SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. GÉRARD

Injections de Sobolev critiques, mesures microlocales et ondes non linéaires

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 2, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A2_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

INJECTIONS DE SOBOLEV CRITIQUES, MESURES MICROLOCALES et ONDES NON LINEAIRES

P. GERARD

Exposé n° II

18 octobre 1994

1. Défaut de compacité des injections de Sobolev : énoncé des résultats.

1.a. Soient d un entier positif et s un réel dans l'intervalle $]0, \frac{d}{2}[$. Il est bien connu que l'injection de Sobolev

$$H^s_{\text{comp}}(\mathbf{R}^d) \hookrightarrow L^p(\mathbf{R}^d)\,,\ \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{s}{d} \tag{1}$$

n'est pas compacte. Par exemple, si ψ est un élément non nul de $H^s(\mathbf{R}^d)$ à support compact, $x_0 \in \mathbf{R}^d$, et (ε_n) une suite de nombres positifs tendant vers 0, la suite de H^s définie par

$$u_n(x) = \frac{1}{\varepsilon_n^{d/p}}\ \psi\ (\frac{x - x_0}{\varepsilon_n}) \tag{2}$$

converge faiblement vers 0 en restant supportée dans un compact fixe de $\mathbf{R}^d$, mais u_n ne tend pas vers 0 en norme L^p, puisque $\|u_n\|_{L^p} = \|\psi\|_{L^p}$.

Une question naturelle est de caractériser les suites (u_n) qui violent la conpacité de (1). Dans le contexte des problèmes variationnels, une première réponse a été donnée par le résultat suivant ("second lemme de concentration-compacité") :

Proposition (P.-L. Lions [L]).— *Soit (u_n) une suite de $H^s(\mathbf{R}^d)$ convergeant faiblement vers 0 et supportée dans un compact fixe de $\mathbf{R}^d$. On suppose que $|\langle D\rangle^s u_n|^2$ converge vaguement vers une mesure α, et que $|u_n|^p$ converge vaguement vers une mesure β. Alors β est absolument continue par rapport à α ; de plus il existe une suite (x_j) de $\mathbf{R}^d$, et une suite $(c_j) \in \ell^{2/p}(\mathbf{N})$ telles que*

$$\beta = \sum_j c_j\ \delta(x - x_j) \tag{3}$$

Remarques.

a) Ici $\langle D\rangle^s$ désigne le multiplicateur de Fourier de symbole $(1 + |\xi|^2)^{s/2}$.

b) Puisque $\|\langle D\rangle^s u_n\|^2$ et $|u_n|^p$ sont bornés dans $L^1(\mathbf{R}^d)$, l'hypothèse d'existence de α et β ne constitue pas une perte de généralité à extraction près d'une sous-suite.

1.b Un corollaire immédiat de la proposition ci-dessus est que, si la mesure α ne charge pas les points, alors u_n tend vers 0 fortement dans L^p.
On souhaiterait affiner ce critère par une version microlocale. L'objet naturel est alors la mesure de défaut microlocale (ou H-mesure) de $v_n = \langle D\rangle^s u_n$, définie sur $\mathbf{R}^d_x \times S^{d-1}_\xi = S^*\mathbf{R}^d$ par

$$\int_{S^*\mathbf{R}^d} a(x,\xi)d\mu(x,\xi) = \lim_{n\to\infty} (Av_n, v_n)_{L^2} \,, \tag{4}$$

pour tout $a \in C_0^\infty(S^*\mathbf{R}^d)$, A désignant un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0, de symbole principal a (voir [T],[G2]).
L'existence de μ est assurée pour une sous-suite convenable de (u_n). Notons que, si (u_n) est donnée par (2), on a

$$\mu(x,\xi) = \delta(x - x_0) \otimes \widetilde{\psi}(\xi)d\sigma(\xi)\,, \tag{5}$$

où σ est la mesure superficielle sur S^{d-1} et $\widetilde{\psi}(\xi) = (2\pi)^{-d} \int_0^\infty r^{2s+d-1}|\widehat{\psi}(r\xi)|^2 dr$.

On a alors le résultat suivant.

