Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

A. Grigis

Résonances par correspondance

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 23, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A23_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RESONANCES PAR CORRESPONDANCE

A. GRIGIS

Exposé n° XXIII

21 Mars 1995

Introduction

Ce travail, en collaboration avec André Martinez fait suite à la codirection de la thèse de Hamadi Baklouti [B] et à des travaux antérieurs de A. Martinez [M1] et de S. Nakamura [N2], [N3]. Il s'agit d'estimer la largeur des résonances pour un système d'opérateurs de Schrödinger semi-classiques venant de l'approximation de Born-Oppenheimer. Dans cet exposé nous insistons sur la signification géométrique du taux de décroissance exponentielle de la partie imaginaire des résonances par rapport au paramètre semi-classique. Dans son travail H. Baklouti obtient pour la dimension 1 un résultat tout à fait optimal en utilisant la méthode WKB complexe. Nous avons cherché à étendre son résultat à plusieurs dimensions et nous avons été amené à introduire la notion géométrique très simple de correspondance, qui nous sert à définir un circuit du type instanton brisé, objet géométrique attaché aux résonances. Ainsi nous faisons un pas de plus dans le programme semi-classique qui vise à relier des objets géométriques à des quantités spectrales.

Nous tenons à remercier Johannes Sjöstrand pour nous avoir fait remarquer que dans le cas du puits dans une île (cf. 2.4. ci-dessous) il y a un circuit attaché aux résonances, bien que cela ne soit pas mis en avant dans l'article de base de Helffer-Sjöstrand [H-S3].

1. Un système admettant des résonances.

Nous considérons le système autoadjoint sur $L^2(\mathbf{R}^n) \times L^2(\mathbf{R}^n)$:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} 0 & B \\ B^* & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

où P_1, P_2 et B sont des opérateurs différentiels analytiques d'ordre 0 (au sens semi-classique). Nous faisons les hypothèses suivantes, sur les symboles principaux $p_1(x,\xi)$ et $p_2(x,\xi)$, qui sont réels.

a) Hypothèse sur P_2.

On suppose que $(0,0)$ est un puits microlocal non dégénéré pour p_2, c'est à dire que p_2 atteint son minimum en $(0,0)$ et le hessien de p_2 en $(0,0)$ est défini positif. On suppose de plus que $p_2(x,\xi) > \delta > p_2(0,0)$ en dehors d'un petit voisinage de $(0,0)$. On peut se ramener à $p_2(0,0) = 0$.

b) Hypothèse sur P_1

On suppose qu'il existe une transformation canonique globale $\chi : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$, analytique, telle que $p_1 \circ \chi = x_n - \mu$. En particulier la variété caractéristique $\Sigma_{\mathbf{R}} = \{p_1 = 0\}$ est une hypersurface réelle, elle ne contient pas de trajectoire fermée de H_{p_1} et celles-ci vont toutes à l'infini.

On suppose que $p_1(0,0) \neq 0$, donc que les caractéristiques réelles de P_1 et P_2 sont disjointes.

Exemple 1 : L'exemple suivant a été considéré (pour la valeur $\mu = 1$) par Martinez [M1] et en dimension un par Nakamura [N3] et Baklouti [B]

$$\begin{aligned} P_1 &= -h^2\Delta - x_n - \mu \\ P_2 &= -h^2\Delta + x_1^2 + \cdots + x_n^2 \end{aligned} \tag{2}$$

Les hypothèses précédentes sont vérifiées si $\mu \neq 0$.

Spectre de P.

L'opérateur P_1 a un spectre absolument continu au voisinage de 0, c'est même tout $\mathbf{R}$ dans le cas de l'exemple. L'opérateur P_2 possède du spectre discret dans $]-\infty, \delta[$ et ses premières valeurs propres sont proches de celles de l'oscillateur harmonique déduit du Hessien de p_2 en $(0,0)$.

Les deux opérateurs interagissent dans le complexe à cause des termes d'ordre inférieur (B et B^*) et en général (voir [M1] pour l'exemple) P admet des résonances exponentiellement proches de l'axe réel. Elles ne sont pas exponentiellement proches des valeurs propres de P_2 car les termes B et B^* modifient aussi leurs développements WKB.

