



Centre de
Mathématiques
Laurent Schwartz



ÉCOLE
POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1997-1998

Emmanuel Grenier

Non dérivation des équations de Prandtl

Séminaire É. D. P. (1997-1998), Exposé n° XVIII, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1997-1998____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX

Fax : 33 (0)1 69 33 49 49

Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

cedram

Article mis en ligne dans le cadre du
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques
<http://www.cedram.org/>

Non dérivation des équations de Prandtl

Notes d'exposé, Séminaire X-EDP, École Polytechnique,

17 mars 1998

E. Grenier ¹

1 Introduction

1.1 Limite nonvisqueuse de Navier Stokes

Cette note est consacrée à une approche de la limite non visqueuse des équations de Navier Stokes près d'un bord, et plus précisément à l'étude des instabilités des couches limites de Prandtl.

On considère une suite de solutions u^ν des équations de Navier Stokes dans un domaine $\Omega = \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_{+y}$ ou $\Omega = \mathbb{T}_x \times \mathbb{R}_{+y}$

$$\partial_t u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu - \nu \Delta u^\nu = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot u^\nu = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (2)$$

$$u^\nu = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \quad (3)$$

La condition aux limites (3) est la condition usuelle d'arrêt. Lorsque la viscosité $\nu > 0$ tend vers 0, formellement, u^ν tend vers une solution u des équations d'Euler

$$\partial_t u + (u \cdot \nabla) u + \nabla p = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (4)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{dans } \Omega. \quad (5)$$

La principale difficulté vient de ce que la condition d'arrêt (3) se transforme en condition de glissement

$$u \cdot n = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \quad (6)$$

où n est la normale extérieure à $\partial\Omega$. Ce changement de conditions aux limites, provoqué par le changement d'ordre des équations conduit à introduire une

¹Laboratoire d'Analyse Numérique, C.N.R.S. U.R.A. 189, Paris 6, Place Jussieu, 75005 Paris, France

couche limite, zone de faible épaisseur près de $\partial\Omega$ qui permet de compenser la non nullité éventuelle de u sur $\partial\Omega$.

A noter que les estimations d'énergie usuelles sur (1,2,3) sont insuffisantes pour passer à la limite dans le terme quadratique $(u^\nu \cdot \nabla)u^\nu$.

1.2 Couche limite

Comme de coutume dans des problèmes de couches limites on cherche un développement de u^ν sous la forme

$$u^\nu(t, x, y) = u(t, x, y) + u^{CL}(t, x, Y) + o(1) \quad (7)$$

où u^{CL} décrit la couche limite et où $Y = y/\sqrt{\nu}$ ($\sqrt{\nu}$ étant la taille caractéristique introduite par Prandtl). Plus précisément on impose

$$u + u^{CL} = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \quad (8)$$

$$u^{CL} \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad Y \rightarrow +\infty. \quad (9)$$

Plus généralement, on cherche la solution u^ν sous la forme

$$u^\nu \sim \sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{\nu}^j u_j^{int}(t, x, y) + \sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{\nu}^j u_j^{CL}(t, x, Y) \quad (10)$$

où les fonctions u_j^{int} décrivent le comportement de u^ν loin du bord (avec $u_0^{int} = u$) et où les fonctions u_j^{CL} décrivent les profils successifs de couches limites ($u_j^{int} + u_j^{CL} = 0$ sur $\partial\Omega$, $u_j^{CL} \rightarrow 0$ quand $Y \rightarrow +\infty$ pour tout j et $u_0^{CL} = u^{CL}$). A noter que les séries du membre de droite de (10) n'ont aucune raison de converger, d'où l'utilisation du signe \sim pour rappeler qu'il faut tronquer les séries pour obtenir alors des erreurs arbitrairement petites dans des espaces de Sobolev H^s avec s arbitrairement grand.

Des asymptotiques de la forme (10) peuvent être justifiées dans de très nombreux cas, y compris pour des systèmes issus de la mécanique des fluides. De tels développements ont été justifiés dans le cas de limites non visqueuses de systèmes paraboliques linéaires par O. Guès [13] puis pour des systèmes paraboliques quasilineaires dans le cas de bords non caractéristiques dans [12] (sous condition de petitesse, des instabilités pouvant survenir pour des grandes valeurs au bord de u_0^{int}).

