SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. GINIBRE

G. VELO

Inégalités de Strichartz généralisées pour l'équation des ondes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 17, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A17_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

INEGALITES DE STRICHARTZ GENERALISEES POUR l'EQUATION DES ONDES

J. GINIBRE et G. VELO

Exposé n° XVII

11 Avril 1995

Les inégalités de Strichartz généralisées, pour l'équation des ondes $\square\, u = f$, sont des estimations de la solution u du problème de Cauchy pour cette équation, sous formes de normes intégrales dans l'espace temps, en termes de normes analogues de f et des données initiales. On donnera ci-dessous comme premier exemple le résultat original de Strichartz [St] après avoir introduit les notations nécessaires.

On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier, $\omega = \sqrt{-\Delta} = \mathcal{F}^*|\xi|\mathcal{F}$, $U(t) = \exp(i\omega t)$, $K(t) = \omega^{-1} \sin \omega t$ et $\dot{K}(t) = \cos \omega t$. La solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} \square\, u = f \\ u(t=0) = u_0 \, , \; \partial_t u(t=0) = u_1 \end{cases} \tag{1}$$

dans l'espace temps $\mathbf{R}^{n+1}$ peut s'écrire $u = v + w$ où

$$v(t) = \dot{K}(t) u_0 + K(t) u_1 \tag{2}$$

est la solution de l'équation homogène $\square\, v = 0$ avec les mêmes données initiales (u_0, u_1) et

$$w(t) = \int_0^t dt'\, K(t-t') f(t') \equiv (K *_R \chi_+ f)(t) \tag{3}$$

est la solution de l'équation inhomogène $\square\, w = f$ avec données initiales nulles. La formule (3) est adaptée au cas $t \geq 0$, $*_R$ désigne la convolution retardée en temps (retardée voulant dire que $t' \leq t$ dans l'intégrale), et χ_+ est la fonction caractéristique de $\mathbf{R}^+$ en temps. Une formule analogue vaut pour $t \leq 0$.

Les données initiales (u_0, u_1) sont prises dans l'espace $Y^\mu = \dot{H}^\mu \oplus \dot{H}^{\mu-1}$ où $\dot{H}^\mu \equiv \dot{H}_2^\mu$ est l'espace de Sobolev homogène défini (plus généralement pour $1 < r < \infty$) par

$$\dot{H}_r^\mu = \left\{ u : \|u; \dot{H}_r^\mu\| \equiv \|\omega^\mu u\|_r < \infty \right\} \tag{4}$$

et $\|\cdot\|_r$ est la norme dans $L^2 \equiv L^r(\mathbf{R}^n)$. On note $(r, \bar{r})$ les couples d'exposants Hölder conjugués $(1/r + 1/\bar{r} = 1)$ et $r_S = 2 + 4/(n-1)$.
Le résultat de Strichartz [St] prend alors la forme de l'estimation suivante (pour $n \geq 2$)

$$\left\| u; L^{r_S}(\mathbf{R}^{n+1}) \right\| \leq C \left(\|(u_0, u_1); Y^{1/2}\| + \|f; L^{\bar{r}_S}(\mathbf{R}^{n+1})\| \right) \tag{5}$$

et les généralisations ont consisté à remplacer l'espace $L^{r_S}(\mathbf{R}^{n+1})$ par des espaces plus généraux du type $L_t^q(\mathbf{R}, \dot{H}_r^\rho)$ de fonctions L^q du temps à valeurs dans des espaces de Sobolev $\dot{H}_r^\rho$ ou de Besov $\dot{B}_{r,2}^\rho$ de la variable d'espace.