Théorème 1.— *Soit (u_n) une suite de $H^s(\mathbf{R}^d)$ convergeant faiblement vers 0 et supportée dans un compact fixe de $\mathbf{R}^d$. On suppose que la mesure de défaut microlocale μ de $\langle D\rangle^s u_n$ est étrangère à $\delta(x - x_0) \otimes d\sigma(\xi)$. Alors la limite vague β de $|u_n|^p$ ne charge pas le point x_0. En particulier, si cette propriété est vraie pour tout x_0, alors u_n tend vers 0 fortement dans $L^p(\mathbf{R}^d)$.*

Remarques.

a) On notera qu'on a toujours $\alpha(x) = \int_{S^{d-1}} \mu(x, d\xi)$.
Si $\beta(\{x_0\}) \neq 0$, alors $\alpha(\{x_0\}) \neq 0$ et $\mu(x,\xi) = \delta(x - x_0) \otimes \nu(\xi) + \widetilde{\mu}(x,\xi)$, où $\mu\left(\{x_0\} \times S^{d-1}\right) = 0$.
Le théorème ci-dessus indique que ν a nécessairement une composante absolument continue par rapport à $d\sigma(\xi)$.

b) Le théorème 1 est optimal au sens suivant :
si μ est une mesure de Radon positive à support compact sur $S^*\mathbf{R}^d$, non étrangère à $\delta(x - x_0) \otimes d\sigma(\xi)$, alors il existe une suite (u_n) de $H^s(\mathbf{R}^d)$ convergeant faiblement vers 0, supportée dans un compact fixe de $\mathbf{R}^d$, et telle que

(i) La suite $(\langle D\rangle^s u_n)$ admette μ pour H-mesure.

(ii) La limite vague β de $|u_n|^p$ charge le point x_0.

1.c. En fait, le théorème 1 peut être sensiblement amélioré en remplaçant la notion de H-mesure par la notion de mesure semi-classique ([G3],[GL],[LP]).

Rappelons brièvement ce dont il s'agit. Soit (v_n) une suite de $L^2(\mathbf{R}^d)$ convergeant faiblement vers 0, nulle en dehors d'un compact fixe, et soit (ε_n) une suite de nombres positifs tendant vers 0. Une mesure semi-classique associée à (v_n) pour l'échelle (ε_n) est une mesure de Radon positive m sur $\mathbf{R}^d_x \times \mathbf{R}^d_\xi = T^*\mathbf{R}^d$ telle qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) pour laquelle on a, pour tout $a \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$,

$$\int_{T^*\mathbf{R}^d} a(x,\xi)dm(x,\xi) = \lim_{k\to\infty} (a(x,\varepsilon_{n_k}D)v_{n_k}, v_{n_k})\,. \tag{6}$$

Pour une échelle (ε_n) donnée, l'ensemble des mesures semi-classiques associées à (v_n) est une partie compacte non vide de l'espace des mesures de Radon positives bornées, pour la topologie vague ([GL]). On établit sans mal le lien avec les H-mesures : si ρ est l'application

$$T^*\mathbf{R}^d \setminus \{\xi = 0\} \to S^*\mathbf{R}^d$$

$$(x,\xi) \mapsto \left(x, \frac{\xi}{|\xi|}\right)$$

on a toujours l'inégalité ([G4])

$$\rho(1_{\xi\neq 0}m) \leq \mu\,. \tag{7}$$

Notons enfin que, si (u_n) est donnée par (2), on a

$$m(x,\xi) = \delta(x-x_0)\otimes|\widehat{\psi}(\xi)|^2\frac{d\xi}{(2\pi)^n}\,. \tag{8}$$

Théorème 2.— *Soit (u_n) une suite de $H^s(\mathbf{R}^d)$ convergeant faiblement vers 0 et supportée dans un compact fixe de $\mathbf{R}^d$. On suppose que, pour toute échelle (ε_n), toute mesure semi-classique m associée à $(\langle D\rangle^s u_n)$ est étrangère à $\delta(x-x_0)\otimes d\xi$. Alors la limite vague β de $|u_n|^p$ ne charge pas le point x_0. En particulier, si cette propriété a lieu pour tout point x_0, u_n tend vers 0 fortement dans $L^p(\mathbf{R}^d)$.*

Remarques. a) Compte tenu de (7), le théorème 2 entraîne le théorème 1.

b) Il existe des critères qui permettent de ne vérifier les hypothèses du théorème 2 que pour une seule suite (ε_n). C'est le cas par exemple s'il existe $\delta > 0$ tel que $\|u_n\|_{s+\delta} \leq C\varepsilon_n^{-\delta}$ et si aucune mesure semi-classique de $(\langle D\rangle^s u_n)$ pour l'échelle (ε_n) ne charge l'ensemble $\{\xi = 0\}$. On a alors l'égalité dans (7).