La météorologie fournit un grand nombre d'exemples de limites non visqueuses qui peuvent être rigoureusement justifiées [4],[5], à travers l'étude de

couches limites dite d'Eckman, combinaison d'une viscosité faible et d'une grande force de Coriolis. Ces limites dites quasigéostrophiques sont des limites non visqueuses des équations de Navier Stokes auxquelles on a ajouté d'autres termes dépendant d'un autre petit paramètre (grand terme de Coriolis crée par une forte rotation, forte stratification par la gravité, ...)

1.3 Equations de Prandtl

L'analyse de Prandtl consiste à poser $Y = y/\sqrt{\nu}$ et à faire le changement de fonctions associé

$$U_1^\nu(t, x, Y) = u_1^\nu(t, x, y), \quad U_2^\nu(t, x, Y) = \sqrt{\nu}^{-1} u_2^\nu(t, x, y)$$

où $u^\nu = (u_1^\nu, u_2^\nu)$. On pose aussi $P^\nu(t, x, Y) = p^\nu(t, x, y)$. En reportant ces expressions dans (1) et en passant formellement à la limite, en supposant que les dérivées de U_1^ν , U_2^ν et P^ν restent bornées quand $\nu \rightarrow 0$, on trouve

$$\partial_Y P = 0 \tag{11}$$

ce qui signifie que la pression ne varie pas dans la couche limite. La pression est donc donnée par la pression "à l'infini en Y ", c'est-à-dire par la pression d'Euler $p_0^{int}(t, x, 0)$. Par conséquent, P peut être considérée comme donnée, et $\partial_x P$ comme un terme de force f connu. Les limites de (1,2,3) donnent alors

$$\partial_t U_1 + U_1 \partial_x U_1 + U_2 \partial_Y U_1 - \partial_{YY}^2 U_1 = f, \tag{12}$$

$$\partial_x U_1 + \partial_Y U_2 = 0, \tag{13}$$

$$U = 0 \quad \text{pour} \quad Y = 0. \tag{14}$$

Les équations (12,13,14) sont les équations de Prandtl, qui doivent être satisfaites par u^{CL} si l'analyse formelle (10) est valable.

Il n'existe pas à ce jour de théorème général d'existence de solutions régulières pour ce système. Ceci est dû au très faible contrôle que l'on a sur U_2 qui n'est connu que par l'inversion de (13) : $U_2 = \partial_Y^{-1} \partial_x U_1$, ce qui conduit à la perte d'une dérivée dans les estimations d'énergie.

Cette perte peut être compensée si on travaille avec des données initiales analytiques, ce qui conduit à un théorème d'existence en temps petit pour des données initiales analytiques [3]. A noter que dans ce cas on peut aussi justifier (10) et la convergence de u^ν vers u [3]. Toutefois comme on va le

voir plus loin, l'analyticité cache complètement des phénomènes physiques importants d'instabilité. Le cas de données initiales monotones a été traité dans [16] et un exemple de donnée initiale pour laquelle il n'existe pas de solution régulière globale en temps est donné dans [8].

Ceci conduit à penser que l'équation de Prandtl n'est pas pertinente dans le cas général et que des instabilités violentes peuvent se produire dans la couche limite. La construction de telles instabilités est l'objet de la présente note.

2 Instabilité des couches de Prandtl

2.1 Résultat

Le théorème suivant montre l'existence d'un profil de cisaillement $u_{ref}(Y)$ tel que $(u_{ref}(y/\sqrt{\nu}), 0)$ conduit à une couche de type Prandtl qui est hautement instable.

Théorème 2.1 *Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ou $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$. Soit N un entier arbitrairement grand. Il existe une fonction $u_{ref}(Y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, constante pour $Y \geq 2$ telle que la solution de Navier Stokes u_{ref}^ν avec donnée initiale $(u_{ref}(y/\sqrt{\nu}), 0)$, donnée par*

$$u_{ref}^\nu = (u_{ref}(t, y/\sqrt{\nu}), 0)$$

où

$$\partial_t u_{ref} - \partial_{YY}^2 u_{ref} = 0$$

et $u_{ref}(0, y) = u_{ref}(y)$, satisfasse la propriété suivante : pour tout s arbitrairement grand, il existe pour $\nu > 0$ suffisamment petit des solutions u^ν de Navier Stokes telles que