Soit $E_0(h)$ la résonance de P ayant la plus petite partie réelle, c'est-à-dire celle qui est proche de l'état fondamental de P_2. Posons

$$S = -\lim_{h \to 0} h \log(-\mathrm{Im}\ E_0(h)) \tag{3}$$

C'est cette quantité que nous voulons exprimer à l'aide de quantités géométriques.

Pour qu'il y ait effectivement interaction, il faut faire une hypothèse sur B, nous ferons plus loin une hypothèse tout à fait naturelle.

Rappelons les estimations sur S obtenues précédemment pour l'exemple 1 avec $\mu = 1$.

Martinez [M1] en dimension n : $S \geq \frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Nakamura [N3] en dimension 1 : $S \geq 5/6$

Baklouti [B] en dimension 1 : $S = 5/6$

Dans [B] la méthode WKB complexe pour les systèmes permet de donner un développement asymptotique complet pour les résonances. En fait le cas $\mu = 1$ est plus difficile que $0 < \mu < \frac{1}{4}$ car la partie imaginaire cherchée est la somme de deux contributions.

2. Définition géométrique de S.

2.1 Les lagrangiennes issues du fond du puits.

Nous considérons le symbole principal $p_2(x,\xi)$ de P_2 au voisinage du puits $(0,0)$. Comme p_2 est analytique nous pouvons considérer son extension holomorphe à $T^*\mathbf{C}^n$ et le champ hamiltonien complexe H_{p_2}, pour lequel $(0,0)$ est un point fixe. Il existe évidemment dès que $n > 1$ beaucoup de lagrangiennes complexes passant par $(0,0)$ et contenues dans $\{p_2 = 0\}$. Nous allons en sélectionner deux particulières qui sont liées aux solutions WKB de P_2 près de $x = 0$.

Proposition 1.— *Il existe une unique fonction holomorphe $\varphi(x)$ définie au voisinage de $x = 0$ dans $\mathbf{C}^n$ et satisfaisant*

1) $p_2(x, \varphi'_x) = 0$,

2) $\varphi(0) = 0$; $\varphi'(0) = 0$,

3) la restriction du Hessien de Im φ en 0 à $\mathbf{R}^n$ est définie positive.

Dans le cas de l'exemple 1, $p_2(x,\xi) = \xi^2 + x^2$ et $\varphi(x) = i\frac{x^2}{2}$ (ici $x^2 = \frac{i}{2}\sum_{j=1}^n x_j^2$). Dans le cas général, on pose $q(x,\xi) = p_2(x, i\xi)$ et on voit que $(0,0)$ est un point fixe hyperbolique pour $H_{\mathrm{Re}q}$. On définit les lagrangiennes Γ_+ et Γ_- :

$$\Gamma_+ = \{(x, \varphi'(x)), x \in U\} \quad \Gamma_- = \{(x, \bar{\varphi}'(x))x \in U\} \tag{4}$$

où U est un voisinage de 0 dans $\mathbf{C}^n$.

Dans le cas où $p_2(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$ et 0 est un puits de potentiel non dégénéré, c'est à dire $V(x) = \frac{1}{2}\langle V''(0)x, x\rangle + 0(|x|^3)$, on a $\varphi(x) = id(x)$ avec $d(x)$ la distance d'Agmon de x à 0 (la distance d'Agmon est associée à la métrique $V(x)dx^2$). Dans ce cas les lagrangiennes réelles $\{(x, \frac{1}{i}\varphi'(x))\}$ et $\{(x, -\frac{1}{i}\varphi'(x))\}$ sont constituées respectivement des géodésiques issues de 0, et des géodésiques aboutissant à 0.

Dans le cas général on a :

$$\varphi(x) = id(x) + \psi(x) \quad \psi(x) = 0(|x|^3) \tag{5}$$

avec ψ réelle. Si p_2 vérifie $p_2(x,\xi) = p_2(x,-\xi)$ la fonction $\psi(x)$ est identiquement nulle et $d(x)$ joue le rôle de la distance d'Agmon à 0.

Les lagrangiennes Γ_+ et Γ_- sont bien définies au voisinage de $(0,0)$. Il est certain que globalement elles peuvent être très compliquées.

2.2 La notion de correspondance.

Soit Σ une hypersurface complexe de $T^*\mathbf{C}^n$. Elle est naturellement feuilletée par les courbes intégrales de H_p si $p = 0$ est une équation de Σ. Ces courbes sont de dimension complexe 1. On considère un ouvert $\widetilde{U}$ de $T^*\mathbf{C}^n$ tel que l'intersection de toutes les feuilles avec $\widetilde{U}$ soient connexes et simplement connexes.