c) On voit dès maintenant l'amélioration fournie par le théorème 2. Par exemple, supposons qu'on soit dans la situation de la remarque b) et que m soit absolument continue par rapport à $\delta(x-x_0)\otimes d\sigma(\xi)$. Alors le théorème 2 s'applique, mais pas le théorème 1.

d) Un autre avantage du théorème 2 est qu'il fournit, pour toute suite (u_n) violant la compacité de H^s dans L^p, l'existence d'une échelle privilégiée, c'est-à-dire une suite (ε_n) pour laquelle il existe une mesure semi-classique m associée à $v_n = \langle D\rangle^s u_n$ vérifiant $1_{\xi\neq 0} m = 0$.
L'existence d'une échelle privilégiée pour une suite (v_n) convergeant faiblement vers 0 dans L^2 est fausse en général. Voici un contre-exemple, lié au problème des nappes de tourbillon en mécanique des fluides :

$$v_n(x) = \frac{n^d}{\operatorname{Log} n} \langle D_x\rangle^{-d/2}(\psi(nx)).$$

On peut montrer que, pour toute échelle (ε_n) (y compris $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$) et toute mesure semi-classique associée à m, on a $1_{\xi\neq 0} m = 0$. En revanche, la H-mesure de (v_n) est $\mu = (2\pi)^{-d} \left|\int_{\mathbf{R}^d} \psi(y)dy\right|^2 \delta(x) \otimes d\sigma(\xi)$.

e) Enfin, le théorème 2 est optimal au même titre que le théorème 1 (voir remarque b), §1.b).
La démonstration du théorème 2 est esquissée en section 3. Auparavant, nous donnons quelques applications.

2. Applications à l'équation des ondes.

2.a. Estimations L^p pour les fonctions propres d'un laplacien à coefficients continus.

Soit M une variété compacte de dimension d, et soit g une métrique riemannienne *continue* sur M. On désigne par Δ_g le laplacien associé à g, dont l'expression en coordonnées locales est

$$\Delta_g u(x) = -\frac{1}{\tau(x)} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(g^{ij}\tau(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right),$$

avec $\tau(x) = \sqrt{\det\, g_{ij}(x)}$.

Soit (φ_n) une base hilbertienne de $L^2(M)$ constituée de fonctions propres de Δ_g. On a donc

$$\Delta_g \varphi_n = \lambda_n \varphi_n, \ \|\varphi_n\|_{L^2(M)} = 1, \tag{7}$$

où $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En prenant le produit scalaire de (7) avec φ_n, on en déduit

$$\|\varphi_n\|_{H^1(M)} = \sqrt{\lambda_n}\,. \tag{8}$$

Par interpolation, on en déduit que, pour tout $s \in [0,1]$, $\lambda_n^{-s/2}\varphi_n$ est bornée dans $H^s(M)$, et l'injection de Sobolev entraîne

$$\|\varphi_n\|_{L^q} \leq C\lambda_n^{\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})},\ 2 \leq q \leq \frac{2d}{d-2}. \tag{9}$$

Lorsque g est C^∞, il est bien connu que ces estimations ne sont pas optimales (voir Sogge [So]) pour des résultats donnant le meilleur exposant de λ_n pour tout q). Lorsque g est seulement continue, il n'est pas clair que l'on puisse gagner sur l'exposant de λ_n. Néanmoins, on a le résultat suivant.

Proposition 3.— *Pour tout* $q \in]2, \frac{2d}{d-2}[$,

$$\lambda_n^{-\frac{d}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q})}\|\varphi_n\|_{L^q} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Démonstration. Soit $s \in]0,1[$, $u_n = \lambda_n^{s/2}\varphi_n$ et $\varepsilon_n = \lambda_n^{-1/2}$. D'après (8) on a

$$\|u_n\|_{s+\delta} \leq C\varepsilon_n^{-\delta} \tag{10}$$

avec $\delta = 1-s$. Soit m une mesure semi-classique de $\langle D\rangle^s u_n$ pour l'échelle (ε_n). En utilisant l'équation aux valeurs propres (7), on montre que m est portée par la variété caractéristique,

$$g^{ij}(x)\xi_i\xi_j = 1\,. \tag{11}$$

En utilisant (11), on constate que m ne charge pas $\{\xi = 0\}$. On est alors dans la situation de la remarque b) après le théorème 2, ce qui évite d'étudier les mesures semi-classiques pour d'autres échelles que (ε_n). Enfin, compte tenu de (11), m est nécessairement étrangère à toutes les mesures $\delta(x-x_0)\otimes d\xi$. On peut donc appliquer le théorème 2.

