Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

R. Danchin

Poches de tourbillon visqueuses

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 9, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A9_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

POCHES DE TOURBILLON VISQUEUSES

R. DANCHIN

Exposé n° IX

21 Mai 1996

Introduction

Dans les pages qui suivent, nous étudions la stabilité du problème des poches de tourbillon pour un fluide incompressible visqueux dans le plan. Plus concrètement, si ν est une constante strictement positive, le système incompressible de Navier-Stokes s'écrit

$$(NS_\nu) \qquad \begin{cases} \partial_t v_\nu + v_\nu \cdot \nabla v_\nu - \nu \Delta v_\nu = -\nabla p_\nu, \\ \operatorname{div} v_\nu = 0, \\ v_\nu(0) = v^0, \end{cases}$$

où v_ν un champ de vecteurs sur $\mathbb{R}^2$ dépendant du temps.

Ici, on va résoudre (NS_ν) en faisant des hypothèses de régularité tangentielle sur le tourbillon $\omega_\nu = \partial_1 v_\nu^2 - \partial_2 v_\nu^1$, qui contiennent le cas des poches de tourbillon à frontière régulière (ω_ν fonction caractéristique d'un ouvert borné à frontière $C^{1+\epsilon}$) et ont été introduites par J.-Y. Chemin dans le cadre non visqueux. Avec de telles données initiales, le système d'Euler

$$(E) \qquad \begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v = -\nabla p, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v_{|t=0} = v^0, \end{cases}$$

admet une unique solution dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$, Lip désignant les fonctions bornées et lipschitziennes (voir [Ch2]).

De plus, J.-Y. Chemin montre que la structure géométrique initiale est transportée par le flot ψ de v sans perte de régularité. Ce résultat combiné avec la conservation du tourbillon le long des lignes de flot entraîne qu'une poche de tourbillon à frontière $C^{1+\epsilon}$ reste à frontière $C^{1+\epsilon}$ pour tout temps (voir également la note [S] de P. Serfati qui utilise une autre méthode).

Dans ce texte, on va montrer des résultats analogues pour (NS_ν), uniformes en ν ainsi qu'une propriété de convergence forte des solutions v_ν de (NS_ν) vers la solution v de (E) avec même donnée initiale en un sens qui préserve la régularité tangentielle. Plus précisément, on a :

Théorème 0.1.—*Soit Ω^0, un ouvert borné de $\mathbb{R}^2$ dont la frontière est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$). Soit v^0, le champ à divergence nulle et de tourbillon $\omega_0 = 1_{\Omega^0}$, donné par la loi de Biot-Savart :*

$$v^0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{|x-y|^2} \omega^0(y)\, dy$$

Alors, pour tout $\nu > 0$, (NS_ν) (resp. (E)) admet une unique solution v_ν (resp. v) dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$, avec donnée initiale v^0. De plus, il existe une constante C ne dépendant que de Ω^0, telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \sup_{\nu > 0} \|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty} \leq C e^{Ct} \qquad et \qquad \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C e^{Ct}.$$

Soit $\Omega_\nu(t)$ (resp. $\Omega(t)$), le domaine transporté de Ω^0 par le flot de v_ν (resp. v) à l'instant t. Alors, $\partial\Omega(t)$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$ et, pour tout $\epsilon' \in]0, \epsilon[$, $\partial\Omega_\nu(t)$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon'}$. De plus, il existe des applications $\gamma_\nu \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \cap_{\epsilon' < \epsilon} C^{1+\epsilon'}(S^1, \mathbb{R}^2))$ et $\gamma \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^{1+\epsilon}(S^1, \mathbb{R}^2))$ telles que $\gamma_\nu(t)$ et $\gamma(t)$ soient des paramétrisations régulières de $\partial\Omega_\nu(t)$ et $\partial\Omega(t)$ et que γ_ν tende vers γ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \cap_{\epsilon' < \epsilon} C^{1+\epsilon'}(S^1, \mathbb{R}^2))$ lorsque ν tend vers 0.

Évidemment, à cause du terme visqueux, une poche de tourbillon ne demeure pas une poche de tourbillon pour tout temps, le tourbillon n'étant plus conservé le long des lignes de flot. On peut toutefois montrer que le tourbillon décroît exponentiellement hors de $F_t = \psi_t(\mathrm{Supp}(\omega^0))$ et qu'il tend à être égal à 1 à l'intérieur de ce domaine. Plus précisément, on a :

Théorème 0.2.—*Sous les hypothèses du théorème* 0.1, *il existe une constante C ne dépendant que de Ω^0 telle que* $\forall\nu > 0$, $\forall t > 0$, $\forall h > 0$,

$$\|\omega_\nu(t)\|_{L^2\left((\Omega_{\nu,t})_h^c\right)} \leq e^{-\frac{h^2}{4\nu t}\exp\left(-4(e^{Ct}-1)\right)}\|\omega^0\|_{L^2},$$

$$\|\omega_\nu(t) - 1_{\Omega_{\nu,t}}\|_{L^2\left((\Omega_{\nu,t}^c)_h\right)} \leq 2\|\omega^0\|_{L^2}\min\left(1, C\frac{(\nu t)^{1/2}}{h}e^{2(e^{Ct}-1)}e^{-\frac{h^2}{32\nu t}\exp\left(-4(e^{Ct}-1)\right)}\right).$$

Ces deux théorèmes précisent un résultat de convergence L^2 de J.-Y. Chemin [Ch3] et une étude de P. Constantin et J. Wu [CW], faite dans le cadre des poches de tourbillon.

Le texte est organisé de la manière suivante :

Dans la première partie, nous démontrons le résultat de décroissance exponentielle puis nous énonçons un théorème de convergence pour les poches de tourbillon généralisées. Nous montrons qu'il entraîne facilement le théorème 0.1.

Dans la deuxième partie, nous rappelons quelques lemmes relatifs au paraproduit.

Dans la troisième partie, on prouve une estimation de $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ indépendante de la viscosité, puis le théorème de convergence énoncé dans la première partie.

La quatrième partie est consacrée à l'étude des équations de transport avec viscosité. On démontre au passage une variante du lemme de Poincaré qui permet, dans certains cas, de minorer $\|\nabla u^p\|_{L^2}$ à l'aide de $\|u^p\|_{L^2}$ pour $p \in \mathbb{N}^*$.

Enfin, dans la dernière partie, nous démontrons un lemme de commutation qui a été utilisé dans la troisième partie.

On adoptera systématiquement la convention d'Einstein pour la sommation sur les indices i, j et k. Dans tout l'article, d désignera un entier strictement positif.

1 Démonstration des résultats principaux

1.1 Un résultat de décroissance exponentielle

Dans cette partie, on montre le théorème 0.2. Il résulte en fait d'une propriété des équations paraboliques valable en dimension d quelconque, totalement indépendante du fait que v_ν soit solution de (NS_ν). On va démontrer le théorème suivant :

Théorème 1.1.—*Soit $\nu > 0$ et v un champ de vecteurs dépendant du temps, appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^d))$ et à divergence nulle. Soit $a_0 \in L^2(\mathbb{R}^d)$. On suppose que a vérifie*

$$(T_\nu) \qquad \begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)a = 0, \\ a_{|t=0} = a_0. \end{cases}$$

Soit ψ le flot de v et $F_t = \psi_t(\mathrm{Supp}(a_0))$. Posons $(F_t)_h^c = \{x \in \mathbb{R}^2,\ d(x, F_t) > h\}$, $(F_t^c)_h = \{x \in F_t,\ d(x, \partial F_t) > h\}$ et $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^\infty} ds$. Alors on a pour tous $t > 0$, $h > 0$,

$$(1.1) \qquad \|a(t)\|_{L^2\left((F_t)_h^c\right)} \leq e^{-\frac{h^2}{4\nu t}\exp(-4V(t))}\|a_0\|_{L^2}.$$

Dans le cas où a_0 est la fonction caractéristique d'un domaine borné F_0, on a de plus

$$(1.2) \qquad \|a(t) - 1_{F_t}\|_{L^2\left((F_t^c)_h\right)} \leq 2\|a_0\|_{L^2}\min\left(1, C\left(\frac{\nu t}{h^2}\right)^{1/2}e^{2V(t)}e^{-\frac{h^2}{32\nu t}\exp(-4V(t))}\right),$$

où C est une constante universelle.

Démonstration : La démonstration repose sur une méthode d'énergie. Soit Φ, une application de $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$. Supposons dans un premier temps que $v\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))^d)$ et $a\in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+;\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$. D'après (T_ν), Φa vérifie

$$(1.3)\qquad (\partial_t+v\cdot\nabla-\nu\Delta)(\Phi a)=a(\partial_t+v\cdot\nabla)\Phi-\nu a\Delta\Phi-2\nu\nabla\Phi\cdot\nabla a.$$

Pour simplifier le second membre, il est judicieux de choisir une application Φ telle que $\Phi(t,\psi(t,x))=\Phi_0(x)$. Supposons de plus que Φ_0 est constante hors d'un compact. Dans ces conditions, $\Phi a(t)$ est dans H^1. En prenant le produit scalaire de (1.3) avec $\Phi a(t)$ au sens L^2 en se souvenant que $\operatorname{div} v=0$ et en intégrant par parties, on trouve

$$(1.4)\qquad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\|\Phi a\|^2_{L^2}\right)+\nu\|\nabla(\Phi a)\|^2_{L^2}=\nu\|a\nabla\Phi\|^2_{L^2}.$$

Pour démontrer (1.1), prenons Φ de la forme $\Phi(t,x)=\exp\phi(t,x)$ avec $\phi(t,x)=f(\psi^{-1}(t,x))$ et f constante hors d'un compact. D'après (1.4), il vient alors

$$\frac{d}{dt}\left(\|(\Phi a)(t)\|^2_{L^2}\right)\leq 2\nu\|\nabla\phi(t)\|^2_{L^\infty}\|(\Phi a)(t)\|^2_{L^2}.$$

Le lemme de Gronwall montre finalement que

$$(1.5)\qquad \|(\Phi a)(t)\|_{L^2}\leq e^{\nu\|\nabla f\|^2_{L^\infty}\int_0^t\|\nabla\psi^{-1}(s)\|^2_{L^\infty}ds}\|(\Phi a)(0)\|_{L^2}.$$

Si a_0 à support compact, on prend $f=\alpha\min\{R,d(x,F_0)\}$ avec $R>0$ et $\alpha>0$. Comme f n'est que lipschitzienne, il convient, pour pouvoir utiliser (1.5), de la régulariser par convolution avec des approximations de l'identité. Il est clair que (1.5) est stable par passage à la limite et que $\|\nabla f\|_{L^\infty}\leq\alpha$.

