Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C.-J. Xu

Application équilibre d'un espace homogène dans une variété riemannienne

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. nº 14, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

APPLICATION EQUILIBRE D'UN ESPACE HOMOGENE DANS UNE VARIETE RIEMANNIENNE

C.-J. XU

Exposé n° XIV

16 Mai 1995

Application Equilibre D'un Espace Homogène Dans Une Variété Riemannienne

Chao-Jiang XU

1 Position du problème

Cet exposé est un travail réalisé en collaboration avec Jürgen JOST, pour le détail on renvoie le lecteur à [9].

Soit $X = \{X_1, \cdots, X_m\}$ un système de champs de vecteurs réels C^∞ défini sur $\tilde{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, n \geq 2$. Supposons que $X_1, \cdots, X_m$ satisfont la condition de Hörmander (H):

> *$X_1, \cdots, X_m$ et leurs commutateurs de longueur inférieure à r engendrent l'espace tangent de $\tilde{\Omega}$.*

Comme dans [10], on peut définir sur $\tilde{\Omega}$ une structure homogène associée au système de champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$, c'est-à-dire une distance $\rho(\cdot, \cdot)$ et une famille de boules $B(x, \delta) = \{y \in \tilde{\Omega}; \rho(x, y) < \delta\}$. Pour cette géometrie, l'opérateur de Hörmander $H = \sum_{j=1}^m X_j^* X_j$ va jouer le rôle de Laplacien. On a en effet, $H = -\sum_{i,j=1}^n \partial_{x_i} a^{ij}(x) \partial_{x_j}$, où $(a^{ij}(x))$ est une matrice semi-définie positive. Pour $\varepsilon > 0$, pose $(a_{ij}^\varepsilon(x)) = (a^{ij}(x) + \varepsilon \delta_{ij})^{-1}$; cette matrice peut être considérée comme un tenseur de métrique riemannienne sur $\tilde{\Omega}$. Si $d_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ est la distance géodésique de cette métrique, on a $\rho(\cdot, \cdot) = \lim_{\varepsilon \to 0} d_\varepsilon(\cdot, \cdot)$ (voir [3]). Donc l'espace homogène $(\tilde{\Omega}, \rho)$ est la limite d'une famille de variétés riemanniennes $(\tilde{\Omega}, d_\varepsilon)$.

Soit Y une variété riemannienne complète de dimension $N \geq 2$; bien que ce ne soit pas necessaire, on sipposera ici, pour simplifier que Y peut être recouverte par une seule carte, on notera le tenseur de métrique par $(g_{\alpha\beta}(u))$. Pour $\Omega \subset\subset \tilde{\Omega}$, on considère $u : (\Omega, d_\varepsilon) \to Y$. La densité d'énergie de u est

$$e_\varepsilon(u) = \frac{1}{2} \sum_{ij\alpha\beta} (a^{ij}(x) + \varepsilon \delta_{ij}) g_{\alpha\beta}(u) \partial_{x_i} u^\alpha \partial_{x_j} u^\beta,$$

et l'énergie $E_\varepsilon(u) = \int_\Omega e_\varepsilon(u) dx$. Comme $E_{\varepsilon_1}(u) \leq E_{\varepsilon_2}(u), \forall \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2$, on peut faire tendre ε vers 0 pour de "bonnes" applications u, et définir raisonnablement l'énergie de l'application $u : (\Omega, \rho) \to Y$ par

$$E(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega \sum_{j=1}^m \sum_{\alpha\beta=1}^N g_{\alpha\beta}(u) X_j u^\alpha X_j u^\beta. \tag{1}$$

Une solution du problème variationnel pour la fonctionnelle (1) est appelée application équilibre de l'espace homogène (Ω, ρ) dans la variété riemannienne Y. Le système d'Euler-Lagrange de (1) est un système semilinéaire elliptique dégénéré du second ordre:

$$H u^\alpha + \sum_{j=1}^m \sum_{\beta\gamma=1}^N \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u) X_j u^\beta X_j u^\gamma = 0, \qquad \alpha = 1, \cdots, N. \tag{2}$$

où $\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha(u)$ est le symbole de Christoffel de Y, H l'opérateur de Hörmander.

