ g_{2,N}(x,y) &:= \oint_\Gamma e^{(N+1)T\lambda} \Big(\frac{1}{1 - e^{\lambda T}}\Big) \partial_x^j \partial_y G_\lambda(x,y)\, d\lambda. \end{aligned}$$

Le premier terme correspond à une estimation en temps court. Le contour Γ étant loin du spectre essentiel, la borne élémentaire

$$|\partial_x^j \partial_y G_\lambda(x,y)| \leq C e^{-\nu|x-y|}, \qquad j \leq 2, \lambda \in \Gamma,\ \nu > 0,$$

donne $g_1 = O(e^{-\nu|x-y|})$, et donc

$$\begin{aligned} \Big\| \int g_1(x,y) f(y)\, dy \Big\|_{L^2_\eta} &\leq \Big\| \int \eta(x) |f(x-y)| e^{-\nu|y|}\, dy \Big\|_{L^2} \\ &\leq C \big\| (\eta f) * (\eta e^{-\nu|\cdot|}) \big\|_{L^2}, \end{aligned} \tag{5.25}$$

d'après (2.12). Si, dans (2.11), η_0 satisfait $\eta_0 < \nu$, alors on déduit directement de (5.25) la borne

$$\Big\| \int g_1(x,y) f(y)\, dy \Big\|_{L^2_\eta} \le C \|\eta^2 f\|_{L^\infty} \|\eta^{-1}\|_{L^2}, \tag{5.26}$$

d'après (2.13).

A partir de la description de G donnée dans la Proposition 7.1 de [MaZ], on peut montrer (voir la Proposition 2.5 de [TZ3] pour plus de détails) que le terme $g_{2,N}$ est borné, comme $G_I(\varepsilon, x, (N+1)T; y)$, par une somme de termes « excités » de la forme

$$e_N(x,y) := O(e^{-\nu|x|}) \int_{-\infty}^{(y+\alpha(N+1)T)/\sqrt{C(N+1)T}} e^{-z^2}\, dz,$$

de termes « diffusés » de la forme

$$s_N(x,y) := (1+(N+1)T)^{-1/2} e^{(x-y-\alpha(N+1)T)^2/C(N+1)T},$$

et de termes de reste, de la forme

$$r_N(x,y) := O(e^{-\nu(|x|+|y|)}) + O(e^{-\nu(|x-y|+(N+1)T)}).$$

L'injection $L^\infty_{\eta^2} \hookrightarrow L^1$ implique que

$$\lim_{N\to\infty} \int e_N(x,y) f(y)\, dy = O(e^{-\nu|x|}),$$

par convergence dominée. Si $\eta_0 < \nu$, la suite $\int e_N(x,y) f(y)\, dy$ converge donc dans L^2_η.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \Big\| \int s_N(x,y) f(y)\, dy \Big\|_{L^2} &= (1+NT)^{-1/2} \big\| e^{(\cdot\, - NT)/CNT} * f \big\|_{L^2} \\ &\le C N^{-1/4} \|f\|_{L^1} \end{aligned}$$

tend vers 0 quand N tend vers l'infini.

Enfin, l'opérateur de noyau r_N est somme d'un terme constant, qui appartient à $\mathcal{L}(L^\infty_{\eta^2}, L^2_\eta)$ d'après (5.25) et (5.26), et d'un terme exponentiellement décroissant en N en norme $\mathcal{L}(L^\infty_{\eta^2}, L^2_\eta)$.

On en déduit la convergence de la suite $\sum_{n=0}^N S_{II}(\varepsilon, nT)$ dans $\mathcal{L}(X_2, H^2)$, et aussi l'appartenance de $\sum_{n=0}^\infty S_{II}(\varepsilon, nT)$ à $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ (car le seul terme qui a prori ne converge pas dans $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ est le terme diffusé, dont la limite est nulle).