Comme $\|\nabla\psi_t^{-1}\|_{L^\infty}\leq e^{V(t)}$ avec $V(t)=\displaystyle\int_0^t\|\nabla v(s)\|_{L^\infty}\,ds$ on en déduit finalement

$$\|(\Phi a)(t)\|_{L^2}\leq e^{\nu\alpha^2t\exp(2V(t))}\|a_0\|_{L^2}.$$

Donc, si $0<\eta\leq R$,

$$(1.6)\qquad e^{\alpha\eta}\|a(t)\|_{L^2\left(\psi_t((F_0)^c_\eta)\right)}\leq e^{\nu\alpha^2t\exp(2V(t))}\|a_0\|_{L^2}.$$

Maintenant, il ne reste plus qu'à remarquer que, si $F_t=\psi_t(F_0)$ et $h>0$, alors

$$(1.7)\qquad (F_t)^c_h\subset\psi_t\big((F_0)^c_{\delta(t,h)}\big)\quad\text{avec}\quad \delta(t,h)=\frac{h}{\|\nabla\psi_t\|_{L^\infty}}.$$

Reprenons l'inégalité (1.6) avec $\eta=\delta(t,h)$ et $\delta(t,h)\leq R$. On trouve

$$\|a(t)\|_{L^2\left((F_t)^c_h\right)}\leq e^{\nu\alpha^2t\exp(2V(t))-\alpha h\exp(-V(t))}\|a_0\|_{L^2}.$$

Pour obtenir (1.1), on fait tendre R vers l'infini et on choisit $\alpha=\dfrac{he^{-3V(t)}}{2\nu t}$.

Lorsque a et v vérifient seulement les hypothèses du théorème 1.1, mais que a_0 est encore à support compact, on obtient encore (1.1) en régularisant a_0 et v.

Enfin, si F_0 n'est pas compact, on note $a_{0,n} = 1_{B(0,n)}a_0$ et a_n la solution de (T_ν) correspondante. Un passage à la limite donne encore (1.1). □

La démonstration de (1.2) est similaire. Le lecteur intéressé pourra consulter [D].

1.2 Un théorème de convergence pour Navier-Stokes

Pour énoncer les résultats obtenus dans toute leur généralité, nous devons d'abord définir une classe d'espaces fonctionnels, construits à partir d'espaces de Besov à deux indices. Pour définir les espaces de Besov, nous aurons besoin de la notion de décomposition de Littlewood-Paley :

Proposition 1.1.—*Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^d$, la couronne de centre 0 de petit rayon 5/6, de grand rayon 12/5 et $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^d$, la boule de centre 0 et de rayon 6/5. Il existe deux applications à valeurs réelles, $\chi \in C_0^\infty(\mathcal{B})$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathcal{C})$ telles que :*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \chi(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi(2^{-q}\xi) = 1,$$
$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d,\ \tfrac{1}{3} \leq \chi^2(\xi) + \sum_{q\in\mathbb{N}} \varphi^2(2^{-q}\xi) \leq 1.$$

On définit alors des opérateurs Δ_p et S_p de $\mathcal{L}(\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d), C^\infty(\mathbb{R}^d))$ qui correspondent à des découpages des distributions en morceaux de fréquences voisines de 2^p pour Δ_p et plus petites que 2^p pour S_p.

Plus précisément, soit $h = \mathcal{F}^{-1}\varphi$ et $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$. On pose

$$\Delta_p u = 0 \ \text{ si } \ p \leq -2 \quad \text{et} \quad \Delta_{-1} u = \chi(D)u = \tilde{h} \star u,$$
$$\Delta_p u = \varphi(2^{-p}D)u = 2^{pd}\int h(2^p y)u(x-y)\,dy \ \text{ si } \ p \geq 0,$$
$$S_p u = \chi(2^{-p}D)u = \sum_{q\leq p-1} \Delta_q u = 2^{pd}\int \tilde{h}(2^p y)u(x-y)\,dy.$$

Définition 1.1.—*Pour $a \in [1,+\infty]$ et $r \in \mathbb{R}$, on note $B_a^r(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ telles que $\sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^a} < \infty$.*

Si l'on pose $\|u\|_{B_a^r} = \sup_q 2^{qr}\|\Delta_q u\|_{L^a}$, l'espace $\left(B_a^r(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_{B_a^r}\right)$ est un Banach. L'espace B_∞^r coïncide avec l'espace de Hölder C^r lorsque r est positif non entier. Si $r \in \mathbb{N}$, on préférera le noter $C_\star^r$ pour éviter les confusions avec l'espace des applications r fois continûment différentiables. On peut juste dire que $\mathrm{Lip}_r \hookrightarrow C_\star^r$ où Lip_r désigne l'espace des distributions u telles que $\partial^\alpha u$ soit bornée pour $|\alpha| \leq r$. On posera $\|u\|_r \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{B_\infty^r}$.

Remarque 1.1.— On a le classique résultat d'interpolation suivant

$$\forall u \in B_a^s(\mathbb{R}^d) \cap B_a^t(\mathbb{R}^d),\ \forall \theta \in [0,1],\ \|u\|_{B_a^{\theta s+(1-\theta)t}} \leq \|u\|_{B_a^s}{}^{\theta}\|u\|_{B_a^t}{}^{1-\theta}.$$

Remarque 1.2.— Si $1 \leq a \leq \infty$, B_a^r est continûment inclus dans $C^{r-\frac{d}{a}}$. Réciproquement, si $u \in C^r$ $(r > 0)$ est à support compact, alors u appartient à tous les B_a^r avec $a \in [1,+\infty]$.

Les fonctions suffisamment régulières opèrent à droite et à gauche dans les espaces de Besov :

Lemme 1.2.—*Soit $s \in]0,1[$, $a \in [1,+\infty]$ et $u \in B_a^s$. Soit $F \in \mathrm{Lip}$ telle que $F(0) = 0$. Alors $F \circ u \in B_a^s$. Si $\psi \in \mathrm{Lip}$ est inversible et si le jacobien de ψ^{-1} est borné, alors $u \circ \psi \in B_a^s$. De plus,*

$$\|u \circ \psi\|_{B_a^s} \leq (1 + \|\nabla\psi\|_{L^\infty})(\|\det \nabla\psi^{-1}\|_{L^\infty})^{\frac{1}{a}}\|u\|_{B_a^s}. \tag{1.8}$$

En s'inspirant de [A] et de [Ch1], on va maintenant définir des espaces de Besov non isotropes, à partir de champs de vecteurs peu réguliers.

Définition 1.2.—*Soit X un champ de vecteurs. On définit formellement l'action de X sur u par $X(x,D)u = \partial_i(X^i u) - u \operatorname{div} X$.*

Dans la suite, on considérera des champs à coefficients et à divergence dans B^r_a. On note alors

$$\|X\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \sum_{i=1}^{d} \|X^i\|_{B^r_a} \qquad \text{et} \qquad \widetilde{\|}X\|_{B^r_a} \stackrel{\text{déf}}{=} \|X\|_{B^r_a} + \|\operatorname{div} X\|_{B^r_a}.$$

Définition 1.3.—*Soit $a \in]2,\infty[$ et $s \in]2/a, 1[$. On dira qu'une famille $X = (X_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ de champs de vecteurs est (s,a)-substantielle si et seulement si les X_λ sont à coefficients et à divergence dans $B^s_a(\mathbb{R}^2)$ et*

$$I(X) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{x\in\mathbb{R}^d} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_\lambda(x)| > 0.$$

On note alors $B^s_a(X)$, l'espace des distributions u, bornées sur $\mathbb{R}^2$ telles que $\forall\lambda\in\Lambda$, $X_\lambda(x,D)u \in B^{s-1}_a(\mathbb{R}^2)$ et $\sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x,D)u\|_{B^{s-1}_a} < \infty$, muni de la norme

$$\|u\|_{B^s_{a,X}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\frac{1}{I(X)}\right)\left(\|u\|_{L^\infty} \sup_{\lambda\in\Lambda} \widetilde{\|}X_\lambda\|_{B^s_a} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \|X_\lambda(x,D)u\|_{B^{s-1}_a}\right).$$

Proposition 1.2.—*Soit v un champ de vecteurs lipschitzien et ψ son flot. Soit X_0 un champ de vecteurs de B^s_a. On note X_t le champ transporté de X_0 par le flot ψ à l'instant t, défini par $X_t(x) = X_0(x,D)\psi_t(\psi_t^{-1}(x))$. Alors X_t est solution de*

$$(TG) \qquad \begin{cases} (\partial_t + v\cdot\nabla)X = X(x,D)v \\ X_{|t=0} = X_0 \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de l'article, qui entraînera en particulier le theorème 0.1. Dans le théorème suivant, les quantités ayant ν en indice (resp. sans indice) sont liées à (NS_ν) (resp. (E)).