Remarque : La proposition 3 s'étend au cas du problème de Dirichlet avec un bord C^1, pourvu que la métrique g soit lipschitzienne au voisinage du bord (voir [G4]).

2.b. Concentration de solutions de l'équation des ondes.

Soit (w_n) une suite de solutions de l'équation des ondes dans $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$, $d =\geq 3$,

$$\partial_t^2 w_n - \Delta w_n = 0\,. \tag{12}$$

On suppose que la donnée de Cauchy $(w_{n|_{t=0}}\,,\,\partial_t w_{n|_{t=0}})$ est supportée dans un compact fixe et converge faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbf{R}^d)\times L^2(\mathbf{R}^d)$. Par la propriété de vitesse finie de propagation et l'identité d'énergie, on a la même propriété pour $(w_n,\partial_t w_n)$ au temps t.
En particulier, par injection de Sobolev,

$$\int_{\mathbf{R}^d} |w_n(t,x)|^p dx \leq C(t)\,,\ p = \frac{2d}{d-2}\,. \tag{13}$$

Proposition 4.— *On suppose que $|\partial_t w_{n|_{t=0}}|^2 + |\nabla_x w_{n|_{t=0}}|^2$ a une limite vague. Alors l'ensemble des t pour lesquels $\int_{\mathbf{R}^d}|w_n(t,x)|^p dx$ ne tend pas vers 0 est au plus dénombrable.*

Démonstration. On utilise le théorème de propagation suivant (voir [T],[FM],[G1,4]). Pour tout t, désignons par μ_t la somme des H-mesures de $\partial_t w_n$ et des $\partial_j w_n$ dans $\mathbf{R}^d$. (On montre que, à extraction près d'une sous-suite, μ_t existe pour tout t). Alors $\mu_t = \mu_t^+ + \mu_t^-$, où $\mu_t^\pm$ vérifie $\partial_t\mu_t^\pm \mp \xi.\nabla_x\mu_t^\pm = 0$. On applique alors le théorème 1. Si t est tel que $\int|w_n(t,x)|^p dx$ ne tend pas vers 0, alors il existe x_0 tel que μ_t ne soit pas étrangère à $\delta(x-x_0)d\sigma(\xi)$. En propageant cette information jusqu'à $t=0$, et en projetant sur l'espace des x, on en déduit que la limite vague ν de $|\partial_t w_{n|_{t=0}}|^2 + |\nabla w_{n|_{t=0}}|^2$ n'est pas étrangère à la mesure superficielle sur une sphère de rayon $|t|$. Or, des mesures superficielles sur des sphères de rayons distincts sont étrangères ; l'ensemble des rayons r tels qu'il existe une telle mesure sur une sphère de rayon r qui soit non étrangère à une mesure donnée ν est donc au plus dénombrable.
∎

Remarques. a) L'hypothèse selon laquelle $|\partial_t w_{n|_{t=0}}|^2 + |\nabla w_{n|_{t=0}}|^2$ a une limite vague est toujours vérifiée à extraction près d'une sous-suite. Néanmoins cette hypothèse ne peut être retirée, comme le montre l'exemple suivant en dimension 3,

$$w_n(t,x) = \frac{1}{|x|}\frac{1}{\sqrt{q_n}}\,\varphi\left(q_n(|x|+t-r_n)\right)\,,$$

où (r_n) est une énumération des rationnels de l'intervalle $]0,1[$, q_n est le dénominateur de r_n, et $\varphi\in C_o^\infty(]0,\infty[)$ est non identiquement nulle.

b) Par le théorème de convergence dominée, on en déduit que, pour tout $T>0$,

$$\int_{-T}^{T}\int_{\mathbf{R}^d}|w_n(t,x)|^p dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

Néanmoins ce dernier résultat est une conséquence facile de l'inégalité de Strichartz [St],

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\mathbf{R}^d}|w_n(t,x)|^q dx \leq C$$

avec $\quad q = 2(d+1)/d-2 > 2d/d-2 = p.$

2.c. Application aux équations d'ondes non linéaires dispersives.

