Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

F. Helein

Surfaces de Willmore et groupes de lacets

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 20, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A20_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1994-1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SURFACES DE WILLMORE ET GROUPES DE LACETS

F. HELEIN

Exposé n° XX

21 Mars 1995

Le but de ces notes est d'une part d'exposer un certain nombre de généralités et de rappeler des résultats connus sur les surfaces de Willmore, et d'autre part de présenter un travail que Daniel Bättig et moi sommes sur le point de terminer, en vue de construire de telles surfaces.

1. Définitions et exemples

Plaçons-nous dans l'espace euclidien de dimension 3, et considérons l'ensemble $\mathcal{E}$ des surfaces compactes, orientables, sans bord immergées dans $\mathbf{R}^3$ (l'immersion devra être de classe $\mathcal{C}^4$). Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{E}$ une telle surface, à partir des première et deuxième formes fondamentales, il est possible de définir une 2-forme volume sur $\mathcal{S}$, notée dA, ainsi que des courbures principales $k_1 \leq k_2$ en tout point de $\mathcal{S}$. Notons $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ la courbure moyenne, et $K = k_1 k_2$ la courbure de Gauss. La quantité suivante,

$$W(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} H^2 dA \ ,$$

définit une fonctionnelle sur $\mathcal{E}$, appelée *fonctionnelle de Willmore.* Une variante de W est

$$\widetilde{W}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} \frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 dA \ ,$$

qui diffère de $W(\mathcal{S})$ de $W(\mathcal{S}) - \widetilde{W}(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} K dA = 4\pi(1-g)$, où g est le genre de $\mathcal{S}$, en raison du théorème de Gauss-Bonnet. Comme cette différence est un invariant topologique, les deux fonctionnelles W et $\widetilde{W}$ ont les mêmes points critiques sur $\mathcal{E}$, qui sont appelés *surfaces de Willmore.* Par un calcul un peu long, on montre que toute surface de Willmore vérifie l'équation

$$\Delta H + 2(H^2 - K)H = 0 \ ,$$

où le laplacien Δ utilisé est associé à la première forme fondamentale de l'immersion. Il s'agit donc d'une équation non linéaire, du quatrième ordre, car H et K dépendent des dérivées premières et secondes de l'immersion.

Les premières questions qui viennent à l'esprit sont : pour chaque genre, il y a t-il une surface de Willmore simple ? Il y a t-il des surfaces minimisant la fonctionnelle de Willmore ? Pour $g \in \mathbf{N}$, notons $\mathcal{E}_g$ le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ des surfaces de genre g. Nous dirons qu'une surface $\mathcal{S} \in \mathcal{E}_g$ est minimisante, si elle a la plus petite valeur pour W parmi les surfaces de $\mathcal{E}_g$ (remarquons que W et $\widetilde{W}$ sont bornées inférieurement par 0).

Genre 0. L'exemple le plus simple de famille de surfaces de Willmore est la sphère

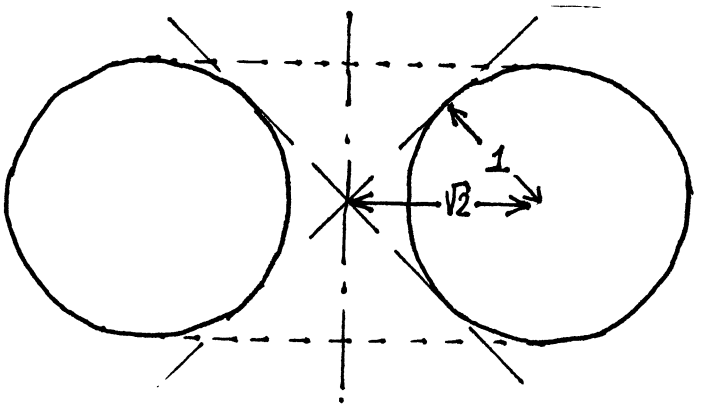
$$S^2_{a,n} = \{x \in \mathbf{R}^3 / \mid x - a \mid = r\} \ .$$

Tous ses points sont ombilics, c'est à dire $k_1 = k_2$ partout. Chacune de ces sphères est minimisante, car $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{E}_0$,

$$W(\mathcal{S}) = \int_{\mathcal{S}} H^2 dA \geq \int_{\mathcal{S}} K dA = 4\pi = W(S^2_{a,n}) \ .$$

Donc elles sont a fortiori des surfaces de Willmore. Signalons que les surfaces de Willmore de genre 0 ont toutes été obtenues par R. Bryant [Bryant 1,2].