Théorème 1.2.—*Soit $a \in]2,+\infty[$ et $s \in]2/a, 1[$. Soit X_0, une famille (s,a)-substantielle de champs de vecteurs. On suppose que le champ de vecteurs v^0 est à coefficients dans $C^1_\star(\mathbb{R}^2)$, à gradient dans $L^2(\mathbb{R}^2)$, à divergence nulle et que son tourbillon ω^0 est dans $B^s_a(X_0)$.*

Alors, pour tout $\nu > 0$, (NS_ν) (resp. (E)) admet une unique solution v_ν (resp. v) dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$ avec donnée initiale v^0.

De plus, il existe une constante C ne dépendant que de ω^0 et X_0 telle que

$$\|\nabla v_\nu(t)\|_{L^\infty\cap L^2} + \|X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu(t)\|_{B^s_a} + \widetilde{\|}X_{\nu,\lambda}(t)\|_{B^s_a} + \|X_{\nu,\lambda}(x,D)\omega_\nu(t)\|_{B^{s-1}_a} \leq Ce^{e^{Ct}-1}.$$

Enfin, v_ν tend vers v et $\psi_\nu - Id$ tend vers $\psi - Id$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^r)$ pour $r < 1$, lorsque ν tend vers 0. Si $t < s$, alors $X_{0,\lambda}(x,D)\psi_\nu$, $X_{\nu,\lambda}$ et $divX_{\nu,\lambda}$ tendent respectivement vers $X_{0,\lambda}(x,D)\psi$, X_λ et $divX_\lambda$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^t_a)$ et $X_{\nu,\lambda}(x,D)\omega_\nu$ tend vers $X_{0,\lambda}(x,D)\omega$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^{t-1}_a)$. Les convergences précédentes sont uniformes en λ.

La démonstration repose sur un théorème abstrait, relatif aux équations de transport avec viscosité dans les espaces de Besov :

Théorème 1.3.—*Soit v un champ de vecteurs de $C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^d)$ à divergence nulle et à dérivées spatiales bornées. Soit $r \in]-1,1[$, $a \in [2,+\infty[$ et $\nu > 0$. Soit $u \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, B^r_a(\mathbb{R}^d))$,*

$f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, B^r_a(\mathbb{R}^d))$ et $g \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+, B^{r-2}_a(\mathbb{R}^d))$. Supposons qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $\operatorname{Supp} \widehat{g} \cap B(0,\lambda) = \emptyset$ *et que u vérifie*

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)u - \nu\Delta u = f + \nu g.$$

Alors il existe une constante C ne dépendant que de λ, de r et de a, telle que, si $V(t) = \int_0^t \|\nabla v(s)\|_{L^\infty}\, ds$, on ait

$$\|u(t)\|_{B^r_a} \leq C\Big(\|u(0)\|_{B^r_a} + \|g\|_{L^\infty([0,t];B^{r-2}_a)} + \int_0^t e^{-CV(s)}\|f(s)\|_{B^r_a}\, ds\Big)e^{CV(t)}. \tag{1.9}$$

Si $\nu = 0$ et $a \in [1, +\infty]$, il existe C ne dépendant que de r telle que

$$\|u(t)\|_{B^r_a} \leq \Big(\|u(0)\|_{B^r_a} + \int_0^t e^{-CV(s)}\|f(s)\|_{B^r_a}\, ds\Big)e^{CV(t)}. \tag{1.10}$$

Montrons que le théorème 1.2 entraîne le théorème 0.1.

Soit Ω^0 un ouvert borné dont la frontière $\partial\Omega^0$ est une courbe simple de classe $C^{1+\epsilon}$. Il existe donc une application $f \in C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}^2)$, que l'on peut choisir à support compact, dont le gradient ne s'annule pas dans un voisinage V de $\partial\Omega^0$ et telle que $f^{-1}(\{0\}) \cap V = \partial\Omega^0$.

Si $x^0 \in \partial\Omega^0$, la fonction γ^0 de $C^{1+\epsilon}(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ définie par

$$\begin{cases} \partial_\sigma \gamma^0(\sigma) = \nabla^\perp f(\gamma^0(\sigma)), \\ \gamma^0(0) = x_0, \end{cases}$$

est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega^0$.

Soit $\alpha \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$ valant 1 près de V. Posons

$$X_{0,0} = \nabla^\perp f, \qquad X_{0,1} = (1-\alpha)\partial_1, \qquad X_{0,2} = (1-\alpha)\partial_2.$$

Cette famille de champs de vecteurs est (ϵ, a)-substantielle pour tout $a \in [1, +\infty]$ d'après la lemme 1.2. De plus, $1_{\Omega^0} \in B^\epsilon_a(X_0)$.

Le théorème 1.2 donne donc une unique solution globale pour (NS_ν) avec de telles données initiales. Soit $\Omega_\nu(t)$, l'image du domaine Ω_0 par le flot $\psi_{\nu,t}$ de v_ν. Il est clair que $\gamma_\nu(t) = \psi_{\nu,t} \circ \gamma^0$ (resp. $\gamma(t) = \psi_t \circ \gamma^0$) est une paramétrisation de $\partial\Omega_{\nu,t}$ (resp. $\partial\Omega_t$). Dans [Ch2], il est démontré que $\gamma \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^{1+\epsilon}(S^1, \mathbb{R}^2))$ et que γ_t est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega_t$.

En appliquant le théorème 1.2, on sait que $X_{0,0}(x,D)\psi_\nu \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^\epsilon_a)$ et converge vers $X_{0,0}(x,D)\psi$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^{\epsilon'}_a)$ pour tout $a \in]2/\epsilon, +\infty[$ et $\epsilon' < \epsilon$. En utilisant la remarque 1.2, on en déduit la convergence de $X_{0,0}(x,D)\psi_\nu$ vers $X_{0,0}(x,D)\psi$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \cap_{\epsilon'<\epsilon} C^{\epsilon'}(S^1, \mathbb{R}^2))$.

Or, $\partial_\sigma \gamma_{\nu,t} = X_{0,0}(x,D)\psi_{\nu,t} \circ \gamma^0$. Donc γ_ν appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \cap_{\epsilon'<\epsilon} C^{1+\epsilon'}(S^1, \mathbb{R}^2))$ et converge vers γ dans cet espace.

Enfin, comme $X_{0,0}$ ne s'annule pas sur V, il en est de même pour $X_{0,0}(x,D)\psi_{\nu,t}$ et donc $\partial_\sigma\gamma_{\nu,t}$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Donc $\gamma_\nu(t)$ est une paramétrisation régulière de $\partial\Omega_{\nu,t}$. $\square$

Remarque 1.3.— La petite perte de régularité de $\partial\Omega_{\nu,t}$ est "artificielle", c'est-à-dire qu'elle n'a lieu que dans les espaces de Hölder qui ne sont pas bien adaptés à l'étude des poches de tourbillon visqueuses.

2 Paraproduits, parachamps et espaces de Besov

Dans cette partie, nous définissons le paraproduit de deux distributions. Nous rappelons au passage quelques lemmes classiques qui nous permettront d'aborder la démonstration des résultats énoncés dans la partie précédente.

Remarque 2.1.— La famille $(\Delta_q)_{q\in\mathbb{Z}}$ est "presque" orthogonale au sens L^2. Plus précisément, si u et v appartiennent à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, on a

$$|p-q|\geq 2 \Rightarrow \Delta_p\Delta_q u \equiv 0, \tag{2.1}$$

$$|p-q|\geq 4 \Rightarrow \Delta_q\big(S_{p-1}u\Delta_p v\big) \equiv 0, \tag{2.2}$$

$$(q\leq r-4 \ \text{ et } \ |p-r|\geq 2) \Rightarrow \Delta_p\big(\Delta_q u\Delta_r v\big) \equiv 0. \tag{2.3}$$

Le lemme suivant est classique :

Lemme 2.1.—*Soit $u\in B^r_a$ et $\psi\in C_0^\infty$. On suppose que ψ est supportée dans une couronne $C(0,R_1,R_2)$. Alors, il existe une constante C ne dépendant que de r, et ψ telle que*

$$\|\psi(2^{-q}D)u\|_{L^a}\leq C2^{-qr}\|u\|_{B^r_a}. \tag{2.4}$$

Définition 2.1.—*On dira qu'une suite $(u_q)_{q\geq -1}$ d'éléments de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ est à fréquences dans des boules dyadiques (resp. couronnes dyadiques) si et seulement si il existe un réel $R>0$ (resp. deux réels $R_2>R_1>0$), tel(s) que* $\mathrm{Supp}(\hat{u}_q)\subset B(0,2^qR)$ *pour $q\geq -1$ (resp.* $\mathrm{Supp}(\hat{u}_q)\subset C(0,2^qR_1,2^qR_2)$*) pour $q\in\mathbb{N}$ et* $\mathrm{Supp}(\hat{u}_{-1})\subset B(0,2^{-1}R_2)$.)

Le lemme suivant sera constamment employé.

