Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C. Gérard

Système à N corps dans un champ magnétique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 16, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A16_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SYSTEME A N CORPS DANS UN CHAMP MAGNETIQUE

C. GERARD

Exposé n° XVI

11 Avril 1995

I Introduction

Nous allons décrire dans cet exposé des résultats obtenus en collaboration avec Izabella Łaba sur les sytèmes à N-corps en présence d'un champ magnétique constant en dimension d'espace 3. Un tel système est décrit par le hamiltonien suivant :

$$H_B = \sum_1^N \frac{1}{2mi}(D_i - q_i \mathcal{K} x_i)^2 + \sum_{i<j} \nu_{ij}(x_i - x_j) \tag{1}$$

agissant sur l'espace $L^2(\mathbf{R}^{3N})$. Ici q_i et m_i sont la charge et la masse de la particule i et la matrice $\mathcal{K}$ est égale à :

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de telle sorte que $\mathcal{K}x$ soit le potentiel vecteur du champ magnétique constant $\vec{B} = (0, 0, b)$. Le potentiel v_{ij} représente l'interaction entre les particules i et j.

Le problème auquel nous nous intéressons est celui de la théorie de la diffusion, c'est à dire de la classification des comportements asymptotiques de $e^{-itH_B}u, u \in L^2(\mathbf{R}^{3N})$, pour t tendant vers $\pm\infty$.

II Le pseudomoment

Il est bien connu que les trajectoires d'une particule libre en présence d'un champ magnétique sont très différentes de celles observées sans champ magnétique. Cette différence se reflète aussi dans les propriétés des constantes du mouvement, c'est à dire des observables qui commutent avec H_B.

Soit $H_0 = \frac{1}{2m}(D - \mathcal{K}x)^2$ le hamiltonien d'une particule libre dans le champ magnétique $\vec{B}$. H_0 commute avec le *pseudomoment*

$$K := D + \mathcal{K}x \ ,$$

qui est le générateur infinitésimal des translations magnétiques :

$$e^{i\langle K, x'\rangle}u(x) = e^{\langle \mathcal{K}x, x'\rangle}u(x + x') \ .$$

L'algèbre engendrée par K est très simple mais différente de celle engendrée par le moment D. En effet, on a :

$$[\langle K, x'\rangle, i\langle K, x''\rangle] = -2\langle x', \mathcal{K}x''\rangle \ .$$

Nous allons maintenant généraliser celà au cas du hamiltonien H décrit dans (1). Pour ce faire, il est agréable de se placer dans un cadre un peu plus abstrait, celui des hamiltoniens d'Agmon.

On considère donc un espace euclidien X, muni d'une application linéaire : $A : X \to X'$, antisymétrique :

$$\langle x, Ax' \rangle = -\langle x', Ax \rangle, x, x' \in X \ .$$

De manière équivalente on peut considérer A comme une forme bilinéaire antisymétrique. On pose :

$$H_0 = \frac{1}{2}(D - Ax)^2 \ .$$

On fixe d'autre part la structure des potentiels, c'est à dire une famille finie $\{X_a\}_{a \in A}$ de sous espaces vectoriels de X, fermée pour l'intersection, et contenant X. On munit $\mathcal{A}$ d'une structure de semi treillis en posant : $a \leq b$ si $X_b \subset X_a$. On a donc

$$X_{a \vee b} = X_a \cap X_b \ .$$

On note $X_{a_{\min}}$ le plus petit élément de $\{X_a\}$, égal à X et $X_{a_{\max}}$ le plus grand, égal à $\bigcap_{a \in \mathcal{A}} X_a$.

Enfin on pose :

$$X^a := X_a^{\perp} \ ,$$

et pour chaque $a \in \mathcal{A}, a \neq a_{\max}$ on fixe un potentiel

$$v_a : X^a \to \mathbf{R}$$

telle que $\lim_{|x^a| \to \infty} v_a(x^a) = 0$.

Un hamiltonien d'Agmon magnétique est alors donné par :

$$H := \frac{1}{2}(D - Ax)^2 + \sum_{a \in \mathcal{A}} v_a(x^a) = H_0 + v(x) \ .$$

Cet opérateur représente le hamiltonien complet décrivant N particules en interaction. Pour chaque $a \in \mathcal{A}$, on définit :

$$H_a := \frac{1}{2}(D - Ax)^2 + \sum_{b \leq a} v_b(x^b)$$

$$=: \frac{1}{2}(D - Ax)^2 + V^a(x^a),$$

où

$$V^a(x^a) = \sum_{b \leq a} v_b(x^b) \ ,$$

et

$$I_a(x) = \sum_{b \nleq a} v_b(x^b) = V(x) - V^a(x^a) \ .$$

Remarquons que pour $a = a_{\max}, H_a = H$.