$$\|u^\nu(0, \cdot) - u_{ref}^\nu(0, \cdot)\|_{H^s} \leq \nu^N, \quad (15)$$

et

$$\|u^\nu(T_\nu, \cdot) - u_{ref}^\nu(T_\nu, \cdot)\|_{H^1} \rightarrow +\infty \quad (16)$$

pour des temps T_ν qui tendent vers 0 quand ν tend vers 0. De plus

$$\|\text{rot } u^\nu(T_\nu, \cdot)\|_{L^\infty} \rightarrow +\infty \quad (17)$$

quand $\nu \rightarrow 0$ et on peut prendre T_ν tels que $T_\nu \sim C\sqrt{\nu} \log \nu^{-1}$.

Il est alors clair que les fonctions U_1^ν construites sur u^ν comme dans la section précédente ne peuvent converger en un quelconque sens fort vers des solutions des équations de Prandtl, ce qui limite l'intérêt de ces dernières et infirme tout développement de la forme (10) ou (7).

Le profil u_{ref} est de plus explicite. Soit tout d'abord $u_0(y) = y/2$ pour $y \leq 1$, $y - 1/2$ pour $1 \leq y \leq 2$ et $3/2$ pour $y \geq 2$. Soit Θ une fonction régulière, positive et d'intégrale unité, à support dans $[-1, 1]$. Alors dans le théorème 2.1 on peut prendre

$$u_{ref} = u_0 \star \frac{1}{\mu} \Theta\left(\frac{\cdot}{\mu}\right) \quad (18)$$

pour peu que μ soit assez petit.

2.2 Description de l'instabilité

Plutôt que d'esquisser la preuve du théorème 2.1, il est plus instructif de décrire physiquement l'instabilité, ce qui donne au passage une idée des différentes étapes de la preuve. Soit $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$ pour simplifier.

La remarque essentielle est que des instabilités de période spatiale de l'ordre de $\sqrt{\nu}$ apparaissent en des temps d'ordre $\sqrt{\nu}$. Pour les analyser on fait le changement de variables $(t, x, y) \rightarrow (t/\sqrt{\nu}, x/\sqrt{\nu}, y/\sqrt{\nu})$. À noter la différence avec le changement de variables de Prandtl qui est $(t, x, y) \rightarrow (t, x, y/\sqrt{\nu})$. Les équations (1,2) deviennent après changement de variables

$$\partial_t u^\nu + (u^\nu \cdot \nabla) u^\nu + \nabla p^\nu - \sqrt{\nu} \Delta u^\nu = 0, \quad (19)$$

$$\nabla \cdot u^\nu = 0. \quad (20)$$

Prouver le théorème revient à montrer l'instabilité de la solution $u_{ref}^\nu(\sqrt{\nu}t, y)$ de (1,2). À noter que $u_{ref}^\nu(\sqrt{\nu}t, y)$ varie très lentement en temps. On se ramène ainsi à étudier l'instabilité nonlinéaire de $u_{ref}(y)$.

Le point de départ est de montrer que $u_{ref}(y)$ est nonlinéairement instable pour les équations d'Euler, ce qui est l'objet de la section suivante et du théorème 3.1. Plus précisément il existe une solution v des équations d'Euler linéarisées autour de u_{ref} qui est exponentiellement croissante

$$\|v\|_{L^2} \sim C \exp(\lambda t), \quad \text{avec } \lambda > 0, \quad (21)$$

et à partir de v on peut construire une solution \tilde{u} des équations d'Euler de la forme

$$\tilde{u} = u_{ref} + \delta v + O(\delta^2 \exp(2\lambda t)), \quad (22)$$

ce développement étant valable pour $t \leq T_\delta$ avec $\delta \exp(\lambda T_\delta) = 1$.

Comme la limite formelle de (19,20) est l'équation d'Euler, on s'attend à ce que ce mode instable v apparaisse pour ν petit. C'est effectivement ce qui se passe, sauf que v ne satisfaisant pas a priori la condition d'arrêt (3), la viscosité de Navier Stokes réagit en créant de la vorticité sur le bord pour assurer (3). Cette vorticité diffuse lentement grâce à $\sqrt{\nu} \Delta u^\nu$ et forme une *sous couche* de taille caractéristique $\nu^{1/4}$ (en variable Y).