Lemme 2.2.—*Soit $(u_q)_{q\geq -1}$ à fréquences dans des boules dyadiques. On suppose qu'il existe $r>0$, $a\in[1,\infty]$ et une constante $K\geq 0$ tels que $\forall q\geq -1, \|u_q\|_{L^a}\leq K2^{-qr}$. Posons $u=\sum_{q\geq -1}u_q$. Alors $u\in B^r_a(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C\geq 0$ indépendante des u_q, de a et de r telle que*

$$\|u\|_{B^r_a}\leq \frac{C^{1+r}}{r}K. \tag{2.5}$$

Soit $(u_q)_{q\geq -1}$ à fréquences dans des couronnes dyadiques. On suppose qu'il existe $r\in\mathbb{R}$, $a\in[1,\infty]$ et une constante $K\geq 0$ tels que $\forall q\geq -1, \|u_q\|_{L^a}\leq K2^{-qr}$. Posons $u=\sum_{q\geq -1}u_q$. Alors $u\in B^r_a(\mathbb{R}^d)$ et il existe une constante $C\geq 0$ indépendante des u_q, de a et de r telle que

$$\|u\|_{B^r_a}\leq C^{1+|r|}K. \tag{2.6}$$

Définissons maintenant le paraproduit :

Définition 2.2.—*Soient $u\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. On appelle paraproduit de u par v, l'élément $T_uv\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ défini par $T_uv=\sum_q S_{q-1}u\Delta_q v$. On notera $R(u,v)$ le reste de u et v, défini par*

$$R(u,v)=\sum_q \Delta_q u\widetilde{\Delta}_q v \quad \text{où} \quad \widetilde{\Delta}_q=\Delta_{q-1}+\Delta_q+\Delta_{q+1}.$$

Lemme 2.3.—*L'opérateur T est bilinéaire continu de $L^\infty\times B^r_a$ dans B^r_a. Si $t<0$, il est également continu de $B^t_a\times C^r$ dans B^{r+t}_a et de $C^t\times B^r_a$ dans B^{r+t}_a.*

L'opérateur R est continu de $C^t\times B^r_a$ dans B^{r+t}_a, dès que $r+t>0$.

Dans certains cas, la commutation du paraproduit avec des opérateurs pseudo-différentiels homogènes permet de gagner de la régularité. Plus précisément, on a

Lemme 2.4.—*Soit $f\in C^\infty(\mathbb{R}^d)$, une application homogène de degré m en dehors d'une boule centrée sur l'origine, $\psi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ supportée dans une couronne $C(0,R_1,R_2)$, u et v, deux* *éléments de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, $\rho < 1$ et $q \in \mathbb{Z}$. Il existe des constantes C indépendantes de u, v et q vérifiant :*

$$\|f(D)u\|_{B_a^{s-m}} \leq C\|u\|_{B_a^s}, \tag{2.7}$$

$$\|[T_u, \psi(2^{-q}D)]v\|_{L^a} \leq C2^{-q(s+1)}\|\nabla u\|_{L^\infty}\|v\|_{B_a^s}, \tag{2.8}$$

$$\|[T_u, \psi(2^{-q}D)]v\|_{L^a} \leq C2^{-q(s+\rho)}\|\nabla u\|_{\rho-1}\|v\|_{B_a^s}, \tag{2.9}$$

$$\|[T_u, f(D)]v\|_{B_a^{s-m+1}} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|v\|_{B_a^s}, \tag{2.10}$$

$$\|[T_u, f(D)]v\|_{B_a^{s-m+\rho}} \leq C\|\nabla u\|_{\rho-1}\|v\|_{B_a^s}. \tag{2.11}$$

Définition 2.3.—*Soit X un champ de vecteurs à coefficients dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. On définit formellement le parachamp T_X par $T_X u = T_{X^i}\partial_i u$.*

Le lemme suivant montre que la régularité de $X(x,D)u$ est essentiellement donnée par celle de $T_X u$.

Lemme 2.5.—*Soit X, un champ de vecteurs à coefficients dans B_a^r et $u \in C^s$. Alors on a :*

$$(s < 1 \text{ et } r+s > 1) \Rightarrow \|T_X u - X(x,D)u\|_{B_a^{r+s-1}} \leq C\|X\|_{B_a^r}\|\nabla u\|_{s-1}. \tag{2.12}$$

Si, de plus, $\operatorname{div} X \in B_a^r$, *alors,*

$$(s < 1 \text{ et } r+s > 0) \Rightarrow \|T_X u - X(x,D)u\|_{B_a^{r+s-1}} \leq C\widetilde{\|X\|}_{B_a^r}\|\nabla u\|_{s-1}. \tag{2.13}$$

Les deux inégalités précédentes demeurent valables dans le cas $s = 1$ à condition de supposer $\nabla u \in L^\infty$ et de remplacer $\|\nabla u\|_{s-1}$ par $\|\nabla u\|_{L^\infty}$.

3 Persistance et convergence des poches de tourbillon généralisées

Dans cette partie, on trace les grandes étapes de la démonstration du théorème 1.2.

Première étape : Démonstration d'estimations uniformes en ν pour les solutions régulières de (NS_ν). Il s'agit de démontrer la proposition suivante :

Proposition 3.1.—*Soit v une solution du système de Navier-Stokes en dimension 2 et ψ son flot. On suppose que v est dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^\infty(\mathbb{R}^2))$, que ses dérivées spatiales sont bornées et que son tourbillon ω appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2(\mathbb{R}^2))$. Soit $a \in]2, +\infty[$, $s \in]2/a, 1[$, $(X_{0,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, une famille (s,a)-substantielle de champs de vecteurs et $(X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$, la famille transportée par le flot de v. Alors, X_t reste (s,a)-substantielle pour tout temps positif. De plus, il existe une constante C ne dépendant que de s et de a telle que les estimations suivantes soient vérifiées :*

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C\left(\|\omega_0\|_{L^2} + \|\omega_0\|_{L^\infty}\log\left(e + \frac{\|\omega_0\|_{B^s_{a,X_0}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\right)\right)e^{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}}, \tag{3.1}$$

$$\|\operatorname{div} X_{t,\lambda}\|_{B_a^s} \leq \|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_{B_a^s} E(X_0, \omega_0, t), \tag{3.2}$$

$$\|X_t(x,D)\omega(t)\|_{B_a^{s-1}} \leq C\left(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B_a^{s-1}} + \widetilde{\|X_0\|}_{B_a^s}\|\omega_0\|_{L^\infty}\right)E(X_0,\omega_0,t), \tag{3.3}$$

$$\|X(t)\|_{B_a^s} \leq C\left(\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B_a^{s-1}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \widetilde{\|X_0\|}_{B_a^s}\right)E(X_0,\omega_0,t), \tag{3.4}$$

$$I(X(t)) \geq \frac{I(X_0)}{E(X_0,\omega_0,t)}. \tag{3.5}$$

$$\|X_0(x,D)\psi(t)\|_{B_a^s} \leq C\left(\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B_a^{s-1}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \widetilde{\|X_0\|}_{B_a^s}\right)E(X_0,\omega_0,t), \tag{3.6}$$

$$avec \qquad E(X_0,\omega_0,t) = \exp\left(C\left(\frac{\|\omega_0\|_{L^2}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \log\left(e + \frac{\|\omega_0\|_{B^s_{a,X_0}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\right)\right)\left(e^{Ct\|\omega_0\|_{L^\infty}} - 1\right)\right).$$

Démonstration : Soit donc v une solution régulière de (NS_ν). En prenant le produit scalaire L^2 de (T_ν) avec $\omega(t)$, on obtient

$$\|\omega(t)\|_{L^2} \leq \|\omega_0\|_{L^2}. \tag{3.7}$$

Par le principe du maximum (voir [F] par exemple), il vient

$$\|\omega(t)\|_{L^\infty} \leq \|\omega_0\|_{L^\infty}. \tag{3.8}$$

On va maintenant montrer l'analogue des inégalités (3.2) à (3.5) avec $e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau}$ au lieu de $E(X_0,\omega_0,t)$.

Pour commencer, l'estimation

$$I(X_t) \geq I(X_0) e^{-\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau} \tag{3.9}$$

se démontre facilement en revenant à la définition de X_t. Il suffit de remarquer que

$$\partial_t(X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x)) = \nabla v(t,\psi(t,x))X_{0,\lambda}(x,D)\psi(t,x),$$

d'intégrer puis d'utiliser le lemme de Gronwall.

Comme $(\partial_t + v\cdot\nabla)\operatorname{div} X_{t,\lambda} = 0$, l'estimation (1.10) donne

$$\|\operatorname{div} X_{t,\lambda}\|_{B^s_a} \leq \|\operatorname{div} X_{0,\lambda}\|_{B^s_a} e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau}. \tag{3.10}$$

Les autres estimations sont plus délicates à obtenir. Pour alléger les notations, on omet l'indice λ dans la suite de la démonstration.

Dans le cas $\nu = 0$ on exploite la commutation des deux champs $\partial_t + v\cdot\nabla$ et $X(t)$, ce qui, appliqué à l'équation du tourbillon donne $(\partial_t + v\cdot\nabla)X(x,D)\omega = 0$. La quantité $X(x,D)\omega$ est donc conservée par le flot et il n'est pas très difficile d'estimer sa norme de Besov.

Ici malheureusement, on ne peut qu'écrire

$$(\partial_t + v\cdot\nabla)X(x,D)\omega - \nu\Delta X(x,D)\omega = \nu[X(x,D),\Delta]\omega. \tag{3.11}$$

Il n'est pas évident de donner un sens au second membre avec pour seule hypothèse, $\omega \in B^s_a(X)$, le produit $X^i\Delta\omega$ n'étant pas défini.