Définition : Le couple (ρ_+, ρ_-) de points de Σ est dit en correspondance si ρ_+ et ρ_- sont sur la même feuille.

Soit maintenant deux sous-variétés γ_+ et γ_- de Σ de dimension $n-1$, (alors que $\dim \Sigma = 2n-1$).

Si γ_+ et γ_- sont génériques, l'ensemble des couples $(\rho_+, \rho_-) \in \gamma_+ \times \gamma_-$ qui sont en correspondance, est discret.

2.3 Le circuit associé aux résonances.

On considère la notion précédente dans un ouvert $\widetilde{U}$ de $(0,0)$ dans $T^*\mathbf{C}^n$, $\Sigma = \{p_1 = 0\}$ étant l'hypersurface caractéristique de P_1 et $\gamma_+ = \Gamma_+ \cap \Sigma$, $\gamma_- = \Gamma_- \cap \Sigma$. Pour chaque couple $(\rho_+, \rho_-) \in \gamma_+ \times \gamma_-$ en correspondance via Σ on définit le circuit constitué de la courbe intégrale de H_{p_2} contenant ρ_+, la courbe intégrale de H_{p_1} contenant ρ_+ et ρ_- et la courbe intégrale de H_{p_2} contenant ρ_-. En fait on a une courbe intégrale de $H_{p_1 p_2}$ qui part du puits $(0,0)$ et y revient en passant par ρ_1 et ρ_2.

Soit γ un lacet réel orienté d'origine $(0,0)$, passant par ρ_+ et ρ_- et d'extrémité $(0,0)$, tracé dans ces courbes intégrales complexes. On définit l'action $\int_\gamma \xi dx$. Ensuite on considère le couple (ρ_+, ρ_-) et les chemins correspondants, qui minimisent la partie imaginaire de cette action.

On fait encore deux hypothèses :

Hypothèse géométrique : On suppose qu'il existe un unique couple en correspondance $(\rho_+, \rho_-) \in \gamma_+ \times \gamma_-$ qui minimise $\operatorname{Im} \int_\gamma \xi dx$ (cette quantité est positive avec notre choix de γ).

Hypothèse sur B. On suppose que B est elliptique aux points ρ_+ et ρ_- .

On a alors le

Théorème.— *Sous les hypothèses précédentes on a*

$$S = \operatorname{Im} \int_\gamma \xi dx \tag{6}$$

Dans le cas de l'exemple 1 on a $\varphi(x) = id(x) = \frac{ix^2}{2}$ et

$$\Gamma_+ = \{\xi = ix\} \quad \Gamma_- = \{\xi = -ix\} \quad \Sigma = \{\xi^2 - x_n - \mu = 0\} \tag{7}$$

Dans ce cas très simple les variétés sont définies globalement. L'hypothèse géométrique est vérifiée si $0 < \mu < \frac{1}{4}$ et on a alors :

$$S(\mu) = \mu - \frac{1}{6} + \frac{4}{3}(\frac{1}{4} - \mu)^{3/2} \ , \ 0 < \mu < \frac{1}{4} \ . \tag{8}$$

Par contre pour $\mu > \frac{1}{4}$, en particulier pour $\mu = 1$ c'est à dire le cas traité dans [B], [M1], [N3], il y a deux couples (ρ_+, ρ_-) qui minimisent $\operatorname{Im} \int_\gamma \xi dx$. La situation se complique car dans Im $E(h)$, deux contributions peuvent s'éliminer. Toutefois en général le résultat est encore vrai (voir [B]) avec

$$S(\mu) = \mu - \frac{1}{6} \qquad , \mu > \frac{1}{4} \ . \tag{9}$$

En particulier $S(1) = 5/6$.

Dans un cas plus général l'hypothèse géométrique est satisfaite dans la situation suivante.

Lemme.— *Soit Γ_+ et Γ_- les lagrangiennes associées au puits microlocal* $(0,0)$ *de* P_2*. Soit q analytique de type principal réel avec* $q(0,0) = 0$*. Soit Σ_μ l'hypersurface* $\{p_1 = q - \mu = 0\}$*. Alors il existe un voisinage complexe de* $(0,0)$ *qui contient pour tout μ réel assez petit un unique couple* $(\rho_+, \rho_-) \in (\Gamma_+ \cap \Sigma_\mu) \times (\Gamma_- \cap \Sigma_\mu)$ *en correspondance (pour Σ_μ).*

Autrement dit, si la variété caractéristique de P_1 est assez proche du puits de P_2, il y a un seul instanton brisé qui est associé aux résonances.