Il reste maintenant à décrire le lien entre la forme bilinéaire A et la structure des plans X_a. On pose $Z = \ker A$ et on suppose que si π_Z est la projection orthogonale sur Z, π_a la projection orthogonale sur X_a on a :

$$[\pi_\alpha, \pi_Z] = 0 \ , a \in \mathcal{A} \ .$$

On pose aussi :

$$Y = Z^\perp \ ,$$

$$Z_a = Z \cap X_a, Y_a = Y \cap X_a, Z^a = Z \cap X^a, Y^a = Y \cap X^a \ .$$

On remarque que $X_\alpha = Z_a \oplus Y_a, X^a = Z^a \oplus Y^a$.

Comme le potentiel V^a ne dépend pas de x_a, l'hamiltonien H_a commute avec le *pseudomoment externe* K_a, défini par :

$$K_a := (D + Ax)_a \ .$$

On a :

$$[\langle x', K_a \rangle, i\langle x'', Ka \rangle] = -2\langle x', Ax'' \rangle, x', x'' \in X_a,$$

ce qui montre que l'algèbre engendrée par K_a est décrite par la restriction de A à $X_a \times X_a$, que l'on note par $A_{a,a}$.

A ce stade, il est peut être utile de décrire ces objets dans le cas de notre problème de départ donné par H_B.

L'espace euclidien X est égal à $\mathbf{R}^{3N}$ muni de la forme quadratique $\sum_1^N 2m_i x_i^2$. La forme bilinéaire A est donnée par :

$$A(x_1, \cdots x_N) = (q_1 \mathcal{K} x_1, \cdots q_N \mathcal{K} x_N) \ .$$

L'ensemble d'indices $\mathcal{A}$ est donné par l'ensemble des partitions de $\{1, \cdots N\}$ avec sa relation d'ordre naturelle.

Pour $a \in \mathcal{A}$, l'espace X_a est défini par :

$$X_a = \{x \in X | x_i = x_j \quad \text{si} \quad (ij) \in a\} \ ,$$

où on écrit $(ij) \in a$ si i et j appartiennent à un même élément de a et

$$X^a = \{x \in X | \sum_{i \in C_j} m_i x_i = 0, \}$$

pour $a = \{C_1, \cdots C_k\}$.

L'espace Z est :

$$Z = \{(x_1, \cdots x_N) | y_i = 0, i = 1, \cdots, N\}$$

et :

$$Y = \{(x_1, \cdots, x_N) | z_i = 0, i = 1, \cdots, N\}$$

où on note $x = (y, z)$.

Soit $a = \{C_1, \cdots, C_k\} \in \mathcal{A}$. On peut identifier de façon naturelle X_a à $\mathbf{R}^{3k}$, en introduisant le centre de masse de chaque amas C_i. Par cette identification la matrice de A_{aa} s'écrit comme :

$$\begin{pmatrix} q_{C_1}\mathcal{K} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_{C_k}\mathcal{K} \end{pmatrix},$$

où :

$$q_{C_i} = \sum_{j \in C_i} q_j \ .$$

On voit donc que les propriétés de K_a dépendent des charges des amas de a.

Dans le cadre général on pose :

$$\begin{aligned} Y_a^n &:= \{x \in Y_a \mid A_{aa} x = 0\} \ , \\ Y_a^c &:= Y_a^{n\perp} \ . \end{aligned}$$

La forme bilinéaire A_{aa} restreinte à Y_a^c est donc non dégénérée.