L'idée à ce stade est de remplacer le champ X par le parachamp T_X, sachant qu'on pourra majorer l'erreur introduite à l'aide du lemme 2.5. Cette fois-ci, le commutateur $[T_X,\Delta]\omega$ a un sens dans B^{s-3}_a. D'après (2.7) et (2.11), on a

$$\|[T_X,\Delta]\omega\|_{B^{s-3}_a} \leq C\|X\|_{B^s_a}\|\omega\|_0. \tag{3.12}$$

Il y a bien sûr un prix à payer : $\partial_t + v\cdot\nabla$ et T_X ne commutent pas. C'est ici qu'intervient le lemme 5.1 qui donne l'estimation suivante :

$$\|[T_X,\partial_t + u\cdot\nabla]\omega\|_{B^{s-1}_a} \leq C\big(\|\nabla u\|_0\|T_X\omega\|_{B^{s-1}_a} + \|\nabla u\|_{L^\infty}\|\omega\|_0\|X\|_{B^s_a}\big).$$

Voici l'équation obtenue :

$$(3.13) \qquad (\partial_t + v\cdot\nabla)T_X\omega - \nu\Delta T_X\omega = [\partial_t + v\cdot\nabla, T_X]\omega + \nu[T_X,\Delta]\omega.$$

On applique le théorème 1.3 à $u = T_X\omega$. Il vient

$$(3.14) \qquad \|T_{X_t}\omega(t)\|_{B_a^{s-1}} \le C\Big(\|T_{X_0}\omega_0\|_{B_a^{s-1}} + \|X(t)\|_{B_a^s}\|\omega(t)\|_0$$
$$+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\big(\|\nabla v(\tau)\|_0\|T_{X_\tau}\omega(\tau)\|_{B_a^{s-1}} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\|\omega(\tau)\|_0\|X(\tau)\|_{B_a^s}\big)\,d\tau\Big)e^{CV(t)}.$$

En combinant (3.14) et (2.13) et en tenant compte de (3.8), on trouve

$$(3.15) \qquad \|X_t(x,D)\omega(t)\|_{B_a^{s-1}} \le C\Big(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B_a^{s-1}} + \|\omega_0\|_{L^\infty}\big(\widetilde{\|}X_0\|_{B_a^s} + \|X(t)\|_{B_a^s}\big)$$
$$+\int_0^t e^{-CV(\tau)}\|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\Big(\|X_\tau(x,D)\omega(\tau)\|_{B_a^{s-1}} + \|X(\tau)\|_{B_a^s}\|\omega_0\|_{L^\infty}\Big)\,d\tau\Big)e^{CV(t)}.$$

D'après (2.7), (2.11) et (2.12), on a

$$(3.16) \qquad \|X(x,D)v\|_{B_a^s} \le C(\|X(x,D)\omega\|_{B_a^{s-1}} + \|\operatorname{div} X\|_{B_a^s}\|\omega\|_0 + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|X\|_{B_a^s}).$$

En appliquant l'estimation (1.10) à (TG), on obtient donc

$$\|X(t)\|_{B_a^s} \le \Big(\|X_0\|_{B_a^s} + C\int_0^t e^{-CV(\tau)}\big(\|X_\tau(x,D)\omega_\tau\|_{B_a^{s-1}} + \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\widetilde{\|}X(\tau)\|_{B_a^s}\big)\,d\tau\Big)e^{CV(t)}.$$

À l'aide de cette dernière inégalité, de (3.8), (3.10) et (3.15) en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve

$$\frac{\|X_t(x,D)\omega(t)\|_{B_a^{s-1}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \widetilde{\|}X(t)\|_{B_a^s} \le C\bigg(\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B_a^{s-1}}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}} + \widetilde{\|}X_0\|_{B_a^s}\bigg)e^{CV(t)}.$$

En combinant avec (3.9), on obtient

$$(3.17) \qquad \|\omega(t)\|_{B^s_{a,X_t}} \le C\|\omega_0\|_{B^s_{a,X_0}} e^{C\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\,d\tau}.$$

Il faut maintenant estimer la norme uniforme du gradient de la vitesse. Ceci peut être fait via le théorème 3.3.1 de [Ch2]. En effet, il existe une constante C telle que, pour $\epsilon \in]0,1[$,

$$(3.18) \qquad \|\nabla v\|_{L^\infty} \le C\bigg(\|\omega\|_{L^2} + \frac{\|\omega\|_{L^\infty}}{\epsilon}\log\Big(e + \frac{\|\omega\|_{B^\epsilon_{\infty,X}}}{\epsilon\|\omega\|_{L^\infty}}\Big)\bigg).$$

Par la remarque 1.2, $B_a^s(\mathbb{R}^2)$ est inclus continûment dans $C^\epsilon(\mathbb{R}^2)$ avec $\epsilon = s - 2/a$. L'hypothèse $1 > s > 2/a$ donne $\epsilon \in]0,1[$. On peut donc majorer $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ à l'aide de (3.18)

$$(3.19) \qquad \|\nabla v\|_{L^\infty} \le C\bigg(\|\omega\|_{L^2} + \|\omega\|_{L^\infty}\log\Big(e + \frac{\|\omega\|_{B^s_{a,X}}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\Big)\bigg).$$

On obtient (3.1) en reportant (3.17) dans (3.19) pour majorer le logarithme puis en appliquant le lemme de Gronwall. Les inégalités (3.2) à (3.5) en découlent immédiatement.

Pour démontrer (3.6), il faut voir que $X_0(x,D)\psi(t,x) = X_t(\psi_t(x))$.

D'après l'inégalité (1.8), $\|X_t \circ \psi_t\|_{B^s_a} \leq C\|\nabla\psi_t\|_{L^\infty}\|X_t\|_{B^s_a}$. On conclut à l'aide de (3.4) et (3.19) en remarquant que $\|\nabla\psi_t\|_{L^\infty} \leq \exp\int_0^t \|\nabla v(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau$. □

Remarque 3.1.— Lorsque $\nu = 0$, on peut montrer des estimations indépendantes de a et valables aussi pour $a = +\infty$. La démonstration est en fait une application facile de (1.10), car l'absence du terme visqueux permet d'éviter le passage au paraproduit.

Remarque 3.2.— Il aurait été nettement plus facile de faire la démonstration dans le cas $a = 2$. En effet, le théorème 1.3 se démontre très simplement dans les espaces B^r_2. Malheureusement, pour récupérer une estimation de $\|\nabla v\|_{L^\infty}$ à l'aide de (3.19), on a besoin de l'inclusion de B^s_2 dans C^ϵ avec $\epsilon > 0$, ce qui donne comme contrainte $s > 1$. Mais l'estimation du commutateur $[T_X, \partial_t + v\cdot\nabla]\omega$ dans B^{s-1}_2 n'est valable que pour $s < 1$.

Deuxième étape : Estimations uniformes pour la donnée initiale régularisée.

Pour simplifier les notations, on omet les indices ν. On se donne un champ v^0 vérifiant les hypothèses du théorème 1.2 et on le régularise en posant $v_{0,n} = S_n v^0$. On a existence et unicité d'une solution régulière v_n de (NS_ν) avec la donnée initiale $v_{0,n}$. On lui applique les estimations de la proposition 3.1. Quitte à modifier la constante C, on obtient des estimations (3.1) à (3.6) uniformes en n. En effet, pour le voir, il suffit de montrer que

$$\|X_0(x,D)\omega_{0,n}\|_{B^{s-1}_a} \leq C(\|X_0(x,D)\omega_0\|_{B^{s-1}_a} + \|X_0\|_{B^s_a}\|\omega_0\|_{L^\infty}). \tag{3.20}$$

Pour cela, on applique les lemmes de la partie 2 à la relation

$$T_{X_0}\omega_{0,n} = \sum_{q\leq n-1} [T_{X_0^i}, \Delta_q]\partial_i\omega_0 + S_n T_{X_0}\omega_0.$$

Troisième étape : Convergence de v_n vers une solution v de (NS_ν) avec donnée initiale v^0.

D'après [Ch2], il existe un opérateur bilinéaire π tel que

$$(\partial_t + v_n.\nabla - \nu\Delta)(v_n - v_m) = \pi(v_n - v_m, v_n + v_m) + (v_m - v_n)\cdot\nabla v_m \tag{3.21}$$

avec $\|\pi(v,w)\|_r \leq C(\min\|v\|_{\mathrm{Lip}}\|w\|_r + \|w\|_{\mathrm{Lip}}\|v\|_r)$ pour $|r| < 1$.

Admettons la relation (4.17). Le lemme de Gronwall donne

$$\|v_n(t) - v_m(t)\|_{-\alpha} \leq \|v_{0,n} - v_{0,m}\|_{-\alpha} e^{CK(t)},$$

où $K(t)$ est un majorant uniforme de $\int_0^t \|\nabla v_n(\tau)\|_{L^\infty}\, d\tau$.

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de plus bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip})$, un argument d'interpolation (remarque 1.1) montre qu'elle converge dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^r)$ dès que $r < 1$ avec limite dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip})$. Il est aisé de vérifier que cette limite vérifie (NS_ν).

Notons que la relation (3.21) permet facilement d'obtenir l'unicité.

Quatrième étape : Régularité tangentielle.

α) Convergence du flot : En revenant à la définition du flot, on montre que

$$|\psi_n(t,x) - \psi(t,x)| \leq \int_0^t \|(v_n - v)(s)\|_{L^\infty}\, ds + \int_0^t \|\nabla v_n(s)\|_{L^\infty} |\psi_n(s,x) - \psi(s,x)|\, ds.$$

On en déduit que $\psi_n \to \psi$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; Id + L^\infty)$ puis dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; Id + C^r)$ pour $r < 1$.