Nous allons étudier l'existence de solution faible et la C^α régularité des solutions du problème variationnel associé à (1) pour un $\alpha > 0$. La régularité d'ordre supérieur fera l'objet d'un travail ultérieur.

2 Notations et résultats préliminaires

On rappelle ici quelques propriétés de la géometrie associée au système de champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$. La condition de Hörmander implique que, la distance $\rho(\cdot,\cdot)$ définie par le système $X_1, \cdots, X_m$ satisfait les propriétés suivantes:

$$C_1|x-y| \leq \rho(x,y) \leq C_2|x-y|^{1/r}; \tag{3}$$

$$|B(x,2\delta)| \leq C|B(x,\delta)|, \tag{4}$$

pour $|x-y| \ll 1$, et $\delta > 0$ petit. On définit maintenant un espace de Sobolev associé au système de champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$, pour $k \geq 1$,

$$M^k(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega); X^J f \in L^2(\Omega), \forall |J| \leq k\}, \tag{5}$$

où $J = (j_1, \cdots, j_s), 1 \leq j_l \leq m, |J| = s, X^J f = X_{j_1} \cdots X_{j_s} f$. $M^k(\Omega)$ est un espace hilbertien et on note $M_0^k(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $M^k(\Omega)$. On a les inégalités de Poincaré pour le système de champs de vecteurs de Hörmander.

Lemme 1 *Supposons que $\partial\Omega$ est C^∞ et non caractéristique par rapport au système de champs de vecteurs $X_1, \cdots, X_m$, on a les résultats suivants:*

i) Il existe une constante C telle que, pour tout $\varphi \in M_0^1(\Omega)$, on a

$$\|\varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|X\varphi\|_{L^2(\Omega)}, \tag{6}$$

où on a noté $\|X\varphi\|_{L^2(\Omega)} = [\sum_{j=1}^m \|X_j\varphi\|^2_{L^2(\Omega)}]^{1/2}$.

ii) Il existe $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, tels que pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}, 0 < R \leq R_0$, et tout $\varphi \in M_0^1(B(x_0,R))$, on a

$$\|\varphi\|_{L^2(B(x_0,R))} \leq C(R_0)R\|X\varphi\|_{L^2(B(x_0,R))}. \tag{7}$$

iii) Il existe $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, tels que pour tout $x_0 \in \bar{\Omega}, 0 < R \leq R_0$, et tout $u \in M^1(B(x_0,R))$, on a

$$\|u - \bar{u}_R\|_{L^2(B(x_0,R))} \leq C(R_0)R\|Xu\|_{L^2(B(x_0,R))}, \tag{8}$$

où $\bar{u}_R = |B(x_0,R)|^{-1}\int_{B(x_0,R)} u(x)dx = \fint_{B(x_0,R)} u(x)dx$.

i) est une conséquence immédiate du principe du maximum de Bony [1]. ii) est donné par l'inégalité classique de Poincaré, parce que quel que soit $x_0 \in \bar{\Omega}$, il existe au moins un champ de vecteurs qui est non nul en x_0, et par un changement de variable, on peut supposer que ce champ est ∂_{x_j}, ce qui donne immediatement (7). iii) est le Théorème de D. Jerison [6], avec la même démonstration, on obtient aussi l'inégalité suivante:

$$\|u - \tilde{u}_R\|_{L^2(T_R)} \leq C(R_0)R\|Xu\|_{L^2(T_R)}, \tag{9}$$

où $\tilde{u}_R = \fint_{T_R} u(x)dx, T_R = B(x_0,2R)\backslash B(x_0,R)$.