Le sujet a débuté avec l'article de Segal [Se], bientôt suivi par celui de Strichartz déjà cité [St]. Après un article de Marshall [M] sur l'équation de Klein-Gordon, un progrès important a été réalisé par Pecher [P2] qui a vu l'intérêt de découpler les exposants des normes d'espace et de temps, et a obtenu l'essentiel des résultats qu'on verra ci-dessous pour l'équation homogène. Le progrès suivant est venu de l'équation de Schrödinger. La preuve des inégalités combine deux types d'arguments : des estimations (essentiellement de phase stationnaire) disponibles dans [Br][P1] et des arguments abstraits de dualité, utilisés dans [St] dans le contexte de la tranformée de Fourier. Il est apparu sur l'exemple de Schrödinger que ces arguments étaient plus efficaces sous une forme opérationnelle indépendante de la tranformée de Fourier [GV1]. Ce point de vue, exploité partiellement dans [GV1] permet de simplifier les démonstrations de [P2] et donne les inégalités correspondantes pour l'équation de Schrödinger homogène. L'exploitation complète [Y] donne en outre les inégalités généralisées pour l'équation de Schrödinger inhomogène. Avec les résultats de [P2][Y] disponibles, il est très facile d'établir les inégalités généralisées pour l'équation des ondes inhomogène. L' essentiel a été effectué dans [GV2] et appliqué à plusieurs problèmes de diffusion [GV2][GV3] et de Cauchy avec puissance critique [GSV]. Plus récemment, l'ensemble des inégalités a été étendu par l'inclusion de cas limites précédemment non considérés où l'on teste la régularité en temps dans L^2 (en dimension $n \geq 4$) [LS]. Par ailleurs, une partie des inégalités a été étendue à des équations plus générales (équations à coefficients variables et/ou équations sur des variétés) [Be][K1][K2][MSS]. Le but du présent exposé est de donner une présentation synthétique des inégalités contenues dans [GV2][P2][LS]. La démonstration est essentiellement celle de [GV2].

La démonstration des inégalités utilise de façon essentielle des décompositions dyadiques et de ce fait donne naturellement les inégalités en termes d'espaces de Besov homogènes $\dot{B}^\rho_r \equiv \dot{B}^\rho_{r,2}(\mathbf{R}^n)$, dont on rappellera la définition plus loin. Les inclusions

$$\dot{B}^\rho_r \hookrightarrow \dot{H}^\rho_r \quad \text{pour} \quad 2 \leq r < \infty \ , \ \dot{B}^\rho_r \hookleftarrow \dot{H}^\rho_r \quad \text{pour} \quad 1 < r \leq 2 \, , \tag{6}$$

impliquent que les inégalités en termes d'espaces de Besov entraînent les inégalités correspondantes en termes d'espaces de Sobolev. On caractérisera l'exposant r au moyen de la variable $\alpha(r) \equiv 1/2 - 1/r$ et de ses multiples $\beta(r) = \frac{n+1}{2}\alpha(r)$, qui est la perte de dérivées dans l'estimation de base (26) ci-dessous, $\gamma(r) = (n-1)\alpha(r)$ qui est l'exposant de décroissance optimale en temps des normes L^r, et $\delta(r) = n\,\alpha(r)$ qui apparaît naturellement dans l'application des inégalités de Sobolev.

Le résultat est alors le suivant.

Théorème.— *Soit $\rho_1, \rho_2, \mu \in \mathbf{R}$ et $2 \leq q_1, q_2, r_1, r_2 \leq \infty$, satisfaisant les conditions suivantes :*

$$0 \leq 2/q_i \leq \mathrm{Min}(1, \gamma(r_i)) \quad \textit{pour} \quad i = 1,2 \ , \tag{7}$$

$$(2/q_i, \gamma(r_i)) \neq (1,1) \qquad \textit{pour} \quad i = 1,2, \tag{8}$$

$$\rho_1 + \delta(r_1) - 1/q_1 = \mu, \tag{9}$$

$$\rho_1 + \delta(r_1) - 1/q_1 + \rho_2 + \delta(r_2) - 1/q_2 = 1. \tag{10}$$

(1) *Soit* $(u_0, u_1) \in Y^\mu$. *Alors* v *défini par* (2) *satisfait*

$$\|v; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| + \|\partial_t v; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1 - 1}_{r_1})\| \leq C\|(u_0, u_1); Y^\mu\| \tag{11}$$

(2) $K * f$ *(où* $*$ *est la convolution en temps) satisfait*

$$\|K * f; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| \leq C\|f; L^{\bar{q}_2}(\mathbf{R}, \dot{B}^{-\rho_2}_{\bar{r}_2})\| \tag{12}$$

(3) w *défini par* (3) *satisfait*

$$\|w; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| + \|\partial_t w; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1 - 1}_{r_1}) \leq C\|f; L^{\bar{q}_2}(\mathbf{R}, \dot{B}^{-\rho_2}_{\bar{r}_2})\|. \tag{13}$$

Les mêmes estimations valent avec $\dot{B}^\rho_r$ *remplacé partout par* $\dot{H}^\rho_r$ *sous l'hypothèse supplémentaire* $r_i < \infty$ *partout où figure* r_i.