$\square$

Preuve de la Proposition 5.6. Soit $f \in X_2 \hookrightarrow \partial_x(L^\infty_{\eta^2})$. D'après les Lemmes 5.7 et 5.8, la suite $\sum_{n=0}^N S(\varepsilon, nT)f$ converge dans H^2, et

$$(\mathrm{Id} - S)\sum_{n=0}^{N} S(\varepsilon, nT)f = f - S(\varepsilon, (N+1)T)f$$

converge vers f en norme H^2. Par ailleurs, il découle du Lemme 5.3 que $S \in \mathcal{L}(H^2)$. Donc

$$f = \lim_{N\to\infty}(\mathrm{Id} - S)\sum_{n=0}^{N} S(\varepsilon, nT)f = (\mathrm{Id} - S)\sum_{n=0}^{\infty} S(\varepsilon, nT)f,$$

ce qui établit que $(\mathrm{Id} - S)^{-1} := \sum_{n=0}^\infty S(\varepsilon, nT)$ est un inverse à droite de $\mathrm{Id} - S$ sur X_2, qui par ailleurs appartient à $\mathcal{L}(X_2, X_1)$ d'après les Lemmes 5.7 et 5.8.

□

Remarquons que cette description de la fonction de Green (G_{II} dans le Lemme 5.8) comme somme de termes excités, diffusés et de termes de reste, se retrouve à l'identique dans le cas élémentaire de l'équation de Burgers. Voir l'exemple 8.6 de [ZH].

5.5 Réduction

Proposition 5.9. *Pour tout* $T_0 > 0$, *il existe* $a_0 > 0$ *et une fonction continue*

$$\beta : \quad (\varepsilon, T, a) \in \mathbb{R} \times (0, T_0] \times \mathbb{R}^2 \to \beta(\varepsilon, T, a) \in X_1,$$

définie pour $|\varepsilon| + |a| \leq \varepsilon_0 + a_0$, *telle que*

$$g(\varepsilon, T, a, \beta(\varepsilon, T, a)) \equiv 0,$$

et qui satisfait la borne

$$\|\beta\|_{X_1} \leq C|a|^2, \tag{5.27}$$

localement uniformément en $(\varepsilon, T, a) \in [-\varepsilon_0, \varepsilon_0] \times (0, T_0] \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}(0, a_0)$.

Preuve. On pose

$$\mathcal{T}(b) = (\mathrm{Id} - S(\varepsilon, T))^{-1} N_2(\varepsilon, T, a, b). \tag{5.28}$$

où $(\mathrm{Id} - S(\varepsilon, T))^{-1}$ est donné par la Proposition 5.6. Le Corollaire 5.4 et la remarque qui précède la Proposition 5.5 donnent la borne

$$\|N_2\|_{X_2} \leq C(|a| + \|b\|_{X_1})^2, \tag{5.29}$$

si bien qu'avec la Proposition 5.6, on peut affirmer que $\mathcal{T}$ envoie une petite boule de X_1 dans elle-même, pour ε et a assez petits. Le Corollaire 5.4 donne aussi la borne

$$\|\partial_b N_2\|_{X_2} \leq C(|a| + \|b\|_{X_1}), \tag{5.30}$$

dont on déduit directement le caractère contractant de $\mathcal{T}$, pour $|a| + \|b\|_{X_1}$ assez petit. On note β le point fixe de $\mathcal{T}$ dont l'existence découle du Théorème du point fixe de Banach. Par définition de $(\mathrm{Id} - S)^{-1}$, on a bien $g(\varepsilon, T, a, \beta) = 0$. Enfin (5.27) découle directement de (5.29) et de l'équation $\beta = \mathcal{T}(\beta)$. □

La solution de (5.28) est unique, mais pour tout élément ω du noyau de $\mathrm{Id} - S$, $\omega + \beta$ est une solution de $g = 0$. La question de l'unicité des solutions périodiques de (2.1) issues de conditions initiales proches de $\bar{u}^\varepsilon$ est brièvement mentionnée au paragraphe 4.