Pour la fonction de Green de l'opérateur de Hörmander sur le domaine Ω, on a les estimations suivantes (voir [10, 12]): pour tout $x, y \in \Omega' \subset\subset \Omega$, il existe $c_1(\Omega'), c_2(\Omega') > 0$ tels que

$$G(x,y) \leq c_1\rho(x,y)^2|B(x,\rho(x,y))|^{-1}; \tag{10}$$

$$G(x,y) \geq c_2 \rho(x,y)^2 |B(x,\rho(x,y))|^{-1}. \tag{11}$$

On peut aussi disposer de fonctions de troncature bien adaptées aux champs de vecteurs et à la distance $\rho(\cdot,\cdot)$ (voir [14]): il existe $R_0 > 0$, tel que pour tout $0 < R \leq R_0$, tout $K \subset \Omega, K_R = \{y \in \tilde{\Omega}, \rho(x,y) < R, x \in K\} \subset \Omega$, il existe alors des fonctions $\varphi_R \in C_0^\infty(K_R), \varphi_R(x) = 1$, si $x \in K$, et $|X^J \varphi_R| \leq C_J R^{-|J|}$. On a aussi, pour $0 < R \leq R_0, \alpha > 0$,

$$\int_{B(x_0,R)} \rho(x_0,y)^\alpha |B(x_0,\rho(x_0,y))|^{-1} dy \leq C R^\alpha. \tag{12}$$

On peut dire que qu'en substituant les champs de vecteurs aux dérivées, la distance $\rho(\cdot,\cdot)$ à la distance euclidienne, les propriétés de l'espace homogène (Ω,ρ) sont analogues à celles d'une variété riemannienne.

3 Existence d'applications équilibre faibles

Comme la variété riemannienne Y est recouverte par une seule carte, on peut identifier l'espace $M^1(\Omega;Y)$ à $M^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$. On suppose que Y satisfait l'hypothèse suivante: Pour $P \in Y$, et tout $M > 0, u \in B_Y(P,M), \xi \in \mathbb{R}^N$, (quand on identifie $M^1(\Omega;Y)$ à $M^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on prend $P = 0$,)

$$\lambda(M)|\xi|^2 \leq g_{\alpha\beta}(u)\xi^\alpha\xi^\beta \leq \Lambda(M)|\xi|^2, \tag{13}$$

$$\{\sum |\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u)\xi^\beta\xi^\gamma|^2\}^{1/2} \leq C_\Gamma(M)|\xi|^2. \tag{14}$$

On note χ un majorant de la courbure sectionnelle de Y. On a alors le résultat suivant.

Théorème 2 *Soient $M' < \pi/(2\sqrt{\chi}), \Phi \in C^1(\bar{\Omega};Y)$, avec $\Phi(\partial\Omega) \subset B_Y(P,M')$. Alors, il existe $u \in M^1 \bigcap L^\infty(\Omega;Y)$ minimisant la fonctionnelle $E(v)$ dans $K \bigcap B_Y(P,M')$, où*

$$K = \{f \in M^1 \bigcap L^\infty(\Omega;Y); f - \Phi \in M^1_0(\Omega;Y)\}. \tag{15}$$

Démonstration: Comme $E(\cdot)$ est une intégrale de Dirichlet positive sur $B_Y(P,M') \bigcap K$, alors $E(\cdot)$ est semi-continue inférieurement. Par définition de la norme dans $M^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, on a pour $u \in K \bigcap B_Y(P,M')$,

$$\|u\|^2_{M^1} \leq |\Omega|(M')^2 + \lambda^{-1}E(u).$$

Donc la suite minimisante de $E(v)$ reste bornée dans $M^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$. Il existe alors une sous-suite qui converge faiblement vers un élément $u \in B_Y(P,M') \bigcap K$. La semi-continuité de $E(\cdot)$ entraîne que u minimise $E(\cdot)$ dans $B_Y(P,M') \bigcap K$.