Commentaires.

(1) Pour appliquer le théorème et en particulier la partie (3) au problème (1) dans le cas où f est seulement définie dans un intervalle $I \subset \mathbf{R}$, on peut prolonger f par zéro en dehors de I et restreindre les normes du membre gauche de (13) à l'intervalle I.

(2) L'équation des ondes et les normes choisies sont homogènes. D'autre part, l'opérateur ω^λ ($\lambda \in \mathbf{R}$) est un isomorphisme de $\dot{B}^\rho_r$ sur $\dot{B}^{\rho-\lambda}_r$ pour tout $\rho \in \mathbf{R}$. En conséquence, pour (r_i, q_i) fixés, les paramètres $\rho_1, -\rho_2$ et μ sont déterminés par les conditions d'homogénéité (9)(10) à une translation commune près.

(3) La région permise pour les paramètres (q_i, r_i) a une structure de produit. Chaque facteur est commodément représenté dans le plan $(1/q, 1/r)$ par un trapèze ABCD (pour $n \geq 4$) où $A = (0, 1/2)$, $B = (1/2, (n-3)/2(n-1))$, $C = (1/2, 0)$ et $D = (0, 0)$ correspondent à $(q = \infty, r = 2), (q = 2, \gamma(r) = 1)$, $(q = 2, r = \infty)$ et $(q = r = \infty)$. Pour $n = 3$, le trapèze se réduit au triangle ACD et pour $n = 2$ au triangle AC_2D où $C_2 = (1/4, 0)$ correspond à $(q = 4, r = \infty)$. La frontière est permise à l'exception du point B pour $n \geq 3$. En outre le segment $CD(r = \infty)$ est interdit dans la version Sobolev. Le résultat original de Strichartz $q = r = r_S$ est l'intersection de AB avec la bissectrice $q = r$. Une inégalité du type (12) ou (13) est alors caractérisée par un couple de points P_1P_2 dans la région permise. Voir figures 1 et 2.