Nous en venons au problème qui a en fait motivé l'ensemble du travail présenté ici.
Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞ vérifiant les propriétés suivantes :

$$f(0)=0\,,\ \int_0^u f(s)ds \geq 0\,,\ |f^{(j)}(u)| \leq C_j(1+|u|)^{p-j} \tag{14}$$

où p est un réel ≤ 5. On sait que l'équation

$$\partial_t^2 u - \Delta u + f(u) = 0\,,\ t \in \mathbf{R},\ x \in \mathbf{R}^3 \tag{15}$$

admet des solutions globales régulières pour toutes données régulières. (voir [J] pour $p < 5$, et [Gr1,2], [S] pour $p = 5$). Une façon d'étudier l'incidence du terme non linéaire sur la solution est de créer des oscillations sur les données, et de comparer leur évolution au cours du temps avec celle des oscillations de la solution de l'équation linéaire (15) avec $f = 0$.

Soit donc (u_n) une suite de solutions régulières de (15) dont la donnée de Cauchy est supportée dans un compact fixe et tend faiblement vers 0 dans $H^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3)$. Désignons par (v_n) la suite de solutions de l'équation des ondes linéaires avec la même donnée à $t = 0$. Alors, pour tout t, $(u_n, \partial_t u_n)$ et $(v_n, \partial_t v_n)$ sont supportées dans un compact fixe et sont bornées dans $H^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3)$. Convenons de dire que (u_n) est *linéarisable* sur l'intervalle $[0,T]$, si

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbf{R}^3}\Big(\partial_t(u_n-v_n)(t,x)\Big)^2 + \Big(\nabla_x(u_n-v_n)(t,x)\Big)^2 dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,.$$

On a alors le résultat suivant (indépendant de ce qui précède) qui illustre bien le caractère critique de l'exposant $p = 5$.

Proposition 5.—

(i) *Si $p < 5$, toute suite (u_n) est linéarisable.*

(ii) *Si $p = 5$ et $f(u) = u^5$, alors (u_n) est linéarisable sur $[0,T]$ si et seulement (v_n) vérifie*

$$\sup_{0\leq t\leq T}\int_{\mathbf{R}^3}|v_n(t,x)|^6\,dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0\,. \tag{17}$$

Indications sur la démonstration. La clé de (i) est donnée par les estimations $L^q(L^r)$ de Ginibre-Velo [GV]

$$\|u_n\|_{L^q(0,T,L^r(\mathbf{R}^3))} \leq C\,,\ \frac{1}{q}+\frac{3}{r}=\frac{1}{2}\,,\ r<+\infty\,. \tag{18}$$

En appliquant l'inégalité d'énergie à $u_n - v_n$, on constate qu'il suffit de montrer que $f(u_n)$ tend vers 0 dans $L^1(0,T;L^2(\mathbf{R}^3))$. Or l'inégalité (18) avec $q=5$, $r=10$ entraîne que $f(u_n)$ est bornée dans $L^{5/p}(0,T;L^{10/p}(\mathbf{R}^3))$. Comme $p<5$, il suffit alors de savoir que $f(u_n)$ tend vers 0 presque partout dans $[0,T]\times\mathbf{R}^3$, or c'est le cas de u_n puisqu'elle est bornée dans H^1 et converge donc presque partout vers l'unique solution à donnée nulle de (15), i.e. 0.

La démonstration de (ii) est plus délicate (voir [G4]). Montrons seulement pourquoi (16) entraîne (17) : les quantités suivantes sont conservées au cours du temps,

$$E(u_n)=\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_t u_n)^2+(\nabla u_n)^2dx+\frac{1}{3}\int_{\mathbf{R}^3}u_n^6dx\,,$$
$$E_c(v_n)=\int_{\mathbf{R}^3}(\partial_t v_n)^2+(\nabla v_n)^2dx\,.$$

En posant

$$P_n(t)=\int_{\mathbf{R}^3}(v_n(t,x))^6dx\,,$$

l'hypothèse (16) entraîne que

$$\sup_{t\in[0,T]}|E(u_n)-E_c(v_n)-P_n(t)|\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0\,,$$

donc $P_n(t)-P_n(0)$ tend vers 0 uniformément sur $[0,T]$. Comme par ailleurs $\int_0^T P_n(t)dt$ tend vers 0 à cause de la proposition 4 (ou de l'inégalité de Strichartz (18) avec $q=r=8$) on en déduit (17). ∎