2.4 Le puits dans une île.

Dans l'article [HS3] est étudié en détail le cas de l'opérateur de Schrödinger $P = -h^2\Delta + V(x)$, où 0 est un puits non dégénéré pour V analytique, avec $V(0) = 0$ et $V(x) < 0$ en dehors d'un compact (l'île) contenant 0 et à bord C analytique. On a vu plus haut comment sont définies Γ_+ et Γ_-. En général les géodésiques issues de 0 n'atteignent pas la mer. Seules certaines le font, celles qui arrivent en des points de C ou la distance d'Agmon au puits 0 est extrémale. Ces points correspondent à des points de $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$ où la projection de Γ_+ (ou de Γ_-) sur la base dégénère. Dans ce cas l'instanton est formé de la géodésique issue du puits qui atteint la mer, y fait demi-tour et repart au puits. Autrement dit il s'agit d'une courbe intégrale de H_p contenue dans $\Gamma_+ \cap \Gamma_-$. Dans ce cas on retrouve bien que $\frac{1}{2}S$ est la distance d'Agmon du puits à la mer.

3. Schéma de la preuve.

3.1 On utilise une transformation unitaire associée à la transformation canonique globale χ qui permet de se ramener à $p_1 = x_n - \mu$.

Les hypothèses sur P_2 sont telles qu'après une telle transformation on a toujours un puits microlocal qu'on peut supposer être $(0, 0)$.

L'espace qui contient les fonctions résonnantes est associé à Λ_{tG} avec $G = \xi_n$ (voir [HS3] pour la définition de Λ_{tG} et des espaces associés). On peut aussi se placer dans un espace de distributions qui se prolongent à $\mathrm{Im}\, x_n > 0$ au voisinage de $x_n = \mu$.

3.2 On peut construire comme dans [HS1] (voir aussi [S]), des solutions WKB de $Pu = E(h)u$ dans un voisinage de $x = 0$ de la forme

$$u(x,h) = e^{i\frac{\varphi(x)}{h}} a(x,h) \tag{11}$$

où $\varphi(x) = id(x) + \psi(x)$ est la fonction holomorphe telle que $\Gamma_+ = \{(x, \varphi'(x))\}$ et $\Gamma_- = \{(x, \bar{\varphi}'(x))\}$.

Ici l'amplitude $a(x,h)$ est vectorielle. La construction sur le réel est possible seulement pour $x_n < \mu$, mais il est possible de contourner cette hypersurface dans $\mathbf{C}^n$ et de poursuivre la construction.

De même on construit une solution WKB de ${}^tPv = \bar{E}(h)v$ et sur le réel on a $v = \bar{u}$.

3.3 On estime alors la partie imaginaire de $E(h)$ par une intégrale du type $\int_\Gamma (Pu|v)dx$ où Γ est un contour entourant $x_n = \mu$ dans $\mathbf{C}^n$.

La phase dans $(Pu|v)$ est $i(\varphi(x) - \bar{\varphi}(x))\frac{1}{h} = -2d(x)\frac{1}{h}$

On estime l'intégrale par la phase stationnaire dans les variables x' (si on note $x = (x', x_n)$) et on vérifie bien que si $d(x', \mu)$ admet un minimum strict en x'_0, alors, avec $x_0 = (x'_0, \mu)$, on a

$$\rho_+ = (x_0, \varphi'(x_0)) \ , \rho_- = (x_0, \bar{\varphi}'(x_0)), \quad \frac{\partial}{\partial x'_n}\varphi(x_0) = \frac{\partial}{\partial x'}\bar{\varphi}(x_0) \ ,$$

donc ρ_+ et ρ_- sont sur la même courbe intégrale de $H_{x_n} = \frac{\partial}{\partial \xi_n}$, c'est à dire en correspondance.

3.4 Dans le développement asymptotique de la résonance il y a des $\log h$ qui apparaissent dans les développements, à cause des interactions dans le complexe aux points ρ_+ et ρ_-. Ce phénomène est à rapprocher des résultats de [HS2] appendice b, (voir aussi [K-R], [Mä], [R], [G-G]).