Genre 1. L'exemple suivant est du à T. Willmore (1965). Il s'agit d'un tore de révolution engendré par la rotation d'un cercle de rayon 1, et dont le centre est situé à une distance $\sqrt{2}$ de l'axe de révolution.



T. Willmore a montré que ce tore, que nous noterons T^2_W, est une surface de Willmore, et a conjecturé qu'il était minimisant. Malgré quelques réponses partielles (voir par exemple [Li-Yau]), cette conjecture n'est toujours pas résolue. Signalons cependant que L. Simon a prouvé l'existence dans $\mathcal{E}_1$ d'un tore minimisant, à l'aide d'une approche analytique [Simon], c'est d'ailleurs le seul résultat d'analyse qui ait été écrit sur le sujet à ce jour. Cependant on ne sait pas si le tore "fabriqué" par L. Simon est celui de T. Willmore.

2. Propriétés géométriques.

Les surfaces de Willmore jouissent d'un certain nombre de propriétés géométriques très intéressantes.

2.1 Invariance conforme.

La fonctionnelle de Willmore possède les symétries suivantes : si T est une transformation conforme de $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$, (groupe de Möbius), alors $\forall \mathcal{S} \in \mathcal{E}$,

$$W(T(\mathcal{S})) = W(\mathcal{S}) \ .$$

La raison pour cela est que sous l'effet d'une telle transformation conforme, la quantité $\frac{1}{4}(k_1 - k_2)^2 dA$ est conservée (c'est pourquoi il est préférable d'utiliser $\widetilde{W}$ plutôt que W si on souhaite exploiter cette symétrie). Une conséquence de tout cela est que si $\mathcal{S}$ est une surface de Willmore, alors $T(\mathcal{S})$ en est une également.

Le groupe des transformations conformes de $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ est un groupe de Lie de dimension 10, engendré par les translations, rotations, dilatations et inversions de $\mathbf{R}^3$ (groupe de Möbius).

(Exercice : relire les exemples donnés en 1., et trouver de nouveaux exemples). Nous noterons $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^3)$ ce groupe.

Une autre conséquence de cette symétrie, est que la structure euclidienne que l'on s'est donnée au début sur $\mathbf{R}^3$ est superflue, et qu'il suffit de fixer une structure conforme. Or comme la projection stéréographique de S^3 vers $\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}$ est conforme, on peut tout aussi bien considérer le problème de Willmore dans S^3, qui a l'avantage d'être compact.

2.2 Application de Gauss conforme.

L'application de Gauss classique (vecteur unitaire normal à la surface) joue un très grand rôle en géométrie des surfaces. Par exemple, toute surface a une courbure moyenne constante, si et seulement si son application de Gauss est une application harmonique de la surface vers la sphère. Mais c'est une notion euclidienne, qui ne peut pas jouer de rôle pour les surfaces de Willmore. Nous allons définir à la place une *application de Gauss conforme* qui sera une sphère orientée, ou un plan orienté de $\mathbf{R}^3$. Nous noterons $Q = \{$ sphères orientées de $\mathbf{R}^3\} \cup \{$ plans orientés de $\mathbf{R}^3\}$.

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{E}$, $m \in \mathcal{E}$, on note $S^2_{\gamma(m)}$ l'unique élément de Q tel que