L'écoulement u^ν comporte donc deux couches : une couche de type Prandtl, de taille $\sqrt{\nu}$ où apparaissent des structures périodiques de période $\sim \sqrt{\nu}$ en x , ces structures ayant une amplitude $\sim \nu^{1/4}$ quand $t = T_\nu$, et une sous couche de taille $\sim \nu^{3/4}$ (en variable y) dans laquelle se forment des zones de forte vorticité qui font exploser les normes H^s de u^ν quand ν tend vers 0.

La preuve du théorème 2.1 consiste en la construction d'une solution approchée de (19,20) précise jusqu'à T_ν en partant d'une instabilité non linéaire d'Euler et en ajoutant une sous couche visqueuse de taille $\nu^{3/4}$ avant de conclure par une estimation d'énergie. Elle justifie complètement ce scénario, jusqu'à la divergence de la norme L^∞ de la vorticité, l'évolution ultérieure du fluide étant un problème ouvert.

2.3 Remarques

Physiquement ce résultat d'instabilité est attendu (depuis Prandtl lui même) bien que le scénario décrit ci dessus ne soit pas habituel et ne se trouve pas dans les livres classiques [7],[15]. L'instabilité des couches de Prandtl est très liée [15] à la présence de courants rampants le long du bord, qui vont dans la direction opposée au courant à l'infini en Y . Lorsque de tels courants existent, le profil des vitesses tangentielles possède un point d'inflexion et est tout à fait comparable à (18). A noter qu'un décollement total de la couche limite est alors attendu.

D'autre part, les instabilités observées sont complètement "tuées" (en temps petit) si on travaille dans des espaces analytiques puisqu'elles ont une petite période spatiale en x , de l'ordre de $\sqrt{\nu}$, ce qui est cohérent avec [3].

Pour comprendre la différence entre cette instabilité et les résultats de stabilité de [4],[5],[12], on introduit le nombre de Reynolds Re , rapport entre les tailles caractéristiques du terme d'inertie $(u \cdot \nabla)u$ et du terme de viscosité $\nu \Delta u$. Si U est la taille caractéristique de la vitesse dans l'écoulement, L une

taille caractéristique (typiquement la taille de la couche limite), on pose

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (23)$$

Ici, comme $U \sim 1$ et $L \sim \sqrt{\nu}$, $Re \sim \sqrt{\nu}^{-1}$ qui tend vers $+\infty$ quand ν tend vers 0. Autrement dit la viscosité est négligeable devant les termes d'advection et est insuffisante pour tuer les instabilités nonvisqueuses d'Euler.

Dans les cas étudiés dans [4],[5],[12] au contraire, $L \sim \nu$ et $Re \sim 1$ quand $\nu \rightarrow 0$. Par conséquent les forces visqueuses et le terme d'advection restent de tailles comparables. Il existe alors un Reynolds critique en dessous duquel l'écoulement est stable et au dessus duquel l'écoulement est instable, ce qui est un point de vue très classique en physique.

3 Instabilité des équations d'Euler

On s'intéresse maintenant à la stabilité ou l'instabilité, linéaires ou non-linéaires, de profils de cisaillement $\tilde{u}_{ref} = (u_{ref}(y), 0)$ pour l'équation d'Euler. Le cas linéaire a été essentiellement résolu par Rayleigh [17] qui a montré qu'une condition nécessaire d'instabilité est que u_{ref} ait un point d'inflexion. A noter qu'il n'y a pas de réciproque et qu'un critère plus fin a été donné par Fjortoft [7].

Plus tard V.I. Arnold [1] a donné un critère de stabilité nonlinéaire, voisin de la condition de Rayleigh, en utilisant des fonctionnelles de Lyapounov et la méthode "d'énergie Casimir".

Il manquait un exemple d'écoulement nonlinéairement instable, qui a été donné par S. Friedlander, W. Strauss et M. Vishik [9]. On peut compléter leur résultat en utilisant des méthodes complètement différentes pour montrer

Théorème 3.1 *Soit $\Omega = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ ou $\Omega = \mathbb{T} \times \mathbb{R}_+$. Il existe un profil $u_{ref}(y) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ (explicitement décrit plus loin) tel que pour tout s arbitrairement grand et tout δ arbitrairement petit, il existe une solution u^δ des équations d'Euler avec*

$$\|u^\delta(0, \cdot) - \tilde{u}_{ref}(\cdot)\|_{H^s} \leq \delta, \quad (24)$$

$$\|u^\delta(T_\delta, \cdot) - \tilde{u}_{ref}(\cdot)\|_{L^2} \geq \sigma > 0, \quad (25)$$

$$\|u^\delta(T_\delta, \cdot) - \tilde{u}_{ref}(\cdot)\|_{L^\infty} \geq \sigma > 0, \quad (26)$$

avec $\sigma > 0$ indépendant de δ et pour des temps $T_\delta \leq C_s \log \delta^{-1}$.