Pour les résonances proches des états de l'oscillateur harmonique d'ordre plus élevé, il peut y avoir des multiplicités, ce qui complique les développements mais le facteur exponentiel est le même.

4. Remarques finales.

A notre connaissance ce type d'effet tunnel dans l'espace de phases à l'aide de ce qui peut s'appeler un instanton brisé n'a pas été décrit auparavant. Il est probable que des situations semblables se présentent dans beaucoup d'autres problèmes, par exemple d'éclatement de valeurs propres. Voici un cas :

Dans [R], T. Ramond donne un développement asymptotique très précis du n-ième gap pour des équations de Hill du type

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + (\frac{1}{2 - \cos x} - E)u = 0 \tag{12}$$

En posant $E = h^{-2}$ ce problème se ramène à un problème d'effet tunnel semi-classique sur le cercle. Il s'agit d'évaluer l'interaction entre les caractéristiques ou puits sous-variétés : $\xi = +1$ et $\xi = -1$. Ces deux puits sont connectés dans le complexe par les hypersurfaces $x = x_0$, où x_0 est un pôle du potentiel : $2 - \cos x_0 = 0$. Evidemment en dimension 1 la situation géometrique est beaucoup plus simple, car les lagrangiennes sont confondues avec la variété caractéristique. Ici l'hypersurface qui fait la correspondance est une partie de la variété caractéristique de l'opérateur lui-même.

Références :

[A-D] Asch J., Duclos P. : An elementary model of dynamical tunneling ; in Differential Equations with Applications to Mathematical Physics (F. Ames, J.V. Herod, E. Harrel eds.), 1993, 1-11, Academic Press.

[B] Baklouti, H. : Asymptotique des largeurs de résonances pour un modèle d'effet tunnel microlocal ; Thèse Université Paris-Nord, (1995).

[G-G] Gérard C., Grigis A. : Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier ; Journal of Differential Equations 72, (1988), 149-177.

[H-S1] Helffer B., Söstrand J. : Multiple wells in the semi-classical limit I, Comm. in P.D.E. 9 (1984) 337-408.

[H-S2] Helffer B., Sjöstrand J. : Semiclassical Analysis for Harper's Equation III, Bulletin de la SMF Mémoire n°39, (1989), 1-124.

[H-S3] Helffer B., Sjöstrand J. : Résonances en limite semi-classique, Bulletin de la SMF, Mémoire 24-25 (1986), 1-228.

[K-R] Kaïdi N., Rouleux M. : Forme normale d'un Hamiltonien à deux niveaux près d'un point de branchement en limite semi-classique, CRAS 143, 317 (série 1) 359-364.

[M1] Martinez A. : Estimates on complex interactions in phase space, Mathematische Nachrichten 167 (1994) 203-254.

[M2] Martinez A. : Precise exponential estimates in adiabatic theory, J. Math. Phys. 35 (8) (1994) 3889-3915.

[M3] Martinez A. : Résonances dans l'approximation de Born-Oppenheimer I ; J. of Diff. Eq. 91 (1991) 204-234, - II, Comm. Math. Phys. 135, (1991) 517-530.

[Mä] März C. : Spectral Asymptotics near the Potential Maximum for Hill's Equation, Asymptotic Analysis 5 (1992) 221-267.

[M-M] Martinez A., Messirdi B., Resonances of diatomic molecules in the Born-Oppenheimer approximation, Comm in PDE 19 (7 et 8) (1994) 1139-1162.

[N1] Nakamura S. : Tunneling estimates in momentum space and scattering, Spectral and Scattering theory (ed Ikawa M.) Marcel Decker, New-York (1994).

[N2] Nakamura S. : On Martinez's method of phase space tunneling, preprint 1994 Université de Tokyo, à paraître dans Reviews in Math. Phys.

[N3] Nakamura S. : On an example of phase-space tunneling, preprint 1994 Université de Tokyo.

[R] Ramond T. : Intervalles d'instabilité pour une équation de Hill à potentiel méromorphe, Bulletin de la SMF 121 (1993) 403-444.

[S] Simon B. : Semiclassical analysis of low-lying eigenvalues, II Tunneling, Ann. of Math. 120 (1984) 89-118.

Alain Grigis
LAGA, URA 742
Institut Galilée
Université Paris XIII
Avenue J.B. Clément
93430 Villetaneuse