Si on note K_a^n, K_a^c les projections de K_a sur Y_a^n, Y_a^c on peut donc trouver (voir [GL1]) une application linéaire symplectique χ_a de

$$T^*X = T^*X^a \otimes T^*Z_a \otimes T^*Y_a^n \otimes T^*Y_a^c$$

dans :

$$T^*X^a \otimes T^*Z_a \otimes T^*Y_a^n \otimes T^*\tilde{Y}_a^c \otimes T^*\hat{Y}_a^c$$

qui envoie (x,ξ) sur $(\tilde{x},\tilde{\xi})$ avec :

$$\begin{cases} \widetilde{M}_a^c(\eta_a + (Ax)_a) =: (\tilde{y}_a^{c'}, \tilde{\eta}_a^{c'}), \\ M_a^c(\eta_a + A_a{}^a x^a - A_{a\,a} x_a) =: (\hat{y}_a^{c'}, \hat{\eta}_a^{c'}), \\ \pi_a^n(\eta_a + (Ax)_a) =: \eta_a^{n'}, \\ \pi_a^n(y_a) =: y_a^{n'}\ , \\ z_a =: z'_a\ , \\ \zeta_a =: \zeta'_a \\ \xi^a - A^a{}_a x_a =: \xi^{a'}\ , \\ x^a =: x^{a'}. \end{cases}$$

En quantifiant χ_a par une transformation unitaire U_a de $L^2(X)$ dans $L^2(X^a \otimes Z_a \otimes Y_a^n \otimes \tilde{Y}_a^c \otimes \hat{Y}_a^c)$, on a :

$$\begin{aligned} U_a x^a U_a^* &= x^a, \\ U_a D^a U_a^* &= D^a - A_a^a x_a, \\ U_a K_a U_a^* &= (D_{za}, D_{\tilde{y}_a^c}, \tilde{y}_a^c, D_{y_a^n}) \end{aligned}$$

Si on pose $\tilde{H}_a = U_a H_a U_a^*$, on a :

$$\widetilde{H}_a = \frac{1}{2}D^2_{z_a} + R_a(\tilde{y}_a^c, D_{\tilde{y}_a^c}) + \frac{1}{2}(D_{y_a^n} - 2A_a^a y^a)^2 + \frac{1}{2}(D^a - A^{aa}x^a)^2 + V^a(x^a)\ .$$

On voit que $\tilde{H}_a$ commute avec $D_{y_a^n}, \hat{y}_a^c, D_{\hat{y}_a^c}$, ce qui correspond au fait que H_a commute avec K_a.

III Séparation du centre de masse et états de diffusion

Les transformations unitaires U_a peuvent être utilisées dans différents buts : tout d'abord on peut s'intéresser au problème de la réalisation autoadjointe de H. Une application facile de l'inégalité de Kato fournit le résultat suivant :

Théorème 1.

Supposons que pour tout $a \in A$, v^a soit $-\Delta^a$ borné avec borne relative 0. *Alors H est autoadjoint avec domaine :*

$$D(H) = H_A^2(X) := \{u \in L^2(X) \mid (D - Ax)^2 u \in L^2(X)\}\ .$$

On peut aussi utiliser U_a pour $a = a_{\max}$ pour discuter le problème de la séparation du centre de masse en présence d'un champ magnétique. Rappelons que si $a = a_{\max}$

la matrice de A restreinte à $X_{a_{\max}}$ est égale à $q\mathcal{K}$, où $q = \sum_1^N q_i$ est la charge totale du système. On distingue donc deux cas :

Si $q = 0$, on a $Y^c_{a_{\max}} = \{0\}$ et séparer le mouvement du centre de masse revient à fixer une valeur de $D_{y^n_{a_{\max}}}$ et à considérer le hamiltonien :

$$\widetilde{H}(k^n_{a_{\max}}) := \frac{1}{2}D^2_{za_{\max}} + \frac{1}{2}(k^n_{a_{\max}} - 2A^{a_{\max}}_{a_{\max}}x^{a_{\max}})^2$$

$$+\frac{1}{2}(D^{a_{\max}} - A^{a_{\max}a_{\max}x\,a_{\max}})^2 + V^{a_{\max}}(x^{a_{\max}}).$$

agissant sur :

$$L^2(X^{a_{\max}} \times Z_{a_{\max}}) \ .$$

Si $q \neq 0$, $Y^n_{a\max} = \{0\}$, et séparer le mouvement du centre de masse revient à fixer un vecteur de $L^2(\widehat{Y}^c_{a_{\max}})$ et à considérer

$$\widetilde{H}_{a_{\max}} = \frac{1}{2}D^2_{za_{\max}} + R_{a_{\max}}(\tilde{y}^c_{a_{\max}}), D_{\tilde{y}^c_{a_{\max}}})$$

$$+\frac{1}{2}(D^{a_{\max}} - A^{a_{\max},a_{\max}}x^{a_{\max}})^2 + V^{a_{\max}}(x^{a_{\max}}),$$

agissant sur :

$$L^2(X^{a_{\max}} \times Z_{a_{\max}} \times \tilde{Y}^c_{a_{\max}}) \ .$$

Il n'est pas commode pour la théorie de la diffusion de séparer le mouvement de centre de masse. La raison en est que les différentes transformations U_a sont "incompatibles", au sens qu'il n'y a pas d'identification naturelle entre leurs espaces images.