Outre le fait qu'ici on travaille dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ avec des perturbations d'énergie finie au lieu de se placer dans $\mathbb{T} \times \mathbb{T}$, la principale différence avec le résultat de [9] est que l'on montre l'instabilité dans L^∞ et L^2 (équations (25) et (26)) et non dans H^2 comme dans [9]. Tout d'abord L^∞ et L^2 sont des espaces physiquement intéressants ce qui n'est pas le cas de H^2 , mais surtout, la présence de spectre continu dans le spectre d'Euler linéarisé rend la notion d'instabilité très sensible à l'espace dans lequel on l'étudie. En particulier, pour par exemple $u_{ref}(y) = y$, $\partial_t v + u_{ref}(y)\partial_x v = 0$ (qui est effectivement une partie importante de Euler linéarisé) est linéairement stable dans L^∞ et L^2 , mais linéairement instable dans H^2 ...

L'image de l'instabilité justifiée par le théorème 3.1 est la suivante : si à $t = 0$ on ajoute au profil u_{ref} une petite perturbation (de taille δ dans H^s), cette perturbation se déplace à vitesse constante et croît exponentiellement, jusqu'à former une structure quasiment périodique en x , d'amplitude σ , de période spatiale bien définie, et d'étendue spatiale en x d'ordre \sqrt{t} (très grande devant la période spatiale du motif qui apparaît sur cette étendue). Cette analyse est valable jusqu'à T_δ où les effets non linéaires sont trop importants pour pouvoir être contrôlés par cet approche.

3.1 Instabilité linéaire

La première étape est d'étudier le linéarisé des équations d'Euler autour de $\tilde{u}_{ref} = (u_{ref}(y), 0)$ qui s'écrit

$$\partial_t v + (\tilde{u}_{ref} \cdot \nabla)v + (v \cdot \nabla)\tilde{u}_{ref} + \nabla p = 0, \quad (27)$$

$$\nabla \cdot v = 0, \quad (28)$$

avec $v \cdot n = 0$ sur $\partial\Omega$. A noter qu'une estimation d'énergie naturelle sur (27,28) conduit à

$$\partial_t \int v^2 \leq 2 \|u_{ref}\|_{Lip} \int v^2 \quad (29)$$

ce qui autorise une croissance exponentielle de la solution v , mais s'avère être une piètre majoration de la vitesse de croissance.

Une approche classique [7],[10] est de chercher des solutions particulières de (27,28) sous la forme

$$v(t, x, y) = \exp(ik(x - ct)) \begin{pmatrix} \Psi'(y) \\ -ik\Psi(y) \end{pmatrix} \quad (30)$$

où c est un nombre complexe et Ψ joue le rôle de fonction de courant. En écrivant que (30) est solution de (27) on trouve l'équation de Rayleigh

$$(u_{ref} - c)(\partial_{yy}^2 - k^2)\Psi = \Psi \partial_{yy}^2 u_{ref}, \quad (31)$$

$$\Psi(0) = 0, \quad \Psi \rightarrow 0 \quad \text{quand} \quad y \rightarrow +\infty \quad (32)$$

qui est un problème spectral (il faut chercher c et Ψ) en dimension 1.