β) Régularité de $X_{0,\lambda}(x, D)\psi$:

D'après (3.6), la suite $(X_{0,\lambda}(x, D)\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^s_a)$. Par ailleurs,

$$\|X_{0,\lambda}(x, D)\psi_n - X_{0,\lambda}(x, D)\psi\|_{B^{s-1}_a} \leq C\|\psi_n - \psi\|_s \widetilde{\|} X_{0,\lambda}\|_{B^s_a}.$$

On en déduit que $X_{0,\lambda}(x, D)\psi$ est dans B^s_a, vérifie (3.6) et que la suite $(X_{0,\lambda}(x, D)\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $X_{0,\lambda}(x, D)\psi$ dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^r_a)$ pour $r < s$.

γ) Régularité de $(X_{t,\lambda})_{\lambda\in\Lambda}$:

Remarquons que $X_{t,\lambda} = (X_{0,\lambda}(x, D)\psi_t) \circ \psi_t^{-1}$ et que $\operatorname{div} X_{t,\lambda} = \operatorname{div} X_0 \circ \psi_t^{-1}$. Le lemme 1.2 prouve que $X_{t,\lambda}$ et sa divergence ont la régularité voulue. Ce même lemme permet aussi de voir que $X_{t,\lambda,n}$ converge vers $X_{t,\lambda}$ dans tous les espaces $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^r_a)$ avec $r < s$. On en déduit que $E(X_0, \omega_0, t)I(X_t) \geq I(X_0)$. La famille X_t reste donc (s, a)-substantielle pour tout temps positif et vérifie les estimations de la proposition 3.1.

δ) Régularité de ω :

Montrons que $\|\omega(t)\|_{B^s_{a,X_t}} \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Pour cela, on écrit

$$\begin{aligned} X_{t,n}(x, D)\omega_n(t) - X_t(x, D)\omega(t) &= \omega(t)\operatorname{div}(X_t - X_{t,n}) \\ &+(\omega(t) - \omega_n(t))\operatorname{div} X_{t,n} + \operatorname{div}\big(\omega_n(t)(X_{t,n} - X_t) + (\omega_n(t) - \omega(t))X_{t,\lambda}\big). \end{aligned}$$

Les résultats précédents et une décomposition en paraproduit et reste permettent de voir que les quatre termes du second membre tendent vers 0 dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; B^{-1}_a)$. Comme de plus la suite $\|X_{t,n}(x, D)\omega_n(t)\|_{B^{s-1}_a}$ est bornée dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+)$, la démonstration est achevée. □

Remarque 3.3.— Les résultats précédents restent vrais dans le cadre eulérien. Il suffit d'utiliser la remarque 3.1 au lieu de la proposition 3.1.

Dernière étape : Convergence des solutions de (NS_ν) :

Comme $\omega_0 \in L^2 \cap L^\infty$, on peut utiliser un résultat de J.-Y. Chemin [Ch3] qui donne la convergence forte dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; L^2)$, de $v_\nu - v$ vers 0. Ensuite, on se sert de la classique inclusion de Sobolev $L^2(\mathbb{R}^2) \hookrightarrow C^{-1}(\mathbb{R}^2)$ et du caractère borné de v_ν et v dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; \mathrm{Lip}(\mathbb{R}^2))$, uniformément en ν, pour voir que v_ν tend vers v dans $L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^+; C^r)$ pour $r < 1$.

À ce stade, il n'y a plus qu'à reprendre la quatrième étape en remplaçant partout n par ν. □

4 Équations de transport avec viscosité

Dans cette partie, on démontre le théorème 1.3. L'estimation (1.10) est classique. Elle est montrée par exemple dans [Ch2] dans le cas $a = +\infty$. La démonstration de l'estimation (1.9) repose, quant à elle, sur le lemme suivant qui est une sorte de lemme de Poincaré :

Lemme 4.1.—*Soit $s \in \mathbb{R}^+$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L^2(\mathbb{R}^d)$ à valeurs réelles. On suppose qu'il existe deux compacts K^+ et K^- de $\mathbb{R}^d$ tels que*

$$(\alpha) \qquad K^- = -K^+,$$

$$(\beta) \qquad \mathrm{Supp}(\widehat{u}) = K^+ \cup K^-,$$

Posons $K(j) = \left\{ \sum_{l=1}^{j} x_l + \sum_{m=1}^{p-j} y_m,\ x_l \in K^+,\ y_m \in K^- \right\}$. *Si on suppose de plus que*

$$(\gamma) \qquad (0 \leq i, j \leq p \ \text{ et } \ i \neq j) \Rightarrow (K(i) \cap K(j) = \emptyset),$$

alors, on a $0 \notin K(p)$ *et*

$$\| |D|^s(u^p)\|_{L^2} \geq p! \sqrt{\frac{2}{(2p)!}} \big(d(0, K(p))\big)^s \|u^p\|_{L^2}. \tag{4.1}$$

Démonstration du lemme 4.1 : La condition (γ) entraîne en particulier $K^+ \cap K^- = \emptyset$. Si on pose $v^+ = \hat{u}\, 1_{K^+}$ et $v^- = \hat{u}\, 1_{K^-}$, on a donc $\hat{u} = v^+ + v^-$. Posons

$$v_i = \overbrace{(v^- \star \cdots \star v^-)}^{p-i \text{ facteurs}} \star \overbrace{(v^+ \star \cdots \star v^+)}^{i \text{ facteurs}}.$$

Pour tout $s \geq 0$, la condition (γ) entraîne l'orthogonalité au sens L^2 de la famille $(|\cdot|^s v_i)_{0 \leq i \leq p}$.

Soit $\quad u_p = \overbrace{\hat{u} \star \cdots \star \hat{u}}^{p \text{ facteurs}}$. On a alors $\quad u_p = \sum_{k=0}^{p} C_p^k v_k \quad$ et donc

$$\| |\cdot|^s u_p\|_{L^2}^2 = \sum_{k=0}^{p} (C_p^k)^2 \| |\cdot|^s v_k\|_{L^2}^2. \tag{4.2}$$

En utilisant les propriétés d'isométrie de la transformée de Fourier et son comportement vis-à-vis de la convolution, on voit que, pour démontrer (4.1), il suffit de prouver que

$$\| |\cdot|^s u_p\|_{L^2}^2 \geq \frac{2(p!)^2}{(2p)!} \big(d(0, K(p)\big)^{2s} \|u_p\|_{L^2}^2. \tag{4.3}$$

Comme u est réelle, on a pour presque tout ξ, $v^-(\xi) = \overline{v^+(-\xi)}$. Ceci entraîne l'égalité des normes L^2 de tous les v_k. Comme par ailleurs $\sum_{k=0}^{p} (C_p^k)^2 = (2p)!/(p!)^2$, l'égalité (4.2) donne $\|u_p\|_{L^2}^2 = \|v_p\|_{L^2}^2 (2p)!/(p!)^2$. Enfin, comme $v_p(-\xi) = \overline{v_0(\xi)}$, on a

$$\begin{aligned} \| |\cdot|^s u_p\|_{L^2}^2 &\geq 2\| |\cdot|^s v_p\|_{L^2}^2, \\ &\geq 2\|v_p\|_{L^2}^2 d\big(0, K(p)\big)^{2s}, \\ &\geq \frac{2(p!)^2}{(2p)!} \big(d(0, K(p))\big)^{2s} \|u_p\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Démonstration du théorème 1.3 : Supposons pour simplifier que $\Delta_{-1} u \equiv 0$. On fait un découpage de l'équation en couronnes dyadiques et on obtient

$$(\partial_t + v \cdot \nabla)\Delta_q u - \nu \Delta \Delta_q u = \Delta_q f + [v \cdot \nabla, \Delta_q] u + \nu \Delta_q g. \tag{4.4}$$

Il ne reste plus qu'à majorer convenablement $\|\Delta_q u\|_{L^a}$ pour $q \geq 0$.

Traitons d'abord le cas $a = 2$ qui est très simple. Posons $u_q = \Delta_q u$, $g_q = \Delta_q g$ et $f_q = \Delta_q f + [v.\nabla, \Delta_q]u$. En prenant le produit scalaire au sens L^2 de (4.4) avec u_q, on a

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q\|_{L^2}^2 + \nu \|\nabla u_q\|_{L^2}^2 = \int f_q(x) u_q(x)\, dx + \nu \int g_q(x) u_q(x)\, dx.$$

Supposons $q \geq 0$. Comme $\widehat{u}_q$ est supportée dans $2^q\mathcal{C}$, il existe une constante c telle que $\|\nabla u_q\|_{L^2}^2 \geq c2^{2q}\|u_q\|_{L^2}^2$ ($c = (5/6)^2$ convient). On en déduit l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q\|_{L^2}^2 + c2^{2q}\nu\|u_q\|_{L^2}^2 \leq \left(\|f_q\|_{L^2} + \nu\|g_q\|_{L^2}\right)\|u_q\|_{L^2}.$$

En intégrant, on trouve

$$\|u_q(t)\|_{L^2} \leq \|u_q(0)\|_{L^2} + \frac{1}{c2^{2q}}\|g_q\|_{L^\infty([0,t];L^2)} + \int_0^t \|f_q(s)\|_{L^2}\, ds. \tag{4.5}$$

Dans [D], on montre que

$$\|[v\cdot\nabla, \Delta_q]u\|_{L^a} \leq C2^{-qr}\|\nabla v\|_{L^\infty}\|u\|_{B_a^r}. \tag{4.6}$$

D'après cette estimation et en multipliant (4.5) par 2^{qr}, on obtient

$$\|u(t)\|_{B_a^r} \leq \|u(0)\|_{B_a^r} + C\int_0^t \|u(s)\|_{B_a^r}\|\nabla v(s)\|_{L^\infty}\, ds + \sup_{s\in[0,t]}\|g(s)\|_{B_a^{r-2}} + \int_0^t \|f(s)\|_{B_a^r}\, ds. \tag{4.7}$$

Un argument du type lemme de Gronwall donne alors l'inégalité (1.9).