Il est donc facile d'exhiber des suites non linéarisables. Mais peut-on prédire si une suite (u_n) l'est en observant sa donnée de Cauchy ? Le résultat suivant donne un critère en termes de mesures semi-classiques :

Proposition 6.— *On suppose que $f(u)=u^5$, et que, pour toute échelle (ε_n), toute mesure semi-classique $m_0^\pm$ associée à $\partial_t u_{n|t=0}\pm i|D|u_{n|t=0}$ est étrangère à $\delta(x-x_0\pm r\frac{\xi}{|\xi|})\otimes d\xi$, pour tous $x_0\in\mathbf{R}^3$, $r\in[0,T]$. Alors (u_n) est linéarisable sur $[0,T]$.*

La démonstration conjugue la propostion 5(ii), le théorème 2, et la version semi-classique du théorème de propagation des mesures : la mesure semi-classique $m_t^\pm$ associée à $\partial_t u_n\pm i|D|u_n$ au temps t est solution de

$$\partial_t m_t^\pm\mp\frac{\xi}{|\xi|}\cdot\nabla_x m_t^\pm=0$$

sur l'ouvert $\{\xi\neq 0\}$. On renvoie à [G4] pour les détails.

3. Indications sur la démonstration du théorème 2.

Tout d'abord, on se ramène à un problème en variable ξ seulement, en multipliant par une troncature $\theta\left(\frac{x-x_0}{\delta}\right)$.

Il s'agit alors, pour une suite (u_n) donnée, d'estimer la limite supérieure de $\|u_n\|_{L^p}$ en termes de la borne supérieure des quantités $\int \nu_\ell(\xi)d\xi$, où $\nu_\ell(\xi)d\xi \leq \nu$, et ν décrit toutes les valeurs d'adhérence de $\varepsilon_n^{-d}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{u}_n(\xi/\varepsilon_n)|^2$ pour la topologie vague, (ε_n) décrivant toutes les échelles possibles !

Cette estimation est assez simple dans le cas où $\widehat{u}_n$ est supportée dans une couronne du type $\{\frac{a}{\varepsilon_n} \leq |\xi| \leq \frac{b}{\varepsilon_n}\}$.

En effet, posons dans ce cas

$$f_n(\xi) = \varepsilon_n^{-d(1-\frac{1}{p})}\widehat{u}_n(\frac{\xi}{\varepsilon_n}).$$

L'inègalité de Hausdorff-Young donne alors

$$\|u_n\|_{L^p} \leq C\|\widehat{u}_n\|_{L^{p/p-1}} = C\|f_n\|_{L^{p/p-1}}.$$

Notons que $|f_n(\xi)|^2 = \varepsilon_n^{-d-2s}|\widehat{u}_n(\frac{\xi}{\varepsilon_n})|^2$, dont les limites vagues sont aisément reliées à celles de $\varepsilon_n^{-d}\langle\xi\rangle^{2s}|\widehat{u}_n(\xi/\varepsilon_n)|^2$, à cause de la localisation spectrale. Il s'agit donc d'estimer $\limsup\|f_n\|_{L^{p/p-1}}$ à l'aide de la partie absolument continue de la limite vague λ de $|f_n|^2$, sachant que f_n est supportée dans un compact fixe. Or ceci est une conséquence de l'inégalité de Hölder, après avoir introduit une partition de l'unité adaptée à la décomposition de Radon-Nikodym de λ.

Il faut ensuite se ramener à cette situation modèle, et on utilise pour cela les décompositions en couronnes dyadiques. Précisément, en désignant par

$$f = S_0 f + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta_k f$$

la décomposition de Littlewood-Paley de f, les espaces H^s et L^p sont respectivement caractérisés par

$$\|S_0 f\|_{L^2}^2 + \sum_{k=0}^{\infty} \|\Delta_k f\|_{L^2}^2\, 2^{2ks} < \infty,$$

$$\left(|S_0 f|^2 + \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_k f|^2\right)^{1/2} \in L^p.$$