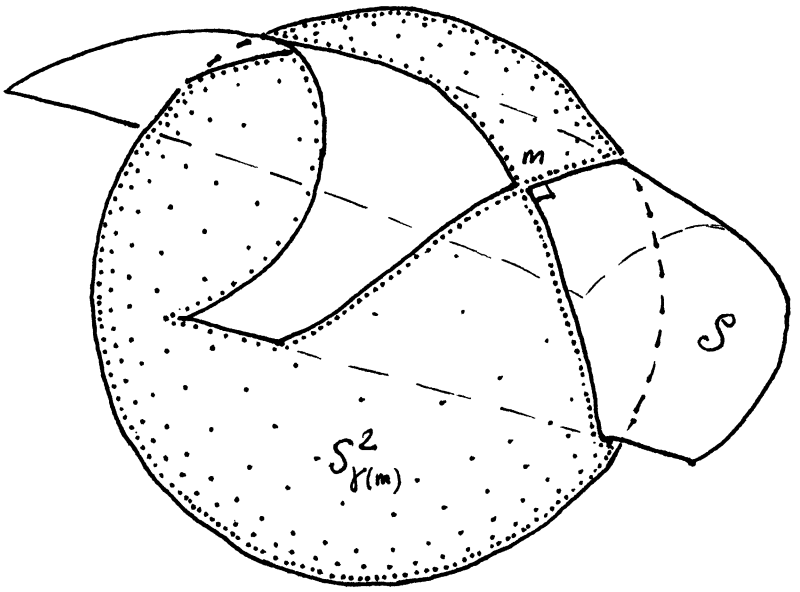
0) $m \in S^2_{\gamma(m)}$

i) $S^2_{\gamma(m)}$ est tangent à $\mathcal{S}$ en m, avec la même orientation

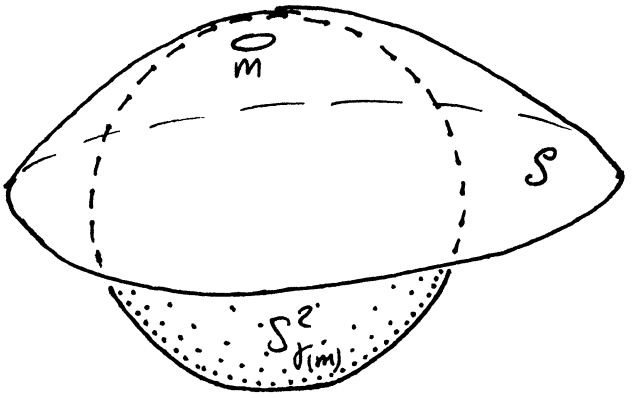
ii) $S^2_{\gamma(m)}$ et $\mathcal{S}$ ont même courbure moyenne au point m.

L'application $m \mapsto S^2_{\gamma(m)}$ est appelée application de Gauss conforme.

Si le point m est non ombilic ($k_1 \neq k_2$), on a la figure suivante



Si le point m est ombilic ($k_1 = k_2$), on a alors la géométrie suivante :



L'intérêt de l'application de Gauss conforme est que l'on a le résultat suivant.

Théorème 1.— *Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{E}$, alors*

a) l'application de Gauss conforme $\mathcal{S} \to Q$ est conforme.

b) $\mathcal{S}$ est une surface de Willmore si et seulement si l'application de Gauss conforme $\mathcal{S} \to Q$ est harmonique.

Remarque. Ce théorème n'a pas de sens pour l'instant, vu que je n'ai précisé aucune structure conforme, et aucune structure riamnnienne sur Q. Ce point s'éclaircira en 3.

2.3 Transformée conforme.

Il s'agit d'une construction, qui à une surface de $\mathbf{R}^3$ va associer une autre surface, "ayant même application de Gauss conforme". En particulier, si la surface de départ est de Willmore, sa transformée conforme sera aussi de Willmore. Il faut faire cependant attention ici à une difficulté majeure : cela ne marche qu'en dehors des points ombilics. Nous noterons $\mathcal{U} = \{$ points ombilics de $\mathcal{S}\}$.

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{E}$. Considérons la famille dans Q

$$\{S^2_{\gamma(m)}/m \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}\} \ ,$$