Il est plus simple de définir directement états liés et états de diffusion. Commençons par le cas neutre où $q = 0$.

Définition 1

Supposons que $q = 0$. On définit l'espace des états liés :

$$\mathcal{H}_{bd} := U^*_{a_{\max}} \int^{\oplus}_{Y^{n'}_{a_{\max}}} \mathcal{H}_{pp}(\widetilde{H}_{a_{\max}}(k^n_{a_{\max}}))dk^n_{a_{\max}},$$

et l'espace des états de diffusion :

$$\mathcal{H}_{scatt} = \mathcal{H}^{\perp}_{bd} = U^*_{a_{\max}} \int^{\oplus}_{Y^{n'}_{a_{\max}}} \mathcal{H}_c(\widetilde{H}_{a_{\max}}(k^n_{a_{\max}}))dk^n_{a_{\max}} \ .$$

Définition 2

Supposons que $q \neq 0$. On définit l'espace des états liés :

$$\mathcal{H}_{bd} := U^*_{a_{\max}}(\mathcal{H}_{pp}(\widetilde{H}_{a_{\max}})),$$

et l'espace des états de diffusion :

$$\mathcal{H}_{scatt} = \mathcal{H}_{bd}^{\perp} := U^*_{a_{\max}}(\mathcal{H}_{c}(\widetilde{H}_{a_{\max}})) \ .$$

On peut donner des propriétés "à la Ruelle" des vecteurs de $\mathcal{H}_{bd}$ (voir [GL1]). Si $q \neq 0$ ces propriétés montrent qu'un état de $\mathcal{H}_{bd}$ décrit un amas borné de particules se déplaçant uniquement dans la direction du champ magnétique. Au contraire si $q = 0$, un état de $\mathcal{H}_{bd}$ décrit encore un amas borné de particules, mais qui peut maintenant se déplacer transversalement au champ magnétique.

IV Etats de diffusion, opérateurs d'onde et vitesse asymptotique

Le but de la théorie du scattering est bien sûr de décrire les évolutions des états de $\mathcal{H}_{scatt}$. Un premier résultat important est l'existence de la vitesse asymptotique dans la direction du champ, qui fournit une première classification de $\mathcal{H}_{scatt}$.

On suppose que les interactions v^a vérifient :

$$(H1) \qquad \begin{array}{l} v^a(x^a) = v^a_s(x^a) + v^a_\ell(x^a), \\ \|(1-\Delta^a)^{-1} v^a_s(x^a) \mathbf{1}_{\{|x^a| \geq R\}}\| \in L^1(dR), \\ \|(1-\Delta^a)^{-1} \nabla v^a_\ell(x^a) \mathbf{1}_{\{|x^a| \geq R\}}\| \in L^1(dR) \ . \end{array}$$

Alors on a le théorème suivant :

Théorème 2.

Pour tout $f \in C_\infty(Z^{a_{\max}})$, la limite forte :

$$(2) \qquad \mathrm{s} - \lim_{t \to +\infty} e^{itH} f(z^{a_{\max}}_{\bar{t}}) e^{-itH}$$

existe. Il existe une famille $\zeta^{a_{\max}+}$ d'opérateurs qui commutent telle que (2) soit égale à $f(\zeta^{a_{\max}+})$.

$\zeta^{a^+_{\max}}$ s'appelle la vitesse asymptotique le long de $Z^{a_{\max}}$.

L'opérateur $\zeta^{a_{\max}+}$ fournit (par sa décomposition spectrale), une première classification des états par leur comportement asymptotique. Dans le cas général cette classification n'est pas assez fine, à cause de l'existence possible d'amas neutres se déplaçant transversalement au champ magnétique.

Nous allons faire les hypothèses suivantes sur les charges $q_1, \cdots, q_N$. Supposons que $q_i \neq 0, i = 0, \cdots, N$, et que :

$$(H2) \qquad \sum_{j \in I} q_j = 0 \Rightarrow I = \{1, \cdots N\} \ .$$

En d'autres termes nous supposons qu'il n'existe pas de sous systèmes neutres de particules.