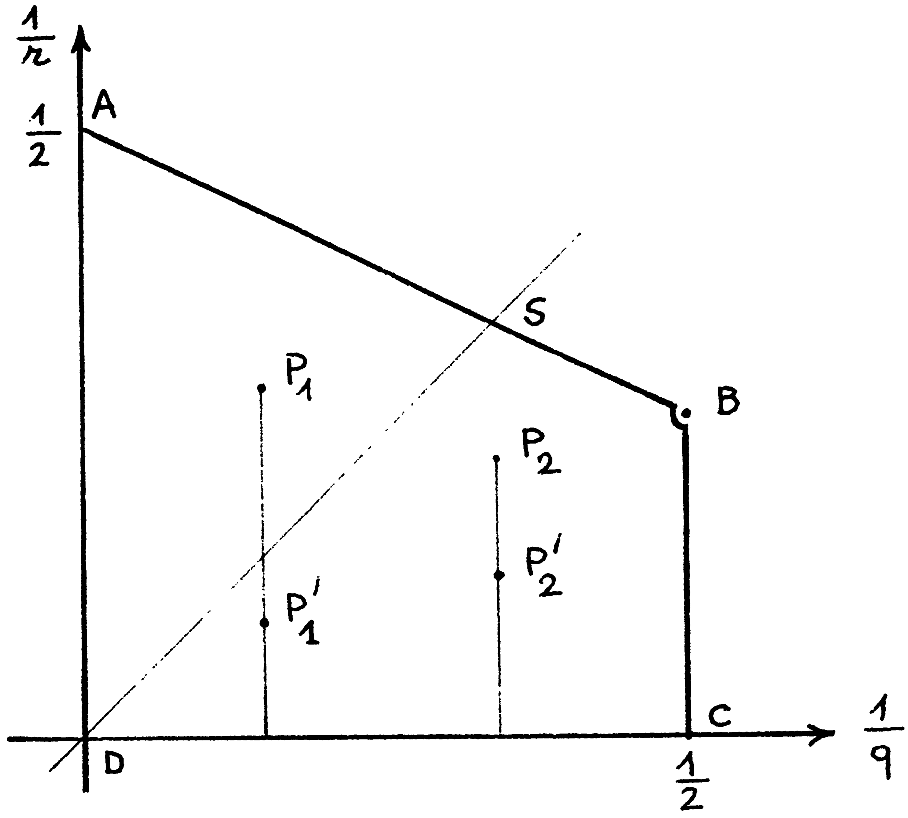

Fig 1 : le cas $n \geqslant 4$

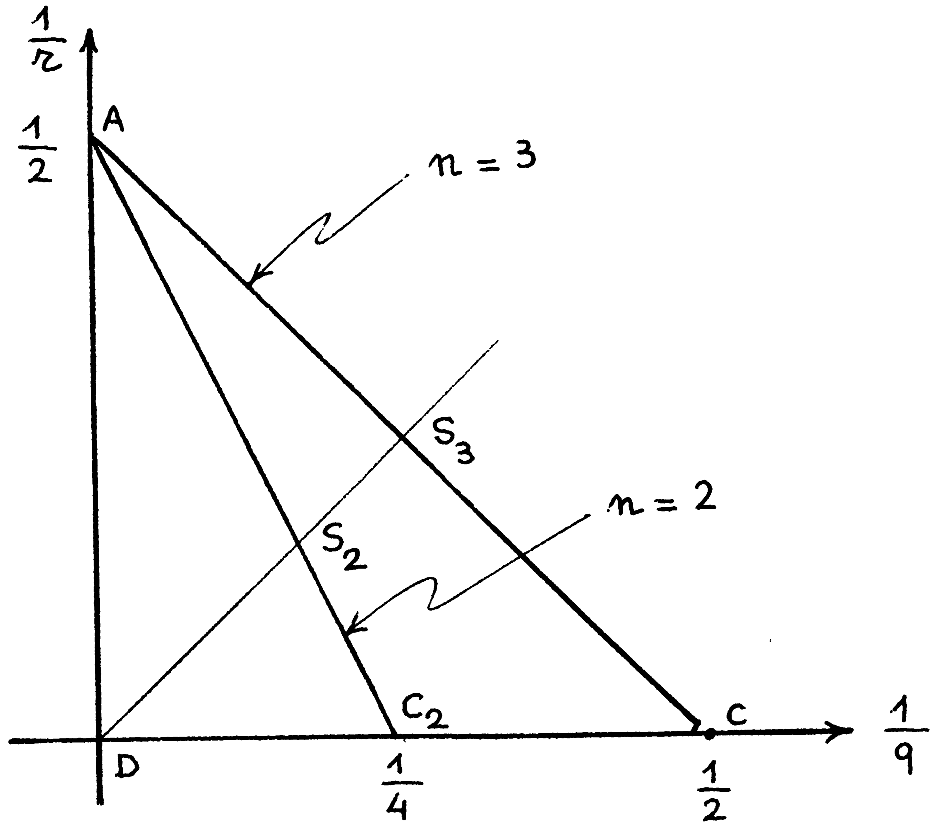

Fig 2 : les cas $n = 3$ et $n = 2$

Preuve du Théorème.

(1) *Réductions préliminaires.*

Toutes les inégalités sont des conséquences d'inégalités analogues satisfaites par U (au lieu de K). De plus, par le commentaire (2), on peut supposer $\mu = 0$, ce qui fixe les ρ_i. Par suite il suffit de démontrer, au lieu de (11)(12)(13), les estimations suivantes :

$$\|U(\cdot)u; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| \leq \|u\|_2, \tag{11'}$$

$$\|U * f; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| \leq C\|f; L^{\bar{q}_2}(\mathbf{R}, \dot{B}^{-\rho_2}_{\bar{r}_2})\|, \tag{12'}$$

$$\|U *_R f; L^{q_1}(\mathbf{R}, \dot{B}^{\rho_1}_{r_1})\| \leq C\|f; L^{\bar{q}_2}(\mathbf{R}, \dot{B}^{-\rho_2}_{\bar{r}_2})\|, \tag{13'}$$

pour (q_i, r_i) satisfaisant (7)(8) et

$$\rho_i + \delta(r_i) - 1/q_i = 0 \qquad (i = 1, 2). \tag{14}$$

(le décalage d'une unité entre (10) et (14) vient du facteur ω^{-1} contenu dans K).