En suivant une remarque de Landau, on constate qu'il est très facile de résoudre (31,32) dans le cas où u_{ref} est affine par morceaux. On prend donc par exemple

$$u_{ref}(y) = \begin{cases} y/2 & \text{pour } y \leq 1, \\ y - 1/2 & \text{pour } 1 \leq y \leq 2, \\ 3/2 & \text{pour } 3/2 \leq y. \end{cases} \quad (33)$$

Dans ce cas, $\partial_{yy}^2 u_{ref}$ se réduit à la somme de deux masses de Dirac, une en $y = 1$ et une en $y = 2$. En dehors de ces points, (31,32) se résoud explicitement, ce qui ramène le problème à trouver les valeurs propres et les vecteurs propres d'une matrice 2×2 . On trouve alors qu'il existe deux solutions de (27,28) de la forme (30) (à multiplication par un scalaire près), notées $c_{\pm}(k)$ et $\Psi_{\pm}(k)$. De plus $c_{\pm}(k)$ sont soit réelles soit imaginaires conjuguées. Pour la fonction u_{ref} définie par (33) on peut calculer entièrement $c_{\pm}(k)$ ce qui conduit à la figure 1. A noter que c_{\pm} sont réelles pour $|k|$ assez petit ou assez grand et qu'il n'existe qu'une petite fenêtre d'instabilité où $|\Im c_{\pm}(k)| > 0$.

Un argument perturbatif permet alors de montrer l'existence d'un mode instable de la forme (30) pour un profil de cisaillement u_{ref} régulier, convolution de la fonction définie par (33) par une fonction C^{∞} de petit support $[-\mu, +\mu]$. Le profil u_{ref} obtenu est alors affine sur $[0, 1 - \mu]$, $[1 + \mu, 2 - \mu]$, $[2 + \mu, +\infty[$.

Il est tentant de considérer alors

$$u^{app}(t) = u_{ref} + \delta v(t) \quad (34)$$

comme solution approchée d'Euler. Hélas, $\|v\|_{L^2} \sim C \exp(\lambda t)$ avec $\lambda \leq 0.3$ croit trop lentement et une estimation d'énergie de la forme (29) conduit à

$$u^{\delta} = u_{ref} + \delta v(t) + O(\delta^2 \exp(2t)) \quad (35)$$

où u^{δ} est la solution d'Euler avec donnée initiale $u_{ref} + \delta v(0)$, ce qui est insuffisant pour conclure.

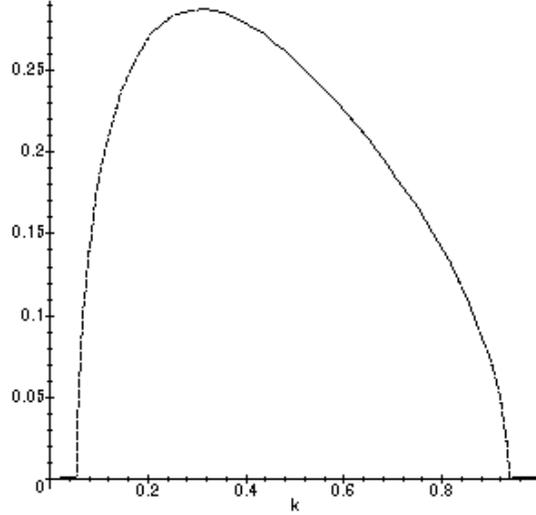


Figure 1: $|\mathfrak{S}c_+(k)|$ (see also [6])

On est donc amené à préciser le développement et chercher u^{app} sous la forme

$$u^{app}(t) = u_{ref} + \delta v(t) + \delta^2 v_2(t) + \dots + \delta^N v_N(t) \quad (36)$$

avec

$$\|v_j\|_{L^2} \leq C_j \exp(j\lambda t). \quad (37)$$

Si $\lambda N > 2|u_{ref}|_{Lip}$ une estimation d'énergie L^2 simple fournit

$$u^\delta = u_{ref} + \delta v(t) + \delta^2 v_2(t) + \dots + \delta^N v_N(t) + O\left(\delta^{N+1} \exp((N+1)\lambda t)\right) \quad (38)$$

ce qui est suffisant pour conclure. Le point délicat est alors de prouver (37), ce qui nécessite un résultat précisé sur le rayon spectral de (27,28), qui raffine (29), résultat détaillé dans le paragraphe suivant.

3.2 Un lemme sur le rayon spectral

Lemme 3.2 *Soit k fixé et $v(t, x, y)$ une solution de (27,28) de la forme (30). Soit $\omega = \text{rot } v = \omega_k(t, y) \exp(ikx)$, alors*

$$\|\omega_k(t, y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)} \leq C_{k,\eta} \exp\left((k|\mathfrak{S}c_\pm(k)| + \eta)t\right) \|\omega_k(0, y)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_+)}, \quad (39)$$

avec $\eta \rightarrow 0$ quand $\mu \rightarrow 0$.