Supposons maintenant que a soit un entier pair non nul. On pose $a = 2p$.

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)u_q^p = pu_q^{p-1}(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)u_q - \nu p(p-1)(\nabla u_q)^2 u_q^{p-2}.$$

En conséquence, en prenant le produit scalaire au sens L^2 avec u_q^p, on obtient

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q\|_{L^{2p}}^{2p} + \nu\left(\frac{2p-1}{p}\right)\|\nabla u_q^p\|_{L^2}^2 = p\int f_q(x)u_q^{2p-1}(x)\,dx + p\nu\int g_q(x)u_q^{2p-1}(x)\,dx.$$

À l'aide de l'inégalité d'Hölder, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q\|_{L^{2p}}^{2p} + \nu\left(\frac{2p-1}{p}\right)\|\nabla u_q^p\|_{L^2}^2 \leq p\|u_q\|_{L^{2p}}^{2p-1}(\|f_q\|_{L^{2p}} + \nu\|g_q\|_{L^{2p}}). \tag{4.8}$$

Pour pouvoir conclure comme dans le cas $p=1$, il faudrait disposer d'une constante $c>0$ telle que $\|\nabla(u_q^p)\|_{L^2} \geq c2^q\|u_q^p\|_{L^2}$ pour $q \geq 0$.

Malheureusement, une telle constante ne saurait exister sans hypothèses supplémentaires sur u_q car, dans le cas $p \geq 2$, u_q^p n'est plus, à fréquences dans des couronnes dyadiques.

Pour pouvoir appliquer le lemme 4.1, on va tronçonner la couronne de base $\mathcal{C}$ en couronnes plus fines et en secteurs angulaires. Pour cela, on se sert du lemme suivant (voir [D]) :

Lemme 4.2.—*Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors il existe une partition de l'unité régulière $(\phi_i)_{1\leq i\leq n_p}$ de* Supp(φ) *et des constantes C et C_r indépendantes de p telles que*

(*i*) $\exists K_i^+$, $\mathrm{Supp}(\phi_i) = K_i^+ \cup (-K_i^+)$ *et* $d(0, \mathring{K}_i(p)) \geq p/\sqrt{2}$,

(*ii*) $\mathcal{F}^{-1}\phi_i$ *vérifie les hypothèses du lemme 4.1*

(*iii*) $\mathrm{Supp}(\phi_i) \subset C(0, 5/6, 12/5 + \epsilon_p)$ *avec* $\lim\limits_{p\to+\infty} \epsilon_p = 0$.

Notons $\Delta_q^i = \phi_i(2^{-q}D)\Delta_q$ et appliquons l'opérateur Δ_q^i à l'équation. Il vient

$$(\partial_t + v\cdot\nabla - \nu\Delta)u_q^i = f_q^i + \nu g_q^i$$

avec $f_q^i = \Delta_q^i f + [v\cdot\nabla, \Delta_q^i]u$, $g_q^i = \Delta_q^i g$ et $u_q^i = \Delta_q^i u$. On trouve alors

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q^i\|_{L^{2p}}^{2p} + \nu\Big(\frac{2p-1}{p}\Big)\|\nabla(u_q^i)^p\|_{L^2}^2 \le p\|u_q^i\|_{L^{2p}}^{2p-1}(\|f_q^i\|_{L^{2p}} + \nu\|g_q^i\|_{L^{2p}}).$$

Grâce au lemme 4.2 et à l'inégalité (4.1), on a $\|\nabla(u_q^i)^p\|_{L^2} \ge 2^{-2p}p^2 2^{2q}\|u_q^i\|_{L^{2p}}$. Donc,

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_q^i\|_{L^{2p}}^{2p} + \nu p^2 2^{-2p}2^{2q}\|u_q^i\|_{L^{2p}}^{2p} \le p\|u_q^i\|_{L^{2p}}^{2p-1}(\|f_q^i\|_{L^{2p}} + \nu\|g_q^i\|_{L^{2p}}).$$

En intégrant comme dans le cas $p = 1$, on trouve

$$\|u_q^i(t)\|_{L^{2p}} \le \|u_q^i(0)\|_{L^{2p}} + \frac{2^{2p}}{2^{2q}p}\|g_q^i\|_{L^\infty([0,t];L^{2p})} + \int_0^t \|f_q^i(s)\|_{L^{2p}}\,ds.$$

D'après le lemme 2.1 et une généralisation immédiate de (4.6) (voir [D]), on a donc

$$2^{qr}\|u_q(t)\|_{L^{2p}} \le C\Big(2^{qr}\|u_q(0)\|_{L^{2p}} + \|g\|_{L^\infty([0,t];B_{2p}^{r-2})} + \int_0^t (\|f(s)\|_{B_{2p}^r} + \|\nabla v(s)\|_{L^\infty}\|u(s)\|_{B_{2p}^r})\,ds\Big). \tag{4.9}$$

Appliquons le lemme de Gronwall. Il vient

$$\|u(t)\|_{B_{2p}^r} \le C\Big(\|u(0)\|_{B_{2p}^r} + \|g\|_{L^\infty([0,t];B_{2p}^{r-2})} + \int_0^t e^{-CV(s)}(\|f(s)\|_{B_{2p}^r}\,ds\Big)e^{CV(t)}. \tag{4.10}$$

On obtient une inégalité similaire pour $a \in [2, +\infty[$ quelconque par interpolation. □

Remarque 4.2.— Dans le cas $\nu > 0$, la coexistence des termes $v\cdot\nabla u$ et $\nu\Delta u$ rend malaisée l'utilisation des normes L^∞, à moins d'utiliser le principe du maximum, mais il faut alors supposer que g a la même régularité que f et u. Dans ce cas, on a

$$\|u(t)\|_r \le \Big(\|u(0)\|_r + \int_0^t e^{-CV(s)}(\|f(s)\|_r + \nu\|g(s)\|_r)\,ds\Big)e^{CV(t)}. \tag{4.11}$$

Une étude précise des constantes montre que C tend vers l'infini quand $a \to +\infty$, ce qui laisse penser que l'estimation (1.9) est fausse dans le cadre des espaces de Hölder.

5 Un lemme de commutation

Dans cette partie, nous prouvons le lemme de commutation que nous avions admis pour démontrer le théorème 1.2.

Lemme 5.1.—*Soit $s \in]0,1[$, $a \in [1,\infty]$, $X \in B_a^s(\mathbb{R}^d)$ et v un champ de vecteurs C^∞ dépendant du temps, à gradient borné et à divergence nulle. On note ω son rotationnel et on suppose que le champ X vérifie (TG). Alors il existe une constante C ne dépendant que de s telle que*

$$\|[T_X, \partial_t + v\cdot\nabla]\omega\|_{B_a^{s-1}} \le C(\|\nabla v\|_0\|T_X\omega\|_{B_a^{s-1}} + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|\omega\|_0\|X\|_{B_a^s}). \tag{5.1}$$

Démonstration : En utilisant $(\partial_t + v \cdot \nabla)X = X(x,D)v$ et $\operatorname{div} v = 0$, on montre que

$$[T_X, \partial_t + v \cdot \nabla]\omega = C_1(v) + C_2(v) + C_3(v) + \mathcal{R}(v) \tag{5.2}$$

où l'on a posé

$$C_1(v) = T_{v^j \partial_j X^i} \partial_i \omega - T_{v^j} T_{\partial_j X^i} \partial_i \omega, \tag{5.3}$$
$$C_2(v) = T_{X^i} T_{\partial_i v^j} \partial_j \omega - T_{X^i \partial_i v^j} \partial_j \omega, \tag{5.4}$$
$$C_3(v) = [T_{X^i}, T_{v^j}] \partial_i \partial_j \omega, \tag{5.5}$$
$$\mathcal{R}(v) = T_{X^i} \partial_i R(v^j . \partial_j \omega) - \partial_j R(v^j, T_{X^i \partial_i \omega}) + T_{X^i} \partial_i T_{\partial_j \omega} v^j - T_{\partial_j T_{X^i} \partial_i \omega} v^j. \tag{5.6}$$

Les trois premiers termes vérifient l'estimation suivante :

$$\forall i \in \{1,2,3\}, \; \|C_i(v)\|_{B_a^{s-1}} \leq C \|v\|_{\mathrm{Lip}} \|\omega\|_0 \|X\|_{B_a^s}. \tag{5.7}$$

Pour le montrer, on va se servir de deux lemmes de commutation qui s'inspirent d'un résultat de J.-M. Bony [B]. Il s'agit de voir que, moyennant de "bonnes hypothèses" sur a et b, les opérateurs $T_a T_b - T_{ab}$ et $T_a T_b - T_b T_a$ sont régularisants.

Le lemme suivant permet d'estimer $C_1(v)$ et $C_2(v)$.

Lemme 5.2.—*Soit $a \in [1, +\infty]$, $(r,t) \in (]0,1[)^2$ et $\rho \in \mathbb{R}$. Soit $f \in (B_a^r(\mathbb{R}^d))^d$ à divergence dans $L^a(\mathbb{R}^d)$ et $g \in C^t$. Supposons en outre que $u \in C^\rho$. Alors il existe une constante C ne dépendant que de s et de t, telle que*

$$\|T_{f \cdot \nabla g} u - T_f T_{\nabla g} u\|_{B_a^{r+t+\rho-1}} \leq C \big(\|f\|_{B_a^r} + \|\operatorname{div} f\|_{L^a}\big) \|\nabla g\|_{t-1} \|u\|_\rho. \tag{5.8}$$

Si $t = 1$, il faut supposer $\nabla g \in L^\infty$ et l'hypothèse sur $\operatorname{div} f$ *devient inutile. On a alors*

$$\|T_{f \cdot \nabla g} u - T_f T_{\nabla g} u\|_{B_a^{r+\rho}} \leq C \|f\|_{B_a^r} \|\nabla g\|_{L^\infty} \|u\|_\rho. \tag{5.9}$$

On obtient des inégalités analogues en échangeant les rôles de C^t et B_a^r.