Alors sous l'hypothèse (H1), on a :

Théorème 3.

$$\mathbf{1}_{\{0\}}(\zeta^{a_{\max}+}) = \mathcal{H}_{bd} \ .$$

Notons que l'inclusion $\supset$ est immédiate. L'inclusion $\subset$ résulte d'une estimation de commutateur positif avec l'opérateur conjugué

$$A = \frac{1}{2}(\langle z^{a_{\max}}, D_{z^{a_{\max}}} \rangle + \langle D_{z^{a_{\max}}}, z^{a_{\max}} \rangle)(cf[GL1]) \ .$$

Il est maintenant assez standard de déduire des théorèmes 2 et 3 un résultat de complétude asymptotique pour des interactions à courte portée, en suivant les arguments de Graf [Gr] et Derezinski [De].

Théorème 4. *Supposons les hypothèses (H1), (H2) avec $v_\ell^a = 0$.*

Soit

$$\pi^a := U_a^* \mathbf{1}^{pp}(\widetilde{H}^a) U_a \ .$$

i) Les opérateurs d'onde :

$$\Omega_a^+ = \mathrm{s}\lim_{t \to +\infty} e^{itH} e^{-itH_a} \pi^a$$

existent et leurs images sont orthogonales.

ii) le système est asymptotiquement complet :

$$\bigoplus_{a \neq a_{\max}} \mathrm{Im}\ \Omega_a^+ = \mathcal{H}_{scatt} \ .$$

V Interactions à longue portée

Le cas des interactions à longue portée (typiquement $|v^a(x^a)| \leq C\langle x^a\rangle^{-\mu}$ pour $0 < \mu \leq 1$) présente une difficulté additionnelle par rapport au cas à courte portée.

L'existence de l'observable $\zeta^{a^+_{\max}}$ et le théorème 3 ne suffisent pas à montrer la complétude asymptotique des opérateurs d'onde (modifiés). On a besoin en plus d'une estimation sur la taille des amas de particules qui peuvent se former.

Cette estimation se sépare naturellement en deux parties : on estime d'abord la taille des amas dans la variable z. Si on suppose dans l'hypothèse (H1) que

$$|\nabla v^a \ell(x^a)| \leq C\langle x^a\rangle^{-1-\mu}\mu > 0 \ ,$$

la taille dans la variable z des amas est $0(t^{-\delta})$ pour tout $\delta > \frac{2}{2+\mu}$, d'après le résultat fondamental de [De]. On peut en effet adapter sans grandes modifications les constructions de [De] dans la variable z, le champ magnétique n'agissant pas dans cette direction.

Par contre il faut des arguments nouveaux pour estimer la taille des amas dans la variable y. En fait il suffit d'estimer la taille totale du système. Pour cela on introduit l'observable suivante :

$$C := \frac{1}{2}(y + A^{-1}D_y) \ ,$$

appelée le *centre d'orbite.* Sa version classique

$$c = \frac{1}{2}(y + A_\eta^{-1}) \ ,$$

est le centre du cercle (dans le plan orthogonal à $\vec{B}$) que décrit une particule libre dans le champ magnétique $\vec{B}$.

L'utilité de C est que

$$C - y = \frac{1}{2}A^{-1}(D_y - A_y) \ , \tag{3}$$

et que $D_y - A_y$ est borné par l'énergie H.

Une borne sur la taille de C fournit donc facilement une borne sur la taille de y.

Plus précisément, on définit pour $F \in C_0^\infty(Y)$:

$$F(C) = (2\pi)^{-d}\int \widehat{F}(\eta)e^{i\langle\eta,C\rangle}d\eta \ ,$$

et une propriété classique de la quantification de Weyl montre que

$$F(C) = F(c)^w(y, D_y) \ .$$

Pour une fonction F bien choisie (sa construction fait intervenir la forme quadratique $q(y, \bar{y}) := \sum_1^N q_i y_i \bar{y}_i$), on montre le résultat suivant.

Proposition 1.

i) la limite forte :

$$s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} F(\frac{C}{t^\alpha}) e^{-itH} =: F(C^+)$$

existe pour tout $\alpha > 1/2$.

ii) $s - \lim_{R \to +\infty} F(\frac{C^+}{R}) = \mathbf{1}$.