Une deuxième réduction de la preuve résulte des inégalités de Sobolev (qui dans les espaces de Besov sont des conséquences immédiates de l'inégalité de Young) selon lesquelles $\dot{B}^{\rho}_{r} \hookrightarrow \dot{B}^{\rho'}_{r'}$ pour $\rho \geq \rho'$ et $\rho + \delta(r) = \rho' + \delta(r')$. En particulier une inégalité comme (12')(13') pour un couple $(P_1 P_2)$ entraîne l'inégalité correspondante pour tous les couples $(P'_1 P'_2)$ situés "en-dessous", i.e. $q_i = q'_i$ et $r_i \leq r'_i$ pour $i = 1, 2$.

Les ingrédients de la preuve sont les suivants

(a) l'utilisation de décompositions dyadiques, indispensable pour l'équation des ondes.

(b) Une estimation de phase stationnaire, spécifique de l'équation des ondes.

(c) des arguments abstraits de dualité, indépendants de l'équation.

A titre de comparaison, pour l'équation de Schrödinger (a) est inutile, (b) est trivial, et (c) est identique.

On donne d'abord les arguments de dualité. Voir [GV4] pour un exposé didactique plus détaillé.

(2) *Arguments de dualité.*

Le point de départ est le fait que dans un contexte approprié, il est équivalent qu'un opérateur A soit borné, que son adjoint A^* soit borné, ou que le produit A^*A soit borné. Le contexte utile est le suivant. On dispose d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$, d'un espace de Banach X, et d'un sous-espace dense $\mathcal{D}$ de X ($\mathcal{D}$ n'a pas besoin de topologie). On note X^* le dual de X et $\mathcal{D}_a^*$ le dual algébrique de $\mathcal{D}$. Evidemment $X^* \subset \mathcal{D}_a^*$.

Soit $A : \mathcal{D} \to \mathcal{H}$ un opérateur linéaire et $A^* : \mathcal{H} \to \mathcal{D}_a^*$ son adjoint défini par

$$\langle A^* v, f\rangle_{\mathcal{D}} = \langle v, Af\rangle \quad \text{pour tout} \quad f \in \mathcal{D} \quad \text{et tout} \quad v \in \mathcal{H},$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\mathcal{D}}$ est l'appariement entre $\mathcal{D}_a^*$ et $\mathcal{D}$ et $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ est le produit scalaire dans $\mathcal{H}$. Soit $\|\cdot\|$ la norme dans $\mathcal{H}$. Alors

Lemme.— *Les trois conditions suivantes sont équivalentes (pour un $a > 0$)*

(1) $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \|Af\| \leq a\|f; X\|$

(2) $\mathcal{R}(A^*) \subset X^*$ *et* $\forall v \in \mathcal{H}, \quad \|A^* v; X^*\| \leq a\|v\|,$

(3) $\mathcal{R}(A^* A) \subset X^*$ *et* $\forall f \in \mathcal{D}, \quad \|A^* Af; X^*\| \leq a^2\|f\|f; X\|.$

Ce résultat a été utilisé dans [St][Pe 2] en relation avec la transformée de Fourier ; on dispose alors d'une surface Σ lisse de codimension 1 dans $\mathbf{R}^{n+1}$ et on appelle σ la mesure sur Σ induite par la mesure de Lebesgue dans $\mathbf{R}^{n+1}$. On prend $\mathcal{H} = L^2(\Sigma, \sigma)$, $\mathcal{D} = \mathcal{S}(\mathbf{R}^{n+1})$, A est la restriction à Σ de la transformée de Fourier dans $\mathbf{R}^{n+1}$, A^* associe à $v \in \mathcal{H}$ la transformée de Fourier inverse de $v\sigma$ et $A^* A$ est la convolution avec $\mathcal{F}^* \sigma$. Il est cependant plus utile de considérer la situation plus générale où on dispose d'un groupe unitaire à un paramètre $U(\,\cdot\,)$ agissant dans $\mathcal{H}$ et de définir

$$Af = \int dt\, U(-t) f(t) \tag{15}$$

si bien que

$$(A^* u)(t) = U(t) u \tag{16}$$

$$(A^* A f)(t) = \int dt'\, U(t - t') f(t'). \tag{17}$$

Cet exemple fondamental satisfait les conditions du Lemme avec $a = 1$, $X = L^1(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $X^* = L^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, la dualité étant assurée par le produit scalaire dans $L^2(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, et $\mathcal{D}$ n'importe quel sous espace dense de X. Dans les applications, on s'efforce de démontrer, pour cet exemple d'opérateurs et pour d'autres couples (X, X^*), l'une des conditions du lemme, la plus accessible étant en général la condition (3).