Lemme 3 *Supposons que $\Phi(\partial\Omega) \subset B_Y(P,M)$ pour un $M < M'$, alors la solution faible du théorème 2 vérifié $u(\bar{\Omega}) \subset B_Y(P,M)$, et satisfait,*

$$\int_\Omega \sum X_j u^\alpha X_j \psi^\alpha + \int_\Omega \sum \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(u) X_j u^\beta X_j u^\gamma \psi^\alpha = 0, \tag{16}$$

pour tout $\psi \in M^1_0 \bigcap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$

Démonstration: Soit $\eta \in C_0^\infty(\Omega;\mathbb{R}), \eta \geq 0$. Pour $\varepsilon > 0$ suffisament petit, on a $|u - \varepsilon\eta u| = |1-\varepsilon\eta||u| \leq M'$, donc $u - \varepsilon\eta u \in K \bigcap B_Y(P, M')$ peut être consideré comme une variation de u dans $K \bigcap B_Y(P, M')$. Des calculs standard montrent qu'on a

$$\int_\Omega g_{\alpha\beta}(u)\left[X_j u^\alpha X_j(\eta u^\beta) + \Gamma^\alpha_{\delta\gamma}(u) X_j u^\beta X_j u^\delta(\eta u^\gamma)\right] \leq 0. \tag{17}$$

En utilisant Lemme de Gauss, $g_{\alpha\beta}(u)u^\beta = u^\alpha$, et la propriété des symboles de Christoffel de Y, (17) entraîne:

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^m X_j|u|^2 X_j\eta dx \leq 0, \tag{18}$$

c'est-à-dire que $|u|^2 \in M^1 \bigcap L^\infty(\Omega)$ est une sous-solution de l'équation $Hv = 0$ sur Ω. Le principe du maximum donne (voir [2]),

$$\sup_\Omega |u|^2 \leq \sup_{\partial\Omega} |u|^2 = \sup_{\partial\Omega} |\Phi|^2 \leq M^2.$$

On a donc démontré $u(\bar\Omega) \subset B_Y(P, M)$. Maintenant, pour tout $\psi \in M_0^1 \bigcap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$, et $\varepsilon > 0$ suffisament petit, $u \pm \varepsilon\psi \in B_Y(P, M')$ peut être consideré comme variation de u, des calculs comme ceux de (17) donnera (16). Ce qui termine la démonstration du lemme.

4 Régularité des solutions faibles

Nous démontrons maintenant la régularité de solutions faibles. On va utiliser la fonction de Green modifiée, pour $y \in \Omega, \sigma > 0$ suffisament petit, on pose

$$G_y^\sigma(x) = \fint_{B(y,\sigma)} G(x,z)dz, \tag{19}$$

où $G(x,z)$ est la fonction de Green de l'opérateur H sur Ω (voir [1, 2]). Alors $G_y^\sigma \in M_0^1 \bigcap L^\infty(\Omega), \lim_{\sigma\to 0} G_y^\sigma(x) = G(x,y)$, et pour $\zeta \in M_0^1 \bigcap L^\infty(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega \sum_{j=1}^m X_j G_y^\sigma(x) X_j\zeta(x)dx = \fint_{B(y,\sigma)} \zeta(x)dx. \tag{20}$$

Si $\tilde G$ est la fonction de Green de H sur $\tilde\Omega \supset\supset \Omega$, on a, en utilisant le principe du maximum, que $G_y^\sigma \leq \tilde G_y^\sigma$ sur Ω. Il s'ensuit une estimation pour $G(x,y)$ du type de (10) sur $\bar\Omega$.

Pour une sur-solution non négative de l'équation $Hv = 0$ sur $B(x_0, 2R)$, on a aussi l'inégalité de Harnack suivante:

$$\fint_{B(x_0,2R)} v(x)dx \leq C \inf_{B(x_0,R)} v, \tag{21}$$

où la constante C ne dépend pas de R (voir [13]). En utilisant les estimations (10), (11) et (12), pour $w \in M_0^1(B(x_0, 2R))$ solution de l'équation $Hw = R^{-2}$ sur $B(x_0, 2R)$, on a alors

$$0 < a_1 \leq \min_{B(x_0,R)} w \leq \max_{B(x_0,2R)} w \leq a_2, \tag{22}$$

où a_1, a_2 ne dépendent pas de R.