Démonstration : On notera R toute expression dépendant de f, g et u vérifiant l'estimation à démontrer. On remarquera que les séries manipulées sont toujours à fréquences dans des couronnes dyadiques, ce qui permettra d'utiliser l'inégalité (2.6). La démonstration consiste simplement à montrer que $T_{f \cdot \nabla g} u$ et $T_f T_{\nabla g} u$ ont même partie principale.

En revenant à la définition du paraproduit et en utilisant (2.2), on a

$$\begin{aligned} T_f T_{\nabla g} u &= \sum_{\substack{q \\ |p-q| \leq 3}} S_{p-1} f \cdot \Delta_p (S_{q-1} \nabla g \Delta_q u), \\ &= \sum_q S_{q-4} f \cdot S_{q-1} \nabla g \Delta_q u + \sum_{\substack{q \\ |p-q| \leq 3}} (S_{p-1} - S_{q-4}) f \cdot \Delta_p (S_{q-1} \nabla g \Delta_q u). \end{aligned}$$

En utilisant la proposition 2.2, on en déduit

$$T_f T_{\nabla g} u = \sum_q S_{q-4} f \cdot S_{q-1} \nabla g \Delta_q u + R. \tag{5.10}$$

Montrons maintenant que $T_{f \cdot \nabla g} u$ vérifie aussi (5.10). Par définition, on a

$$T_{f \cdot \nabla g} u = \sum_q S_{q-1} (f \cdot \nabla g) \Delta_q u.$$

Donc,

$$T_{f\cdot\nabla g}u = \sum_q S_{q-1}(S_{q-4}f\cdot S_{q+2}\nabla g)\Delta_q u + \sum_q S_{q-1}(S_{q-4}f\cdot(Id-S_{q+2})\nabla g)\Delta_q u$$
$$+\sum_q S_{q-1}((Id-S_{q-4})f\cdot S_{q+2}\nabla g)\Delta_q u + \sum_q S_{q-1}((Id-S_{q-4})f\cdot(Id-S_{q+2})\nabla g)\Delta_q u.$$

Grâce à (2.3), le second terme est identiquement nul. Le troisième terme est clairement du type R. Le quatrième aussi dans le cas $t=1$ et $\nabla g\in L^\infty$. Sinon, on remarque qu'il est égal à

$$\operatorname{div}\big(S_{q-1}((Id-S_{q-4})f(Id-S_{q+2})g)\big) - S_{q-1}\big((Id-S_{q+2})g(Id-S_{q-4})\operatorname{div} f\big)$$

et on utilise l'hypothèse sur div f. Finalement, on trouve dans tous les cas

$$T_{f\cdot\nabla g}u = \sum_q S_{q-1}\big(S_{q-4}f\cdot S_{q+2}\nabla g\big)\Delta_q u + R.$$

On en déduit

$$T_{f\cdot\nabla g}u = \sum_q S_{q-4}f\cdot S_{q-1}\nabla g\Delta_q u + \sum_q \Delta_q u[S_{q-1},S_{q-4}f]S_{q+2}\nabla g + R.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que

$$[S_{q-1},S_{q-4}f]S_{q+2}\nabla g(x) = -2^{1-q}\int_{\mathbb{R}^d}\int_0^1 \widetilde{h}(y)y^i\partial_i S_{q-4}f(x-2^{1-q}ty)\cdot S_{q+2}\nabla g(x-2^{1-q}y)\,dtdy,$$

pour voir que $T_{f\cdot\nabla g}u = \sum_q S_{q-4}f\cdot S_{q-1}\nabla g\Delta_q u + R$. □

L'estimation de $C_3(v)$ provient du lemme suivant (voir [D]) :

Lemme 5.3.—*Soit $(r,t)\in(]0,1[)^2$ et $\rho\in\mathbb{R}$. Soit $(f,g)\in B^r_a\times C^t$ et $u\in C^\rho$. Alors il existe une constante C ne dépendant que de r et de t telle que*

$$\|T_fT_gu - T_gT_fu\|_{B_a^{r+t+\rho}} \le C\|f\|_{B^r_a}\|g\|_t\|u\|_\rho. \tag{5.11}$$

De plus, cette estimation demeure valable pour $t=1$ à condition de remplacer $\|g\|_1$ par $\|g\|_{\mathrm{Lip}}$.

Il ne reste plus qu'à traiter le cas de $\mathcal{R}(v)$.

Le lemme 2.3 assure que les termes $T_{\partial_jT_{X^i}\partial_i\omega}v^j$ et $\partial_jR(v^j,T_{X^i}\partial_i\omega)$ sont du type R'. Mais pour estimer les termes $\partial_jT_{X^i}\partial_iR(v^j,\omega)$ et $T_{X^i}\partial_iT_{\partial_j\omega}v^j$, les lemmes de la partie 2 sont insuffisants. On utilise alors une formule, provenant de [Ch1], qui décrit l'action d'un parachamp sur un produit et qui s'apparente à la formule de Leibniz pour la dérivation.

Pour $q\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$ et $q_1\in\mathbb{N}\cup\{-1\}$, posons $A_{q_1,q}=\big([q_1-1,q-2]\cup[q-2,q_1-1]\big)\cap\mathbb{Z}$. On définit également pour $i\in\{1,2\}$, $\varphi_i(\xi)=\xi_i\varphi(\xi)$ et $\chi_i(\xi)=\xi_i\chi(\xi)$ et des opérateurs $\Delta_{i,p}$ par :

$$\Delta_{i,p}=0 \text{ si } p\le -2,$$
$$\Delta_{i,-1}=\chi_i(D),$$
$$\Delta_{i,p}=\varphi_i(2^{-p}D) \text{ si } p\ge 0.$$

On a alors

$$T_{X^i}\partial_i(\Delta_q v^j \widetilde{\Delta}_q\omega) = \widetilde{\Delta}_q\omega\, T_{X^i}\partial_i\Delta_q v^j + \Delta_q v^j\, T_{X^i}\partial_i\widetilde{\Delta}_q\omega + \sum_{\substack{q_1\leq q+3\\ p\in A_{q_1,q}}} 2^{q_1}\,\mathrm{sgn}(q_1-q)\Delta_p X^i \Delta_{i,q_1}(\Delta_q v^j\widetilde{\Delta}_q\omega)$$
$$+ \sum_{\substack{|q_1-q|\leq 2\\ p\in A_{q_1,q}}} 2^{q_1}\,\mathrm{sgn}(q-q_1)\Delta_p X^i\big((\widetilde{\Delta}_q\omega)\Delta_{i,q_1}\Delta_q v^j + (\Delta_q v^j)\Delta_{i,q_1}\widetilde{\Delta}_q\omega\big).$$

On en déduit facilement que

$$\|T_{X^i}\partial_i\partial_j R(v^j,\omega)\|_{s-1} \leq C\big(\|v\|_1(\|T_X\omega\|_{B^{s-1}_a} + \|X\|_{B^s_a}\|\omega\|_0)\big). \tag{5.12}$$

On montre de même que $T_{X^i}\partial_i T_{\partial_j\omega} v^j$ vérifie (5.12).

En revenant à la relation (5.2), on obtient finalement

$$\|[T_X, \partial_t + v\cdot\nabla]\omega\|_{B^{s-1}_a} \leq C\big(\|v\|_1(\|T_X\omega\|_{B^{s-1}_a} + \|X\|_{B^s_a}\|\omega\|_0) + \|\nabla v\|_{L^\infty}\|X\|_{B^s_a}\|\omega\|_0\big). \tag{5.13}$$

Ce n'est pas tout à fait l'estimation voulue. Pour obtenir une estimation qui ne fasse intervenir que le gradient de v, il faut faire un découpage en basses et hautes fréquences de v. On obtient l'estimation souhaitée pour la partie hautes fréquences à l'aide de (5.13). Quant à l'estimation des termes de basses fréquences, elle est faite dans [D]. □

Références

[A] S. Alinhac : Interaction d'ondes simples pour des équations complètement non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **21**, pages 91-133 (1988).

[B] J.-M. Bony : Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales Scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure*, **14**, pages 209-246 (1981).

[Ch1] J.-Y. Chemin : Calcul paradifférentiel précisé et application à des équations aux dérivées partielles non semi-linéaires, *Duke Mathematical Journal*, **56**, pages 431-469 (1988).

[Ch2] J.-Y. Chemin : Fluides parfaits incompressibles, *Astérisque*, **230** (1995).

[Ch3] J.-Y. Chemin : A remark on the inviscid limit for two-dimensionnal incompressible fluide, à paraître dans *Communications in Partial Differential Equations.*

[CW] P. Constantin et J. Wu : Inviscid limit for vortex patches, *Prépublication* (1995).

[D] R. Danchin : Poches de tourbillon visqueuses, *Prépublication* (1996).

[F] A. Friedman : Partial differential equations of parabolic type, Prentice-Hall (1964).

[S] P. Serfati : Une preuve directe d'existence des vortex patches 2D, *Notes aux Comptes-rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, **318**, série 1, pages 315-318 (1994).

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 - Palaiseau cedex