Le lemme a un corollaire immédiat, mais très utile car il est à l'origine de la factorisation (7) des conditions sur les paramètres du théorème.

Corollaire.— *Si l'une des (les) conditions du lemme est (sont) satisfaite (s) pour un même triplet $(\mathcal{H}, \mathcal{D}, A)$ ct deux triplets différents (X_i, X_i^*, a_i), $i = 1, 2$, alors $A^* A$ est borné de X_1 dans X_2^* et de X_2 dans X_1^* avec norme majorée par $a_1 a_2$.*

L'utilité de l'exemple (15)(16)(17) apparaît dans la résolution du problème de Cauchy pour une équation du type

$$i\partial_t u = Lu + f \tag{18}$$

avec L autoadjoint dans $\mathcal{H}$ et avec donnée initiale $u(t=0) = u_0 \in \mathcal{H}$.

Avec $U(t) = \exp(-itL)$, on a en effet (pour $t \geq 0$)

$$u(t) = U(t)u_0 - i \int_0^t dt'\, U(t-t')f(t'), \tag{19}$$

$$u = A^* u_0 - i(A^*A)_R(\chi_+ f), \tag{20}$$

où l'indice R note le retardement, i.e. la restriction $t' \leq t$ dans l'intégrale. La relation (20) suggère de se placer dans la situation du lemme, à assurer que $\chi_+ f \in X$ et à chercher des solutions dans X^*. Ce programme requiert, outre les conditions du lemme, des estimations de $(A^*A)_R$. En pratique, on démontre souvent les estimations diagonales de $(A^*A)_R$ de X dans X^* en même temps que la condition (3) du lemme. Cependant, le retardement brise la factorisation de A^*A et interdit donc l'utilisation du corollaire, si bien que dans les hypothèses de ce dernier, les estimations diagonales $X_i \to X_i^*$ pour $(A^*A)_R$ n'entraînent pas en général les estimations non diagonales $X_i \to X_j^*$, $i \neq j$. On montre néanmoins facilement que c'est le cas

- si l'un des deux couples est le couple fondamental ($X_0 = L^1(\mathbf{R}, \mathcal{H})$, $X_0^* = L^\infty(\mathbf{R}, \mathcal{H})$).

- et par interpolation si l'un des deux couples, par exemple (X_1, X_1^*) est un interpolé de l'autre avec (X_0, X_0^*).

On renvoie à [GV5] pour un énoncé plus précis.

On introduit maintenant les décompositions dyadiques indispensables pour la preuve et on rappelle à cette occasion la définition des espaces de Besov.

(3) *Décompositions dyadiques.*

Soit $\widehat{\psi} \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, $0 \leq \widehat{\psi} \leq 1$, $\widehat{\psi}(\xi) = 1$ pour $|\xi| \leq 1$, $\widehat{\psi}(\xi) = 0$ pour $|\xi| \geq 2$. On définit $\widehat{\varphi}_0(\xi) = \widehat{\psi}(\xi) - \widehat{\psi}(2\xi)$ et pour tout $j \in \mathbf{Z}$, $\widehat{\varphi}_j(\xi) = \widehat{\varphi}_0(2^{-j}\xi)$ si bien que

$$\operatorname{Supp} \widehat{\varphi}_j \subset \{\xi : 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}$$

et $\Sigma\, \widehat{\varphi}_j(\xi) = 1$ pour tout $\xi \neq 0$, avec au plus deux termes non nuls dans la somme pour chaque ξ. On pose $\widetilde{\varphi}_j = \varphi_{j-1} + \varphi_j + \varphi_{j+1}$ si bien que $\varphi_j * \widetilde{\varphi}_j = \varphi_j$ pour tout $j \in \mathbf{Z}$.

A tout $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ on associe la suite de fonction $u_j = \varphi_j * u \in \mathcal{C}^\infty$, qu'on considère comme une fonction de deux variables x et j. On teste le comportement en

j dans ℓ^s et le comportement en x dans L^r, après avoir multiplié u_j par un facteur $2^{\rho j}$ qui simule une dérivée d'ordre ρ. On obtient ainsi deux familles d'espaces : les espaces de Besov (homogènes) [T]

$$\dot{B}^{\rho}_{r,s} = \{u : \|u; \dot{B}^{\rho}_{r,s}\| = \|2^{\rho j}\varphi_j * u; \ell^s_j(L^r_x)\| < \infty\} \tag{21}$$

et les espaces de Triebel-Lizorkin (homogènes)

$$\dot{F}^{\rho}_{r,s} = \{u : \|u; \dot{F}^{\rho}_{r,s}\| = \|2^{\rho j}\varphi_j * u; L^r_x(\ell^s_j)\| < \infty\}\,. \tag{22}$$