Pour simplifier les notations, on suppose de plus que le symbole de Christoffel de Y satisfait l'hypothèse suivante:

$$2C_\Gamma(M)M < 1. \tag{23}$$

Lemme 4 *Soient $u \in M^1 \bigcap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ une solution faible de (16). $B(x_0, 2R) \subset \Omega$, supposons qu'on a (23), il existe alors une constante C qui ne dépend pas de R, telle que*

$$R^2 \fint_{B(x_0,R)} |Xu|^2 dx \leq C. \tag{24}$$

De plus, quels que soient $\varepsilon > 0, R_1 > 0$, il existe $0 < R_2 \leq R_1$, tel que

$$R_2^2 \fint_{B(x_0,R_2)} |Xu|^2 dx \leq \varepsilon. \tag{25}$$

Donc $u \in C^0(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Démonstration: Le point essentiel est de bien choisir la fonction-test dans (16). On prend $\zeta \in C_0^\infty(B(x_0, 2R)), \zeta \geq 0$, alors $\eta = \zeta u \in M_0^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$ peut être choisie comme fonction-test dans (16). En utilisant (14) et (23), on a

$$(1 - C_\Gamma(M)M) \int_{B_{2R}} \zeta |Xu|^2 dx \leq -\frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j |u|^2 X_j \zeta dx. \tag{26}$$

Posons $M(t) = \sup_{B_t(x_0)} |u|$, et $z(x) = M^2(2R) - |u(x)|^2$, alors z est une sur-solution non négative de l'équation $Hv = 0$ sur $B(x_0, 2R)$, (21) entraîne

$$\fint_{B_{2R}} z(x) dx \leq C \inf_{B_R} z. \tag{27}$$

Maintenant, pour $w \in M_0^1(B(x_0, 2R))$, solution de $Hw = R^{-2}$ sur $B(x_0, 2R)$, on a $\varphi = wz \in M_0^1(B(x_0, 2R))$, donc

$$\begin{aligned} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w X_j \varphi dx &= R^{-2} \int_{B_{2R}} wz dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w^2 X_j z dx + \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m |X_j w|^2 z dx. \end{aligned}$$

Utilisons (22), on obtient alors

$$\frac{1}{2} \int_{B_{2R}} \sum_{j=1}^m X_j w^2 X_j z dx \leq \frac{a_2}{R^2} \int_{B_{2R}} z dx.$$

Choisissons $\zeta = w^2$ dans (26), les inégalités (22) et (27) donnent

$$R^2 \fint_{B_R} |Xu|^2 dx \leq C[M^2(2R) - M^2(R)]. \tag{28}$$

Comme $0 \leq M^2(2R) \leq \sup_\Omega |u|^2 \leq M^2$, on a donc démontré (24). Pour (25), on remarque que

$$\sum_{k=0}^\infty [M^2(2^{1-k}R) - M^2(2^{-k}R)] \leq M^2(2R) \leq M^2.$$

Donc quel que soit $\varepsilon > 0, R_1$, il existe k_0 tel que $[M^2(2^{1-k_0}R_1) - M^2(2^{-k_0}R_1)] \leq \varepsilon$. On obtient (25) pour $R_2 = 2^{-k_0} R_1$.

Théorème 5 *Soit* $u \in M^1 \bigcap L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^N)$ *une solution faible de (16). Sous les hypothèses du théorème 2 et (23), on suppose de plus qu'il existe* $R_0 > 0, C(R_0) > 0$, *tels que pour tout* $x_0 \in \partial\Omega, 0 < R \leq R_0$, *on ait:*

$$|\Omega \bigcap B(x_0, R)| \geq C|B(x_0, R)|.$$

Alors pour un $\nu > 0$, *l'on a queu* $\in C^\nu(\bar{\Omega})$.