De façon simplifiée, ce lemme permet de montrer pour v_2, \dots, v_N ,

$$\|v(t)\| \leq C \exp\left(\sup_k (k|\Im c_{\pm}| + \eta)t\right) \|v(0)\|$$

ce qui améliore (29) (les normes $\|\cdot\|$ non précisées ici sont des normes à poids un peu tordues). Ce lemme permet de montrer (37) en jouant avec le profil $c_{\pm}(k)$ de la figure 1 et sur les périodes k qui interviennent.

Pour prouver (39) on écrit (27) sous la forme de l'équation de Rayleigh dépendant du temps

$$(\partial_t + ik u_{ref})\omega_k = ik\Psi_k \partial_{yy}^2 u_{ref}, \quad (40)$$

$$(\partial_{yy}^2 - k^2)\Psi_k = \omega_k, \quad (41)$$

$$\Psi_k = 0 \quad \text{pour } y = 0 \quad \text{et } y \rightarrow +\infty. \quad (42)$$

On utilise ensuite que $\partial_{yy}^2 u_{ref}$ est nul hors de $I = [1 - \mu, 1 + \mu] \cup [2 - \mu, 2 + \mu]$ pour résoudre explicitement (40,41,42) hors de I , puis le fait que I est de longueur petite pour se ramener par perturbation au cas $\mu = 0$ et ainsi à la matrice 2×2 de valeurs propres c_{\pm} introduite précédemment. Cette dernière étape s'appuie sur une analyse fine des différentes sources de vorticité et sur les phénomènes physiques sous jacents. A noter que ce lemme n'est pour l'instant prouvé que pour des profils de vitesse très particuliers.

References

- [1] V.I. Arnold : Sur la géométrie différentielle des groupes de Lie de dimension infinie et ses applications à l'hydrodynamique des fluides parfaits, *Annales de l'Institut Fourier*, 16 (1969) 319 – 361.
- [2] Y. Brenier : Reformulations of some inviscid hydrostatic models, *preprint*, 1997.
- [3] R.E. Caflisch, M. Sanmartino : Zero viscosity limit for analytic solutions of the Navier-Stokes equation on a half-space I. and II. *preprint*
- [4] B. Desjardins, E. Grenier : Derivation of quasigeostrophic equations, *to appear in Adv Diff Equ.*

- [5] B. Desjardins, E. Grenier : On the homogeneous model of wind driven ocean circulation, *preprint*, 1997.
- [6] B. Desjardins, E. Grenier : Reynolds.n, a package to compute critical Reynolds number, *preprint et <http://www.dmi.ens.fr/~grenier>*.
- [7] P.G. Drazin, W.H. Reid : Hydrodynamic stability, *Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics*, 1981.
- [8] W. E., B. Engquist : Blow up of solutions to the unsteady Prandtl equations, *Comm. Pure Appl. Math.* 50 (1997), 1287 – 1293.
- [9] S. Friedlander, W. Strauss, M. Vishik : Nonlinear instability in an ideal fluid, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 14 (1997), no. 2, 187 – 209.
- [10] H. P. Greenspan : The theory of rotating fluids, *Cambridge monographs on mechanics and applied mathematics*, 1969.
- [11] E. Grenier : On the stability of boundary layers of Euler equations, *preprint*, 1998.
- [12] E. Grenier, O. Guès : On the inviscid limit of noncharacteristic nonlinear parabolic systems. *Journal Diff. Equ.*, 143 (1998), 110 – 146.
- [13] O. Guès : Perturbations visqueuses de problèmes mixtes hyperboliques et couches limites, *Annales Institut Fourier, Grenoble*, (1995), 973-1006.
- [14] T. Kato : Remarks on zero viscosity limit for nonstationary Navier Stokes flows with boundary. *Seminar on nonlinear partial differential equations (Berkeley, Calif., 1983)*, 85 – 98, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 2, *Springer, New York-Berlin*, 1984.
- [15] L. Landau, E. Lifchitz : Mécanique des fluides, *Mir*, 1959.
- [16] O.A. Oleinik : A system of boundary layer equations for non-stationary flow of an incompressible fluid, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 168 (1966) 751 – 754.
- [17] Lord Rayleigh : On the stability, or instability, of certain fluid motions, *Proc. London Math. Soc.*, 11 (1880), 57 – 70.