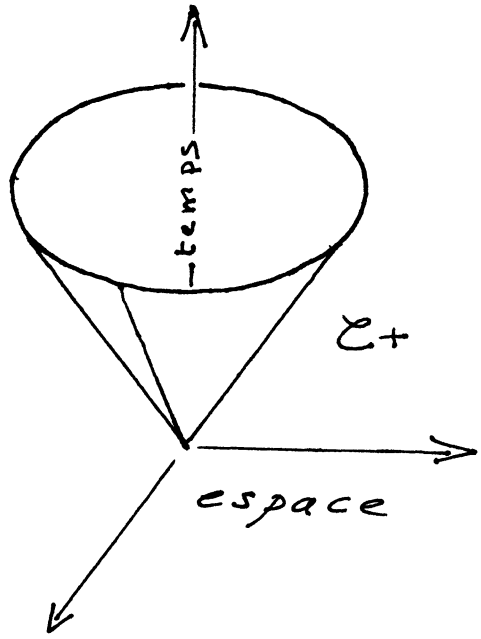
On montre que cette famille admet deux surfaces enveloppes : $\mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$, et une autre surface notée $\widehat{\mathcal{S}}$. Pour tout $m \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{U}$, nous noterons $\hat{m}$ l'unique point dans $S^2_{\gamma(m)} \cap \widehat{\mathcal{S}}$. Nous avons le résultat suivant

Théorème 2.— *Soit $\mathcal{S}$ une surface de Willmore, alors $\widehat{\mathcal{S}}$ est également une surface de Willmore.*

3. Traduction dans la géométrie de Minkowski.

Nous allons passer de $\mathbf{R}^3(\cup\{\infty\})$, ou S^3, à l'espace de Minkowski $\mathbf{R}^{4,1}$. La raison pour cela est que le groupe d'isometries de $\mathbf{R}^{4,1}$ préservant le temps (le groupe de Lorentz $0_+(4,1)$ s'identifie avec le groupe de Möbius $\mathrm{Conf}(\mathbf{R}^3 \cup \{\infty\}) = \mathrm{Conf}(S^3)$. Nous disposons ainsi d'une représentation linéaire de $\mathrm{Conf}(S^3)$, qui est donnée par l'action de $SO(4,1)$ sur $\mathbf{R}^{4,1}$. Mais nous devons d'abord, suivant R. Bryant [Bryant 1], savoir comment représenter un point m de $\mathbf{R}^3$ (que nous identifierons définitivement avec S^3 dans la suite) dans l'espace de Minkowski.

Soit $\mathcal{C}_+ = \{x \in \mathbf{R}^{4,1}/\|x\|^2 = 0, \langle x, \vec{\tau}\rangle > 0\}$ le demi-cône de lumière dirigé vers le futur. Ici $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire de Minkovski, de signature $(+++++-)$ et $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ et $\vec{\tau}$ est un vecteur de type temps ($\|\vec{\tau}\|^2 < 0$), pointant vers le futur.



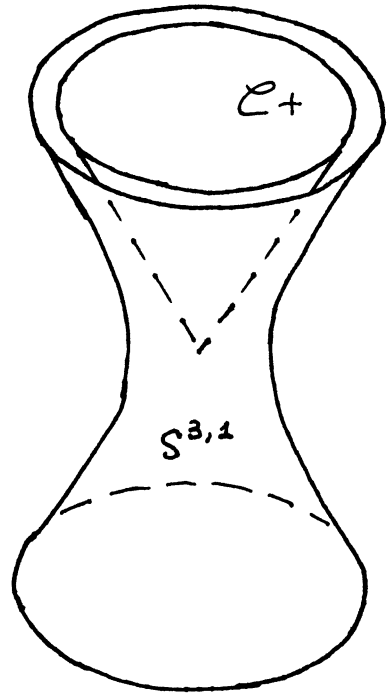
L'ensemble des demi-droites de lumière incluses dans $\mathcal{C}_+$ s'identifie avec $\mathcal{C}^+/\mathbf{R}_+^* \cong S^3$. Nous allons donc associer à tout point $m \in S^3$ une demi-droite dans $\mathcal{C}^+$. Pour cela il suffira de choisir un vecteur non nul, noté e_0, dans cette demi-droite.

Le petit miracle est que lorsque $T \in \mathrm{Conf}(S^3)$ agit sur S^3, il existe un unique $R \in 0_+(4.1)$, tel que les actions respectives de T sur S^3, et R sur $\mathcal{C}_+$ coïncident par la correspondance décrite plus haut.