Il résulte de l'inégalité de Minkowski que

$$\begin{aligned} &\ell^s(L^r) \subset L^r(\ell^s) \Rightarrow \dot{B}^{\rho}_{r,s} \subset \dot{F}^{\rho}_{r,s} \quad \text{pour} \quad r \geq s \\ &\ell^s(L^r) \supset L^r(\ell^s) \Rightarrow \dot{B}^{\rho}_{r,s} \supset \dot{F}^{\rho}_{r,s} \quad \text{pour} \quad r \leq s \end{aligned}\,.$$

Le contact avec les espaces de Sobolev (homogènes) s'effectue par la relation

$$\dot{F}^{\rho}_{r,2} = \dot{H}^{\rho}_{r} \quad \text{pour} \quad 1 < r < \infty$$

qui résulte du théorème de Mikhlin-Hörmander à valeurs dans un Hilbert et constitue le seul résultat "dur" dans tout ce problème. Les inclusions (6) en résultent immédiatement.

Dans le rappel ci-dessus, on a glissé sous le tapis le fait inoffensif et bien compris que les espaces homogènes sont en réalité des espaces de classes de distributions modulo les polynômes ([T] p.237).

On peut maintenant entrer dans le vif du sujet.

(4) *La preuve proprement dite.*

Les étapes sont les suivantes.

• *Estimation de phase stationnaire.* On estime

$$\|U(t)\varphi_0\|_\infty = \operatorname*{Sup}_x \left| \int d\xi \widehat{\varphi}_0(\xi) \exp(it|\xi| + ix\xi) \right|$$

$$\leq \text{Min}\left(\|\widehat{\varphi}_0\|_1\,,\, C|t|^{-(n-1)/2}\right) \leq C\ \text{Min}\left(1, |t|^{-(n-1)/2}\right)\,. \tag{23}$$

C'est une estimation de phase stationnaire standard. On note seulement que la phase est conique, avec un Hessien de rang $(n-1)$ donnant le facteur $|t|^{-(n-1)/2}$. Pour Schrödinger on aurait $|t|^{-n/2}$.

• *Dilatation* $\xi \to 2^{-j}\xi$, $t \to 2^j t$. On déduit de (23)

$$\|U(t)\varphi_j\|_\infty \leq C \text{ Min}\left\{2^{nj},\, 2^{j(n+1)/2}|t|^{-(n-1)/2}\right\} . \qquad (24)$$

• *Estimation de* $U(t)u_j$ *par l'inégalité de Young (triviale)* $L^\infty * L^1 \subset L^\infty$. On obtient

$$\|U(t)\varphi_j * f\|_\infty \leq \|U(t)\varphi_j\|_\infty \, \|\widetilde{\varphi}_j * f\|_1$$

$$\leq C \text{ Min}\left\{2^{nj},\, 2^{j(n+1)/2}|t|^{-(n-1)/2}\right\} \|\widetilde{\varphi}_j * f\|_1 \, . \qquad (25)$$

• *Interpolation avec l'unitarité dans* L^2.

$$\|U(t)\varphi_j * f\|_2 = \|\varphi_j * f\|_2 \leq \|\, \widetilde{\varphi}_j * f\|_2 \, .$$

Par le théorème de Riesz-Thorin, on obtient pour $2 \leq r \leq \infty$

$$\|U(t)\varphi_j * f\|_r \leq C \text{ Min}\left\{2^{2j\delta(r)},\, 2^{2j\beta(r)}|t|^{-\gamma(r)}\right\} \|\widetilde{\varphi}_j * f\|_{\bar{r}} \, . \qquad (26)$$

qui est l'estimation fondamentale.

En multipliant (26) par $2^{-j\beta(r)}$ et en prenant la norme dans ℓ^2_j on obtient l'estimation ponctuelle en temps de [Br][Pe1] :

$$\|U(t)f; \dot{B}_r^{-\beta(r)}\| \leq C|t|^{-\gamma(r)}\|f; \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)}\| \, . \qquad (27)$$

Noter la signification, annoncée plus haut, des exposants β et γ comme perte de dérivées et décroissance en temps.