La proposition 1 montre que l'évolution d'un état $e^{-itH}u$ est concentrée dans $|C| \leq t^\alpha, \alpha > 1/2$. L'identité (3) permet d'en déduire qu'elle est aussi concentrée dans $|y| \leq t^\alpha, \alpha > 1/2$. La preuve de la complétude asymptotique dans le cas des interactions à longue portée suit alors par des arguments classiques. On introduit les modificateurs de Dollard :

$$S_a(t, \xi_a) = \frac{1}{2} t \xi_a^2 + \int_0^t I_{a,\ell}(0, 0, s\xi_a) ds \ .$$

(On peut en effet remplacer les variables x^a, y_a par 0 à cause des estimations précédentes.)

Théorème 5.

Supposons que les hypothèses (H1), (H2) soient satisfaites et que de plus :

$$|\nabla_x v_\ell^a(x^a)| \leq C \langle x^a \rangle^{-1-\mu}, \mu > \sqrt{3} - 1 \ .$$

Alors les opérateurs d'onde modifiés

$$\Omega_{a,D}^+ = s \lim_{t \to +\infty} e^{itH} e^{-iS_a(t, D_{z_a}) - itH^a} \pi^a$$

existent, et leurs images sont mutuellement orthogonales.

- le système est asymptotiquement complet :

$$\bigoplus_{a \neq a_{\max}} \mathrm{Im}\ \Omega_{a,D}^+ = \mathcal{H}_{scatt}.$$

VI Autres résultats

Il reste de nombreux cas ouverts, en particulier s'il existe des amas neutres. Dans [GL3], nous considérons le cas $N = 3$, en supposant qu'il existe une paire neutre.

On vérifie à l'aide des transformations U_a qu'un amas neutre se déplace avec une énergie cinétique de la forme, $E(D_{y_a^n})$ où $E(k_a^n)$ est une valeur propre d'un hamiltonien $H^a(k_a^n)$. Sous des hypothèses de régularité des fonctions $E(k_a^n)$, nous montrons dans [GL3], la complétude asymptotique pour des interactions à courte portée et pour des interactions "coulombiennes", c'est à dire où

$$v_{ij}(x) = q_i q_j v(x) \ , 1 \leq i < j \leq N \ .$$

Un autre problème ouvert concerne le cas de la dimension 2.

On a vu dans les sections précédentes le rôle joué par la direction du champ magnétique, comme direction "libre" dans la diffusion.

Dans le cas de systèmes à N-corps en dimension 2, cette direction est évidemment absente, ce qui change complètement la nature du problème.

Rappelons qu'en dimension 2, le hamiltonien décrivant N particules en interaction est donné par :

$$H = \sum_{I}^{N} \frac{1}{2m_i}(D_i - q_i \mathcal{K} x_i)^2 + \sum_{i<j} v_{ij}(x_i - x_j), \tag{5}$$

sur $L^2(\mathbf{R}^{2N})$ avec

$$\mathcal{K} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \ .$$

Indiquons simplement un résultat qui se déduit facilement en utilisant les transformations unitaires de la section II et le théorème HVZ.

Théorème 6.

Supposons que le système n'a pas d'amas neutres :

$$\sum_{i \in I} q_i \neq 0 \ , \forall I \subset \{1, \cdots N\} \ .$$

Alors le spectre essentiel de H est un ensemble discret. Par conséquent :

$$\sigma_c(H) = \phi \ .$$

On voit donc que s'il n'existe pas d'amas neutres, il n'existe pas de théorie de la diffusion en dimension 2.

Références :

[De] J. Derezinski : Asymptotic Completeness for N-particle Long-range Quantum Systems, Ann. Math. 138 (1993), 427-476.

[GL1] C. Gérard, I. Laba : Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields Duke Math. J. vol.76 n°2 (1994) p 433-465.

[GL2] C. Gérard, I. Laba : Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields II. Longrange interactions, preprint, Ecole Polytechnique, 1994, to appear in Comm. in P.D.E. 1995.

[Gr] G.M. Graf : Asymptotic completeness for N-body short range quantum systems : A new proof, Comm. in Math. Phys. 132 (1990), 73-101.

[L1] I. Laba : Long-range one particle scattering in a homogeneous magnetic field, Duke Math. J. 70 (1993), 283-303.

[GL3] C. Gérard, I. Laba : Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields III. neutral case. Preprint.

C. Gérard
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau cedex