Peut-on "traduire" d'autres objets géométriques ? La réponse est oui. Par exemple si E_1 et E_2 forment une base orthonormée du plan tangent à une surface $\mathcal{S} \subset S^3$ en m, nous pourrons les représenter par deux vecteurs e_1 et e_2 dans $\mathbf{R}^{4,1}$, tels que $\|e_1\|^2 = \|e_2\|^2 = 1$, et $\langle e_1, e_2 \rangle = 0$. En effet, si $\mathcal{S}$ est une surface de S^3, on peut relever $\mathcal{S}$ en une surface dans $\mathcal{C}_+$ (mais de façon non unique), et e_1, e_2 seront les vecteurs tangents à cette nouvelle surface, "au-dessus" de E_1 et E_2. De même, on peut choisir un vecteur e_4 dans $\mathcal{C}^+$, représentant $\hat{m}$, si m n'est pas ombilic.

Enfin il existe une façon canonique de représenter tout élément de Q par un élément

$$y \in S^{3,1} = \{y \in \mathbf{R}^{4,1} / \|y\|^2 = 1\}$$



En effet, considérons dans $\mathbf{R}^{4,1}$ l'hyperplan $y^\perp$. Il rencontre $\mathcal{C}^+$ suivant un cône de dimension 3. A travers l'identification $\mathcal{C}^+/\mathbf{R}_+^* \cong S^3$, ce cône correspond à une sphère de dimension 2 dans S^3, donc à un plan ou une sphère dans $\mathbf{R}^3$. On peut orienter cette sphère, de façon à ce que $-y$ corresponde à la même sphère avec une orientation opposée.

Ainsi nous avons une identification $Q \cong S^{3,1}$ qui donne un sens au théorème 1, $S^{3,1}$ étant muni de sa métrique canonique. Nous pouvons donc représenter l'application de Gauss conforme par une application

$$\mathcal{S} \to S^{3,1}$$

$$m \mapsto \gamma(m) \ .$$

Suivant R. Bryant, il est possible d'ajuster les 5 vecteurs $e_0, e_1, e_2, e_3 = \gamma$, e_4 de façon à ce qu'ils forment une base orthonormée de $\mathbf{R}^{4,1}$, au sens où

$$(\langle e_i, e_j \rangle) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$

(Sauf bien entendu au-dessus des points ombilics, car e_4 n'est pas défini a priori sur $\mathcal{U}$).

Si on choisit une base orthonormée de référence $(f_0, f_1, f_2, f_3, f_4) = f$, la base $e = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ est connue dès que l'on s'est donné $g \in SO_+(4,1)$ tel que

$$e = f.g \ .$$

On se ramène donc à étudier des repères mobiles de $\mathbf{R}^{4,1}$, où des applications de $\mathcal{S}$ vers $SO_+(4,1)$.

4. Paternité des résultats.

Je n'ai cité aucune référence dans la partie 2. C'est en raison d'une certaine malédiction qui frappe ce problème, condamné à être oublié régulièrement. En effet ce problème a été considéré il y a déjà longtemps, par Thomsen et Schadow en 1923. Ces deux auteurs avaient calculer l'équation d'Euler, que l'on retrouve dans un livre de Blaschke [Blaschke], datant de 1929. Plus tard K. Voss en 1950, et T. Willmore en 1960 redécouvrirent indépendamment ce problème. De même l'invariance conforme, exposée dans le livre de Blaschke, a été redécouverte par J.H. White en 1973 [White]. Enfin l'existence de la transformée conforme "due" à R. Bryant en 1984 [Bryant 1] était déjà connue de Blaschke.

Afin d'éviter de sombrer dans le pessimisme, mentionnons tout de même que le papier de R. Bryant contient beaucoup de résultats nouveaux, dont l'existence d'une forme différentielle quartique holomorphe, analogue à la différentielle de Hopf.

Pour plus de détails sur les surfaces de Willmore, voir le chapitre 7 du livre de T.J. Willmore [Willmore].

5. Applications harmoniques et systèmes complétement intégrables.

Nous allons maintenant nous intéresser à des méthodes de construction de surfaces de Willmore. Une piste nous est donnée par le fait que l'application de Gauss conforme et harmonique. Or on sait beaucoup de choses sur les applications harmoniques définies sur une surface, à valeurs dans une variété homogène, notamment depuis le travail de K. Uhlenbeck en 1989 [Uhlenbeck]. En particulier, tous les tores harmoniques ont été construits dans [Burstall-Ferus-Pedit-Pinkall], et plus récemment J. Dorfmeister, F. Dedit et H. Wu ont été capables de construire une représentation de type Weierstrass pour toutes applications harmoniques d'une surface simplement connexe vers un espace symétrique. [Dorfmeister-Petit-Wu]. Attention, toutes ces constructions ne marchent que si la variété d'arrivée est compacte (ce qui n'est pas le cas ici).