Démonstration: Pour $x_0 \in \Omega, R_0 > 0, B(x_0, 2R_0) \subset \Omega, 0 < R \leq R_0$, on note $T_R = B(x_0, 2R) \backslash B(x_0, R), \zeta \in C_0^\infty(B(x_0, 2R)), \zeta(x) = 1$ sur $B(x_0, R), |X\zeta| \leq CR^{-1}$. Posons $v_R(x) = u(x) - \tilde{u}_R$, en choisissant $\eta = v_R G_y^\sigma \zeta^2$ comme fonction-test dans (16), et en faisant tendre σ vers 0, (14), (23) et (20), entraîne pour tout $y \in B(x_0, R/2)$,

$$\begin{aligned} |u(y) - \tilde{u}_R| \quad &+ \quad c_1 \int_{B(x_0,2R)} |Xu|^2 G(x, y) \zeta^2(x) dx \\ &\leq \quad CR^2 |B(x_0, R)|^{-1} \int_{T_R} |Xu|^2 dx. \end{aligned} \tag{29}$$

En utilisant (11) et (29), on a

$$\int_{B(x_0,R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq C_0 \int_{T_R} |Xu|^2 G(x_0, x) dx,$$

ce qui donne

$$\int_{B(x_0,R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq \frac{C_0}{1 + C_0} \int_{B(x_0,2R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx.$$

On a donc pour $\mu = \log_2[\frac{1+C_0}{C_0}] > 0, 0 < \delta < R \leq R_0$,

$$\int_{B(x_0,\delta)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx \leq (\delta/R)^\mu \int_{B(x_0,2R)} |Xu|^2 G(x_0, x) dx.$$

Donc (11), (24) et (29) entraînent

$$\sup_{B(x_0,\delta/2)} |u(x) - u(y)| \leq C\delta^{\mu/2}.$$

On a donc démontré que $u \in C^\nu(B(x_0, R_0/2)$ pour $\nu = \mu/(2r)$.

La régularité jusqu'au bord peut être obtenir de même manière.

Remerciement: Une partie de ce travail a été réalisé à l'IRMAR de l'Université de Rennes 1. L'auteur tient à remercier le Professeur N. Lerner de l'y avoir invité. Ce travail est partiellement financé par la NSF de Chine

References

[1] Bony J. M., Principe du maximum, inégalité de Harnack et unicité du problème de Cauchy pour les opérateurs elliptiques dégénérés , *Ann. Inst. Fourier* 19 (1969), 227–304.

[2] Cancelier C. E., Xu C. J., Fonctions de Green pour des opérateurs elliptiques dégénérés à coefficients non réguliers, Preprint.

[3] Fefferman C., and Phong D. H., Subelliptic eigenvalue problems, *Proceedings of the Conference on Harmonic Analysis, in honor of A. Zygmund. Wadsworth Math. Series*, 1981, 590–606.

[4] Giaquinta M., Giusti E., Nonlinear ellipuic systems with quadratic growth, *Manuscripta Math.* 24 (1978) 323–349

[5] Hildebrandt S., Kaul H., Widman K., An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Acta Math.* 138 (1977), 1–16.

[6] Jerison D., The Poincaré inequality for vector fields satisfying Hörmander's condition. *Duke Math. J.* 53 (1986) 503–523.

[7] Jerison D., Sánchez-Calle A., Subelliptic second order differential operetors, *Lecture Notes in Math.* V. 1277, PP46–77.

[8] Jost J., Equilibrium maps between metric spaces, Preprint.

[9] Jost. J., Xu C. J., subelliptic harmonic maps, Preprint.

[10] Nagel A., Stein E. M., and Wainger S., Balls and metrics defined by vector fields I. basic properties, *Acta Math.,* 155 (1985), 103–147.

[11] Rothschild L., Stein E-M., Hypoelliptic operators and nilpotent Lie Groups, *Acta Math.* 137 (1977), 247-320.

[12] Sánchez-Calle A., Fundamental solutions and geometry of the sum of squares of vector fields, *Invent. Math.,* 78 (1984), 143–160.

[13] Xu C. J., Subelliptic variational problems, *Bull. Soc. Math. France*, 118 (1990), 147-169.

[14] Xu C. J., Regularity for quasilinear second order subelliptic equations, *Comm. Pure Appl. Math.,* (1992), 77–96.

Chao-Jiang XU
Institut de Mathématiques
Université de Wuhan
430072, Wuhan, R. P. Chine