On introduit aussi l'espace de Besov B^0_{pp} défini par

$$\|S_0 f\|_{L^p}^p + \sum_{k=0}^{\infty} \|\Delta_k f\|_{L^p}^p < \infty.$$

Puisque $p > 2$, on a $H^s \subset L^p \subset B^0_{pp}$. On a alors le résultat suivant "d'interpolation logarithmique" :

Lemme.— *Si p est un entier pair, on a*

$$\|f\|_{L^p} \leq C\|f\|_{B^0_{pp}} \left(\mathrm{Log}\left(1+\frac{\|f\|_{H^s}}{\|f\|_{B^0_{pp}}}\right)\right)^{1/2-1/p} .$$

Ce lemme permet de terminer la démonstration dans le cas où p est un entier pair, le cas général s'en déduisant par interpolation. En effet, la localisation spectrale entraîne

$$\|\Delta_k f\|_{L^p} \leq C 2^{ks} \|\Delta_k f\|_{L^2}$$

donc

$$\|f\|^p_{B^0_{pp}} \leq \|S_0 f\|^p_{L^p} + \left(\sup_k \|\Delta_k f\|^{p-2}_{L^p}\right) \|f\|^2_{H^s} .$$

On est donc ramené à estimer la limite supérieure de $\sup_k \|\Delta_k u_n\|_{L^p}$, qui n'est autre que la borne supérieure des $\limsup \|\Delta_{k_n} u_n\|_{L^p}$ quand (k_n) décrit les suites tendant vers l'infini. On est ainsi ramené à la situation modèle, avec $\varepsilon_n = 2^{-k_n}$. On renvoie à [G4] pour les détails.

RÉFÉRENCES

[FM] G.A. FRANCFORT, F. MURAT : *Oscillations and Energies Densities in the Wave Equation*, Comm. Partial Diff. Eq., **17** (1992), 1785-1865.

[G1] P. GÉRARD : *Compacité par compensation et régularité 2-microlocale*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, 1988-1989, Exposé n° VI, Ecole Polytechnique, Palaiseau

[G2] P. GÉRARD : *Microlocal Defect Measures*, Comm. Partial Diff. Eq., **16** (1991), 1761-1794.

[G3] P. GÉRARD : *Mesures semi-classiques et ondes de Bloch*, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, 1990-1991, Exposé n° XVI, Ecole Polytechnique, Palaiseau

[G4] P. GÉRARD : *Oscillations and Concentration Effects in Semilinear Dispersive Wave Equations*, Prépublication Orsay, Juillet 1994.

[GL] P. GÉRARD, E. LEICHTNAM : *Ergodic Properties of Eigenfunctions for the Dirichlet Problem*, Duke Math. J., **71** (1993), 559-607.

[GV] P. GINIBRE, G.VELO : *The Global Cauchy Problem for the Non Linear Klein-Gordon Equation*, Math. Z., **189** (1985), 487-505.

[Gr1] M. GRILLAKIS : *Regularity and Asymptotic Behaviour of the Wave Equation with a Critical Nonlinearity*, Ann. Math., **132** (1990), 485-509.

[Gr2] M. GRILLAKIS : *Regularity for the Wave Equation with Critical Nonlinearity*, Comm. Pure and Applied Math., **45** (1992), 749-774.

[J] K. JÖRGENS : *Das Ansfangwert Problem im Grossen für eine Klasse nichtlinear Wellengleichungen*, Math. Z, **77** (1961), 295-308.

[L] P.-L. LIONS : *The Concentration-Compactness Principle in the Calculus of Variations. The limit case, Part 1*, Revista Matemática Iberoamericana, **1** (1985), 145-201.

[LP] P.-L. LIONS, T. PAUL : *Sur les mesures de Wigner*, Revista Matemática Iberoamericana, **9** (1993), 553-618.

[S] J. SHATAH, M. STRUWE : *Regularity Results for Nonlinear Wave Equations*, Ann. Math., **138** (1993), 503-518.

[So] C. SOGGE : *Concerning the L^p norm of Spectral Clusters for second Order Elliptic Operators on Compact Manifolds*, J. Funct. Anal. **77** (1988), 123-134.

[St] R. STRICHARTZ : *Restriction of Fourier Transform to Quadratic Surfaces and Decay of Solutions of the Wave Equations*, Duke Math., **44** (1977), 705-714.

[T] L. TARTAR : *H-measures : a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **115** (1990), 193-230.

Patrick GÉRARD
Université de Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY Cedex