Cependant cela suggère d'utiliser ces méthodes à notre problème.

5.1 Rappel sur les applications harmoniques.

Nous allons exposer ici brièvement les résultats de [Dorfmeister-Pedit-Wu]. On s'intéresse aux applications harmoniques $u : U \to G/K$, où U est un domaine simplement connexe de $\mathbf{R}^2$, G est un groupe de Lie *compact*, et K est un sous-groupe de Lie de G. Nous noterons $\mathfrak{k}$ l'algèbre de Lie de K et $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie de G. Supposons que K coïncide avec G^σ, le sous-ensemble des points fixes d'un isomorphisme involutif $\sigma = G \to G$. (ou bien que K soit une réunion de composantes convexes de G^σ). Nous avons alors la décomposition de Cartan

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}, \quad \text{avec} \quad [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}], [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{k}; [\mathfrak{k}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p} \ .$$

Soit maintenant une application $u : U \to G/K$. Nous allons commencer par construire un relèvement $F : U \to G$, tel que l'image de $F(z)$ par la projection canonique $G \to G/K$ soit égale à $u(z)$. Puis nous considérons la 1-forme sur U, à coefficient dans $\mathfrak{g}$

$$\alpha = F^{-1} dF$$

(forme de Maurer-Cartan). Utilisant la décomposition de Cartan de $\mathfrak{g}$ associée à $\mathfrak{k}$ et $\mathfrak{p}$, nous pouvons écrire de façon unique

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1$$

où α_0 est à coefficients dans $\mathfrak{k}$, et α_1 à coefficients dans $\mathfrak{p}$. Indiquons ici le sens géométrique de α_0 et α_1 : $\mathfrak{p}$ est isomorphe à l'espace tangent à G/K en un point $u(z)$, cet isomorphisme n'est pas unique car il dépend du choix du relèvement $F(z)$ de $u(z)$, tout à fait analogue au choix d'une base de l'espace tangent $T_{u(z)}G/K$. Ainsi α_1 représente la variation de $u(z)$, exprimée dans une certaine base, et α_0 représente les coefficients de connexion, c'est à dire le "mouvement" de la base. Comme α dérive de F, nous avons la relation de courbure nulle

$$d\alpha + \frac{1}{2}[\alpha \wedge \alpha] = 0 \ .$$

Considérons à présent la famille de déformation de α

$$A_\lambda = \alpha_1' \lambda^{-1} + \alpha_0 + \alpha_1'' \lambda \ ,$$

où $\lambda \in \mathbf{C}^*$ est un paramètre supplémentaire, α_1' est la composante $(1,0)$ de α_1 et α_1'' la composante $(0,1)$ de α_1. (Id est $\alpha_1' = \alpha_1(\frac{\partial}{\partial z})dz \cdots$). On reconnait que $A_1 = \alpha$.

Théorème.— *u est une application harmonique si et seulement si, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$,*

$$dA_\lambda + \frac{1}{2}[A_\lambda \wedge A_\lambda] = 0 \ .$$

Une conséquence de ce théorème est que si u est harmonique, on peut construire une application

$$F_\lambda : U \to G^{\mathbf{C}}$$

telle que $dF_\lambda = F_\lambda A_\lambda$, pour tout $\lambda \in \mathbf{C}^*$. Si de plus on s'impose la condition de normalisation $F(z_0) = F_{\lambda(z_0)} = Id$, alors F_λ est unique. Le bon point de vue est alors de voir cette famille d'applications comme une unique application

$$\widetilde{F} : U \to \Lambda G_\sigma \ ,$$

où ΛG_σ est un ensemble très gros, appelé groupe de lacets défini par

$$\Lambda G_\sigma = \{g : S^1 \to G / g(-\lambda) = \sigma.g(\lambda), \forall \lambda \in S^1\} \ .$$

Remarquons ici que l'on s'est restreint aux valeurs de λ dans le cercle $S^1 = \{\lambda \in \mathbf{C}^* / |\lambda| = 1\}$. Il est en fait suffisant de connaître F_λ, pour $\lambda \in S^1$, car $\lambda \mapsto F_\lambda$ est holomorphe sur $\mathbf{C}^*$.