5.6 Bifurcation

L'équation réduite est

$$f_*(\varepsilon, T, a) := f(\varepsilon, T, a, \beta(\varepsilon, T, a)) = 0.$$

En identifiant $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$, on note en coordonnées polaires $a = re^{i\theta_0}$, avec $r \in \mathbb{R}$. Il est loisible de choisir $\theta_0 = 0$.

Proposition 5.10. *Il existe deux fonctions continues $r \to \varepsilon(r)$, $r \to T(r)$, définies sur un voisinage de l'origine dans $\mathbb{R}_r$, telles que $\varepsilon(0) = 0$, $T(0) = 2\pi/\tau(0)$, et*

$$f_*(\varepsilon(r), T(r), r) \equiv 0.$$

Preuve. On considère (5.14) sur $[0, T_0]$, ε et T étant fixés, avec pour données initiales $(a, b) = (r, B(\varepsilon, T, r))$. D'après (5.17) et (5.27), si r est assez petit, w ne s'annule pas sur $[0, T_0]$. On utilise donc des coordonnées polaires (ρ, θ) dans le plan $\mathbb{R}^2_w$, dans lesquelles (5.14)(i) devient

$$\rho' = \gamma\rho + n_1, \qquad \theta' = \tau + n_2, \tag{5.31}$$

où, $|n_1| \le C|\Pi\partial_x Q|$, $|n_2| \le C\rho^{-1}|\Pi\partial_x Q|$, et donc, d'après (5.3), (5.4) et (5.27),

$$|n_1| \le C_1(\rho^2 + r^2), \qquad |n_2| \le C_2|r|. \tag{5.32}$$

L'équation $f_* = 0$ s'écrit $(\rho, \theta)(T) = (r, 2\pi)$. Une solution triviale est donnée par $r = 0$. Pour sélectionner la solution non triviale, on pose pour $r \ne 0$,

$$\bar{f}(\varepsilon, T, r) := \big(e^{\gamma T} - 1 + \int_0^T e^{\gamma(T-t)}\frac{n_1}{r}\,dt\,,\ \tau T + \int_0^T n_2\,dt\big). \tag{5.33}$$

et

$$\bar{f}(\varepsilon, T, 0) := (e^{\gamma T} - 1, \tau T).$$

La fonction $\bar{f}$ est alors une fonction continue de ses arguments. On remarque que $\bar{f}(0,0,0) = 0$, que $\bar{f}(\varepsilon, T, 0)$ est différentiable en $(\varepsilon, T) = 0$, et que $(\partial_{\varepsilon,T}\bar{f})(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -\tau(0) \\ \gamma'(0) & 0 \end{pmatrix}$ est inversible d'après **(PH)**. On peut donc appliquer le théorème du point fixe de Brouwer (voir par exemple le Lemme 2.27 de [TZ2]), qui donne l'existence d'une application continue de $r \mapsto (\varepsilon, T)(r)$, définie sur un voisinage de l'origine, et solution de $\bar{f} = 0$, et donc de $f_* = 0$. Pour $r = 0$, l'équation en θ devient $\theta' = \tau$, si bien que $\theta(T(0)) = 2\pi$ implique $T(0) = 2\pi/\tau(0)$. □

5.7 Conclusion: existence des ondes galopantes

Soit un rayon initial r assez petit. Considérons le système (5.14), pour la valeur $\varepsilon(r)$ du paramètre de bifurcation, où $\varepsilon(\cdot)$ est la fonction définie à la Proposition 5.10, avec la condition initiale

$$(w, v)(0) = (r, \beta(\varepsilon(r), T(r), r)).$$

Alors (w, v) est $T(r)$-périodique en temps, et la solution u^r de (2.1) (pour $\varepsilon = \varepsilon(r)$) qui est issue de la condition initiale

$$u_0 = \bar{u}^{\varepsilon(r)} + r\Re\phi_+^{\varepsilon(r)} + \beta(\varepsilon(r), T(r), r),$$

est $T(r)$-périodique en temps. On remarque, d'après (5.27), que si $C_0 > 0$ est assez grand et $|r|$ est assez petit,

$$C_0^{-1}|r| \le \|u_0 - \bar{u}^\varepsilon\|_{H^2_\eta} \le C_0|r|. \tag{5.34}$$

Alors (5.16), (5.17) et (5.27) entrainent l'estimation (2.16).