A partir d'ici, la preuve se branche et on considère séparément le cas général $q > 2$ et le cas limite $q = 2$.

• *Le cas général* $q > 2$ [Pe2][GV2].

Pour $0 \leq 2/q = \gamma(r) < 1$, on déduit de (27) par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev en temps

$$\|U *_{(R)} f; L^q(\mathbf{R}, \dot{B}_r^{-\beta(r)})\| \leq C\|f; L^{\bar{q}}(\mathbf{R}, \dot{B}_{\bar{r}}^{\beta(r)})\| \qquad (28)$$

qui est le cas diagonal ($r_1 = r_2 = r$) limite ($\rho_i = -\beta(r_i)$) de (12')(13'). On en déduit (11') par l'implication (3) $\Rightarrow$ (2) du Lemme, le cas hors diagonal limite de (12') par le Corollaire, et le cas hors diagonal (retardé) limite de (13') par l'interpolation avec le cas $r = 2$ citée plus haut. On en déduit enfin les cas non limites par les inégalités de Sobolev, comme expliqué plus haut.

• *Le cas limite* $q = 2$ (pour $n \geq 4$) [LS].

A j fixé, on déduit de (26) par l'inégalité de Young en temps $L^2 * L^1 \subset L^2$, pour $\gamma(r) > 1$,

$$\begin{aligned} \|U *_{t(R)} (\varphi_j *_x f); L^2(\mathbf{R}, L^r)\| \leq C \|\widetilde{\varphi}_j * f; L^2(\mathbf{R}, L^{\bar{r}})\| \\ \times \| \operatorname{Min}\left(2^{2j\delta(r)}, 2^{2j\beta(r)}|t|^{-\gamma(r)}\right); L^1_t(\mathbf{R}) . \end{aligned} \tag{29}$$

La dernière norme se calcule exactement et vaut

$$2[\gamma(r)/(\gamma(r)-1)]\, 2^{j(2\delta(r)-1)} .$$

Multipliant (29) par $2^{-j(\delta(r)-1/2)}$ et prenant la norme dans ℓ^2_j, on obtient

$$\|U *_{(R)} f; L^2\left(\mathbf{R}, \dot{B}_r^{-(\delta(r)1/2)}\right)\| \leq C\|f; L^2\left(\mathbf{R}, \dot{B}_{\bar{r}}^{\delta(r)-1/2}\right)\| \tag{30}$$

qui est le cas diagonal ($r_1 = r_2 = r$) limite ($q_1 = q_2 = 2$) de (12')(13'). On en déduit comme plus haut (11') pour $q = 2$ par l'implication (3) $\Rightarrow$ (2) du Lemme, et les cas hors diagonaux manquants de (12') par le Corollaire. On en déduit enfin les cas hors hors diagonaux (retardés) manquants de (13') par interpolation avec le cas $r = 2$ et application des inégalités de Sobolev, sauf dans le double cas limite où l'un des deux points P_1, P_2 est sur (AB) et l'autre sur (BC), car le point B nécessaire pour l'interpolation est interdit. Ce double cass limite demande un argument séparé, donné dans [LS] dans un cas particulier de codimension 1, et qui s'étend dans difficulté au cas général (une autre possibilité pourrait être d'obtenir en B une estimation du type L^p faible pouvant servir de base d'interpolation).

Une version (un peu) plus détaillée du contenu du présent exposé paraîtra dans le Journal of Functional Analysis [GV5].

Références.

[Be] M. BEZARD, *Une version générale de l'inégalité de Strichartz*, C.R.A.S. Paris **315** (1992), 1241-1244.

[Br] P. BRENNER, *On $L_p - L_{p'}$ estimates for the wave equation*, Math. Z **145** (1975), 251-254.

[GSV] J. GINIBRE, A. SOFFER and G. VELO, *The global Cauchy problem for the critical nonlinear wave-equation*, J. Funct. Anal. **110** (1992), 96-130.

[GV1] J. GINIBRE and G. VELO, *Scattering theory in the energy space for a class of nonlinear Schrödinger equations*, J. Math. Pures Appl. **64** (1984), 363-401.

[GV2] J. GINIBRE and G. VELO, *Conformal invariance and time decay for nonlinear wave equations, II*, Ann. Inst. Henri Poincaré (Physique Théorique) **47** (1987), 263-276.