Cela conduit à l'utilisation de méthodes très puissantes pour étudier les applications harmoniques. Dans le travail [Dorfmeister-Pedit-Wu], la clef de la construction est que l'on peut décomposer de façon unique $\widetilde{F}$ en un produit

$$\widetilde{F} = F_- F_+ \ ,$$

où F_- se prolonge de façon holomorphe aux valeurs de λ telles que $|\lambda| \geq 1$, et F_+ se prolonge de façon holomorphe à l'intérieur du disque $\{|\lambda| \leq 1\}$(F_-, F_+ sont tous deux à valeurs dans $\Lambda G_\sigma^{\mathbf{C}}$, le groupe de lacets ΛG_σ *complexifié*).

Le point est que si on choisit cette décomposition en s'imposant $F_\lambda(\lambda = \infty) = Id$, alors F_- devient une fonction méromorphe de $z \in U$.

Une telle décomposition, appelée "décomposition d'Iwasawa" par [Dorfmersher-Pedit-Wu] est démontrée dans le cas où G est compact dans [Pressley-Segal] (où ce genre de décomposition porte le nom de problème de Riemann Hilbert, ou de théorème de Birkhoff-Grothendieck).

On obtient ainsi une représentation de type Weierstrass des solutions du problème, en remarquant que tous les F possibles proviennent d'applications méromorphes $\xi : U \to \mathfrak{p} \otimes \mathbf{C}$.

5.2 Une stratégie pour les surfaces de Willmore.

A la lumière de ce qui précède, nous pouvons échafauder le plan suivant, afin de construire toutes les immersions de Willmore d'une surface simplement connexe Σ.

1) Etudier les applications harmoniques de Σ vers $S^{3,1}$, en s'apercevant que

$$S^{3,1} = G/K \ ,$$

où $G = SO_0(4,1)$, et $K = \left\{ g \in G / g \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Introduire pour cela le repère $e = (e_0, e_1, e_2, e_3, e_4)$ construit par R. Bryant (n'oublions pas que ce qui nous intéresse c'est e_0 !), et utiliser ce repère comme un relèvement au-dessus de $\gamma = e_3$. On note ω la 1-forme à coefficients dans $SO(4.1)$ telle que

$$de = \omega.e.$$

2) Décomposer $so(4.1) = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ où $\mathfrak{k}$ est l'algèbre de Lie de K, et écrire

$$\omega = \omega_0 + \omega_1' + \omega_1'' \ ,$$

avec ω_0 à coefficients dans $\mathfrak{k}$, ω_1 à coefficients dans $\mathfrak{p}$ et $\omega_1' = \omega_1(\frac{\partial}{\partial z})dz, \omega_1'' = \omega_1(\frac{\partial}{\partial \bar{z}})d\bar{z}$.

3) Former la quantité

$$\omega_\lambda = \lambda^{-1}\omega_1' + \omega_0 + \lambda\omega_1'' \ ,$$

et s'apercevoir qu'on a une surface de Willmore si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbf{C}^* \ , d\omega_\lambda + \frac{1}{2}[\omega_\lambda \wedge \omega_\lambda] = 0 \ .$$

4) Appliquer les techniques décrites au paragraphe précédent pour construire $\gamma = e_3$.

5) En déduire une immersion de Willmore X, à partir de la connaissance de e.

6. Confrontation avec le problème.

D. Bättig et moi avons rencontré un certain nombre de difficultés qui nous ont amené à modifier ce programme de la façon suivante.

1) Comment être sûr que l'application X est une immersion ?

