G. Bourdaud

Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n^o 4, p. 1-4

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A4_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE CALCUL FONCTIONNEL DANS LES ESPACES DE SOBOLEV

G. BOURDAUD

Exposé n°IV

18 Décembre 1990

0. Introduction

Nous allons caractériser, de façon fort simple, les fonctions d'une variable réelle qui opèrent, par composition à gauche, sur l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$, pour chaque entier $m \geq 0$ et tout $p \in [1, +\infty]$.

Cette caractérisation était connue pour le seul cas $m = 1$ (en évitant la valeur critique $p = n \geq 2$) [MM].

On connaissait par ailleurs des classes de fonctions "raisonnables" opérant sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$ pour $m \geq \sup(n/p, 2)$ ([A], [P]), ainsi que sur $W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$ ([D], [B1]).

Enfin, Dahlberg avait noté que les seules fonctions régulières opérant sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$, pour $1 + 1/p < m < n/p$, sont les fonctions linéaires $t \mapsto ct$.

Quand l'exposant m est remplacé par un réel positif non entier $s > 0$, le calcul fonctionnel reste encore mystérieux. Seul le cas $0 < s < 1$ a fait l'objet d'une description complète.

Après avoir étendu au cas fractionnaire le résultat de Dahlberg, on pouvait se demander si le calcul fonctionnel est trivial pour $1 \leq s < \inf(1 + 1/p, n/p)$. En montrant récemment que $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ est un treillis pour $0 < s < 1 + \frac{1}{p}$ - quelle que soit la valeur de n - Y. Meyer et l'auteur ont établi qu'il n'en est rien.

Avant d'entrer dans les détails, rappelons que, à l'exception du cas $p = +\infty$, les espaces $W^{m,p}$ ne contiennent pas de constante autre que 0 ; la condition $F(0) = 0$ sera dès lors toujours nécessaire pour que la fonction F y opère ; elle est sous-entendue dans tout l'exposé.

Les résultats sans référence précisée sont dus à l'auteur.

1. Le cas des exposants entiers

1.1. $m = 0$.

Pour $p < +\infty$, la condition $|F(t)| \leq C|t|$ est suffisante (évident !) et nécessaire (folklorique ?) pour que F opère sur L^p.

La condition $F \in L^\infty_{\text{loc}}$ est clairement nécessaire et suffisante pour que F opère sur L^∞.

1.2. $m = 1$.

Pour $1 < \frac{n}{p}$, ainsi que pour $n = p > 1$, la condition $F' \in L^\infty$ est suffisante [S] et nécessaire ([MM], [B2]) pour que F opère sur $W^{1,p}(\mathbf{R}^n)$. Pour $1 > \frac{n}{p}$, ainsi que pour $n = p = 1$, la condition $F' \in L^\infty_{\text{loc}}$ est nécessaire et suffisante [MM]. Ces résultats s'étendent à l'espace de Hardy-Sobolev $F_1^{1,2}(\mathbf{R}^n)$ [J].

1.3. $m = 2, p = 1$.

Pour $n > 2$, la condition $F'' \in L^1$ est suffisante et nécessaire pour que F opère sur $W^{2,1}(\mathbf{R}^n)$. Pour $n \leq 2$, la condition $F'' \in L^1_{\text{loc}}$ est nécessaire et suffisante.

1.4. $m = 2, 1 < p < n/2$.

La condition

$$F' \in L^\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t^{p-1} \int_t^{2t} |F''(s)|^p ds < +\infty$$

est nécessaire et suffisante pour que F opère sur le cône positif $(W^{2,p})^+$ ([MA], [B2]).

1.5. $m = n/p \geq 2, 1 < p$.

Pour que F opère sur $W^{m,n/m}(\mathbf{R}^n)$ (où $n > m \geq 2$), il faut et il suffit que $F' \in L^\infty$ et que $F^{(m)}$ appartienne à L^p localement-uniformément (autrement dit, il existe $C > 0$ tel qu'on ait

$$\int_I |F^{(m)}(t)|^p dt < +\infty$$

pour tout intervalle I de longueur 1).

1.6. $m > n/p$ (ou $m = n$ et $p = 1$).

La condition $F^{(m)} \in L^p_{\text{loc}}$ est alors nécessaire et suffisante pour que F opère sur $W^{m,p}(\mathbf{R}^n)$.

1.7. $1 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est trivial : seules les fonctions $t \mapsto Ct$ opèrent ([D], [B2]).

1.8. Pour $2 + \frac{1}{p} < m < \frac{n}{p}$, le calcul fonctionnel est trivial sur le cône $(W^{m,p})^+$ [D].

1.9. Question

Le calcul fonctionnel est-il trivial sur $(W^{3,1}(\mathbf{R}^n))^+$, pour $n \geq 4$?

2. Le cas des exposants "fractionnaires".

Les espaces étudiés sont ceux de Besov $B_p^{s,q}(p, q \in [1, +\infty])$ et de Triebel-Lizorkin $F_p^{s,q}(p \in [1, +\infty[, q \in [1, +\infty])$. Le lecteur trouvera dans le livre de Triebel les définitions précises. Rappelons que $B_2^{s,2}$ est l'espace de Sobolev usuel H^s et que $F_p^{s,2}$ est l'espace des "potentiels de Bessel" $(I - \Delta)^{-s/2} L^p$.