References

[BMR] A. Bourlioux, A. Majda, et V. Roytburd, *Theoretical and numerical structure for unstable one-dimensional detonations.* SIAM J. Appl. Math. 51 (1991) 303–343.

[Er] J. J. Erpenbeck, *Nonlinear theory of unstable one–dimensional detonations,* Phys. Fluids 10 (1967) No. 2, 274–289.

[FD] W. Fickett et W. Davis, *Detonation: Theory and Experiment*, Dover Press, Mineola, New York (2000).

[Gi] D. Gilbarg, *The existence and limit behaviour of the one-dimensional shock layer*, Amer. J. Math. 73 (1951), 256-274.

[KSh] S. Kawashima et Y. Shizuta, *On the normal form of the symmetric hyperbolic-parabolic systems for one-dimensional gas motion*, Tohoku Math. J. 40 (1988), 449-464.

[KS] A.R. Kasimov et D.S. Stewart, *Spinning instability of gaseous detonations.* J. Fluid Mech. 466 (2002), 179–203.

[KuS] M. Kunze et G. Schneider, *Exchange of stability and finite-dimensional dynamics in a bifurcation problem with marginally stable continuous spectrum*, Z. Angew. Math. Phys. 55 (2004) 383-399.

[LyZ1] G. Lyng et K. Zumbrun, *A stability index for detonation waves in Majda's model for reacting flow.* Phys. D 194 (2004), no. 1-2, 1–29.

[LyZ2] G. Lyng et K. Zumbrun, *One-dimensional stability of viscous strong detonation waves.* Arch. Ration. Mech. Anal. 173 (2004), no. 2, 213–277.

[MaZ] C. Mascia et K. Zumbrun, *Pointwise Green function bounds for shock profiles of systems with real viscosity.* Arch. Ration. Mech. Anal. 169 (2003), no. 3, 177–263.

[Pa] A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations.* Applied Mathematical Sciences, 44, Springer-Verlag, New York-Berlin, (1983) viii+279 pp. ISBN: 0-387-90845-5.

[SS] B. Sandstede et A. Scheel, *Hopf bifurcation from viscous shock waves,* Preprint (2006).

[TZ1] B. Texier et K. Zumbrun, *Relative Poincaré–Hopf bifurcation and galloping instability of traveling waves,* Methods Anal. and Appl. 12 (2005), no. 4, 349–380.

[TZ2] B. Texier et K. Zumbrun, *Galloping instability of viscous shock waves,* Preprint (2006), disponible à l'adresse `www.math.jussieu.fr/~texier`.

[TZ3] B. Texier et K. Zumbrun, *Hopf bifurcation of viscous shock waves in compressible gas dynamics and MHD,* à paraître dans Archive for Rational Mechanics and Analysis, disponible à l'adresse `www.math.jussieu.fr/~texier`.

[Z1] K. Zumbrun, *Planar stability criteria for viscous shock waves of systems with real viscosity,* in Hyperbolic Systems of Balance Laws, CIME School lectures notes, Lecture Notes in Mathematics 1911, Springer (2003).

[Z2] K. Zumbrun, *Stability of large-amplitude shock waves of compressible Navier–Stokes equations,* Handbook of Mathematical Fluid Dynamics vol.3, Elsevier (2004).

[ZH] K. Zumbrun et P. Howard, *Pointwise semigroup methods and stability of viscous shock waves*. Indiana Univ. Math. J. 47 (1998), 741–871; Errata, Indiana Univ. Math. J. 51 (2002), no. 4, 1017–1021.

[ZS] K. Zumbrun et D. Serre, *Viscous and inviscid stability of multidimensional planar shock fronts,* Indiana Univ. Math. J. 48 (1999) 937–992.