Il semble en effet difficile de le garantir par la méthode précédente. Celle-ci nous donnera des informations précises sur les dérivées de γ, mais pas sur les dérivées de X. Cela nous amène à utiliser une autre caractérisation des surfaces de Willmore que nous avons remarquée. Soit $Gr_3(\mathbf{R}^{4,1})$ la grassmannienne des sous-espaces vectoriels de dimension 3 de $\mathbf{R}^{4,1}$, de type espace. Alors l'application

$$\begin{aligned} \beta : \Sigma &\to Gr_3(\mathbf{R}^{4,1}) \\ z &\mapsto \text{Vect}\ (e_1(z), e_2(z), e_3(z)) \end{aligned}$$

est harmonique conforme si et seulement si X est une surface de Willmore. Or $Gr_3(\mathbf{R}^{4,1}) \cong SO(4.1)/SO(3) \times SO(1,1)$, et il est possible de remplacer l'étude précédente par l'étude des applications harmoniques à valeurs dans cette variété homogène. L'intérêt est que les informations données par la construction de β permettront de dire si l'application X correspondante est une immersion.

2) Les constructions précédentes ne marchent qu'en dehors du lieu ombilic, $\mathcal{U}$ (car e_4 n'est pas défini sur $\mathcal{U}$ a priori).

Nous devons ainsi travailler avec un repère e tel que e_0 représente toujours l'immersion X cherchée, et $e_3 = \gamma$, mais sans s'imposer que e_4 représente la transformée conforme de X. Le prix à payer est que la famille de 1-forme de connexion

$$\omega_\lambda = \lambda^{-1}\omega_1' + \omega_0 + \lambda\omega_1'' \ ,$$

est plus difficile à étudier, car ω_1' n'est plus de type $(1,0)$ et ω_1'' n'est plus de type $(0,1)$. En revanche, on peut localement seulement se ramener au cas où $\omega_1'(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}) = \omega_1''(\frac{\partial}{\partial z}) = 0$, par des transformations de jauge, ce qui permet de travailler quand même.

3) Le groupe de Lie dans lequel on travaille est $SO(4,1)$, qui est *non-compact*, et a priori les théorèmes de factorisation démontrés dans [Pressley-Segal] ne sont pas connus.

Cette difficulté semble très sérieuse. A cause d'elle il me semble pas possible d'obtenir une représentation de Weierstrass globale de toute immersion de Willmore, mais seulement, en travaillant avec des cartes locales dans le groupe de lacets, de construire des voisinages de points dans une surface de Willmore.

Signalons pour conclure, une conséquence simple de cette étude : toute immersion de Willmore est plongée dans une famille dépendant d'un paramètre $\lambda \in S^1$ d'immersions de Willmore. Cette famille est donnée par F_λ, pour $\lambda \in S^1$.

Références

[Bättig-Hélein] D. Bättig, F. Hélein, *Willmore immersion and Loop groups*, en préparation.

[Blaschke] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie*, III, Springer, Berlin 1929,

[Bryant 1] R. Bryant, *A duality theorem for Willmore surfaces*, J. Diff. Geom. **20** (1984), 23-53.

[Bryant 2] R. Bryant, *Surfaces in Conformal Geometry*, Amer. Math. Soc. Proc. Symp. Pure Maths. **48** (1988), 227-40.

[Burstall-Ferus-Pedit-Pinkall] F. Burstall, D. Ferus, F. Pedit, U. Pinkall, *Harmonic tori in symmetric spaces and commuting Hamiltonian systems on loop algebras*, Ann. of Math. **138** (1993), 173-212.

[Dorfmeister-Pedit-Wu] J. Dorfmeister, F. Pedit, H. Wu, *Weierstrass type representation of harmonic maps into symmetric spaces*, Ann. of Math.

[Li-Yau] P. Li, S.T. Yau, *A new conformal invariant and its application to the Willmore conjecture and first eigenvalues of compact surfaces*, Invent. Math. **69** (1982), 269-91.

[Pressley-Segal] A.N. Pressley, G. Segal, *Loop groups*, Oxford Math. Monographs, Clarendon Press, Oxford 1986.

[Simon] L. Simon, *Existence of surfaces minimizing the Willmore functional*, prépublication.

[Uhlenbeck] K. Uhlenbeck, *Harmonic maps into Lie groups*, J. Diff. Geom. **30** (1989), 1-50.

[White] J.H. White, *A global invariant of conformal mapings in space*, Proc. Amer. Math. Soc. **38** (1973), 162-4.

[Willmore] T.J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publications, Oxford 1993.

Frédéric HELEIN
CMLA, ENS de Cachan
61 avenue du Président Wilson
94235 Cachan cedex France
helein@cmla.ens-cachan.fr