2.1. $0 < s < 1$.

Si $s \leq n/p$ (ou $s = n/p$, avec $q > 1$ dans le cas Besov), la condition $F' \in L^\infty$ est nécessaire et suffisante pour F opère sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ ou $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$. Si $s > n/p$ (ou $s = n/p$ et $q = 1$ dans le cas Besov), la condition $F' \in L^\infty_{\text{loc}}$ est nécessaire et suffisante pour que F opère.

Ces résultats sont dus à Igari ($n = 1, p = 2, s \neq 1/2$) et à Bourdaud-Kateb (autres cas).

2.2. $1 \leq s < 1 + 1/p$.

M.E.D. Kateb, Y. Meyer et l'auteur ont prouvé que toute fonction dont la dérivée est à variation bornée opère sur $B_p^{s,q}$ et sur $F_p^{s,2}$.

On en déduit que, **dans le cas** $p > 1$, la condition

$$F' \in L^\infty \quad \text{et} \quad \sup_{t>0} t^{p-1} \int_{|s| \geq t} |F''(s)|^p ds < +\infty$$

suffit pour que F opère sur $B_p^{s,q}$.

2.3. $1 \leq s < 2$.

La condition $F'' \in L^1$ est suffisante - mais non nécessaire - pour que F opère sur $B_1^{s,q}$. La condition 1.4 suffit pour que F opère sur $(B_p^{s,q})^+$, pour $p > 1$ [BM].

2.4. $1 + 1/p < s < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est alors trivial ([B1] pour les espaces de Besov, [R] pour ceux de Triebel).

2.5. $2 + \frac{1}{p} < s < \frac{n}{p}$.

Le calcul fonctionnel est trivial sur les cônes $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ et $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$.

2.6. $s \geq n/p$.

Pour que F opère sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$, il suffit que F possède des dérivées bornées ou localement bornées - suivant que $s = \frac{n}{p}$ ou $s > \frac{n}{p}$ - jusqu'à l'ordre N, où $N - 1 \leq s < N$ [P]. Le même résultat est sans doute vrai pour les $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$, mais la seule preuve connue se fait par paralinéarisation ([ME], [R]), ce qui oblige à remplacer N par $N + 1$.

2.7. Questions

Le calcul fonctionnel est-il trivial sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ et sur $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)$ pour $s = 1 + \frac{1}{p}$ et $p < n - 1$? sur $B_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ et sur $F_p^{s,q}(\mathbf{R}^n)^+$ pour $2 \leq s \leq 2 + \frac{1}{p}$ et $s < \frac{n}{p}$?

BIBLIOGRAPHIE

[A] D.R. Adams, On the existence of capacitary strong type estimates in $\mathbf{R}^n$. Arkiv för Mat. 14, 1 (1976), 125-140.

[B1] G. Bourdaud, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Sém. Anal. Harm., Orsay (1980-81), 6-17.

[B2] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans les espaces de Sobolev. Invent. Math. (à paraître) (version abrégée au Sém. Anal. Harm. Orsay, 1989-90).

[B3] G. Bourdaud, Le calcul fonctionnel dans l'espace de Besov critique (en préparation).

[BK1] G. Bourdaud et D. Kateb, Fonctions qui opèrent sur certains espaces de Besov. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 40,1 (1990) 153-162.

[BK2] G. Bourdaud et D. Kateb, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Besov. Proc. Amer. Math. Soc. (à paraître).

[BK3] G. Bourdaud et M.E.D. Kateb, Calcul fonctionnel dans l'espace de Sobolev fractionnaire (en préparation).

[BM] G. Bourdaud et Y. Meyer, Fonctions qui opèrent sur les espaces de Sobolev. Journal Funct. Anal. (à paraître).

[D] B.E.J. Dahlberg, A note on Sobolev spaces. Proc. Symp. Pure Math. 35,1 (1979), 183-185.

[I] S. Igari, Sur les fonctions qui opèrent sur l'espace $\widehat{A}^2$. Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 15,2 (1965), 525-536.

[J] S. Janson, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations (El Escorial, 1987), 193-201, Lecture Notes in Math. 1384, Springer (1989).

[MA] V. Maz'ya, Sobolev Spaces Springer (1985).

[ME] Y. Meyer, Régularité des solutions des E.D.P. non linéaires, d'après J.M. Bony. Sém. Bourbaki, 560 (1979-80).

[MM] M. Marcus et V.J. Mizel, Complete characterization of functions which act, via superposition, on Sobolev Spaces. Trans. A.M.S. 251 (1979), 187-218.

[P] J. Peetre, Interpolation of Lipschitz operators and metric spaces. Mathematica (Cluj) 12 (35),2 (1970), 325-334.

[R] T. Runst, Mapping properties of non-linear operators in spaces of Triebel-Lizorkin and Besov type. Analysis Mathematica 12 (1986), 313-346.

[S] G. Stampacchia, Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Univ. Montréal Press., Québec (1966).

[T] H. Triebel, Theory of Functions Spaces, Birkhauser (1983).

Université Paris VII
CNRS U.A. 212
Tour 45-55, 5ème étage
2, place Jussieu
75251 Paris cedex 05