

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. FLECKINGER

Comportement asymptotique des valeurs propres du laplacien sur un ouvert à bord fractal

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 18,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989___A19_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1988-1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE DES VALEURS PROPRES DU LAPLACIEN SUR UN OUVERT A BORD FRACTAL

J. FLECKINGER

Résumé

On obtient ici le comportement asymptotique (quand λ tend vers $+\infty$) du nombre de valeurs propres inférieures à λ du problème de Dirichlet pour le Laplacien sur un ouvert à bord fractal. On montre que le deuxième terme a une croissance de l'ordre de $\lambda^{\delta/2}$ où δ est la dimension de Minkowski du bord.

I Introduction

Le son émis par un tambour dépend de son volume. Cette conjecture des physiciens a été démontrée en 1911 par H. Weyl [25]. Plus précisément, si Ω est un ouvert borné de \mathbf{R}^n , de bord $\partial\Omega$ suffisamment régulier, le problème aux valeurs propres :

$$(P) \quad \begin{cases} \text{déterminer } u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \text{ et } \lambda \in \mathbf{C} \text{ vérifiant} \\ -\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

possède une infinité dénombrable de valeurs propres réelles positives tendant vers $+\infty$:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots ;$$

asymptotiquement on a l'équivalence :

$$(1) \quad \lambda_j \sim (2\pi)^2 (B_n |\Omega|_n)^{-\frac{2}{n}} j^{2/n}, \quad j \rightarrow +\infty$$

où $|\cdot|_n$ désigne la mesure n -dimensionnelle de Lebesgue et B_n celle de la boule unité dans \mathbf{R}^n .

C'est souvent en introduisant la "fonction de comptage"

$$N(\lambda, \Omega) := \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 = \#\{\lambda_j \leq \lambda\}$$

(nombre de valeurs propres inférieures à λ de (P)) que l'on exprime (1) ; on a alors la "formule de Weyl"

$$(2) \quad N(\lambda, \Omega) \sim \varphi(\lambda, \Omega) \quad \lambda \rightarrow +\infty$$

avec

$$(2') \quad \varphi(\lambda, \Omega) := (2\pi)^{-n} B_n |\Omega|_n \lambda^{n/2}.$$

Dans la suite on étudie l'influence de l'irrégularité du bord $\partial\Omega$ sur le comportement asymptotique de la fonction comptage.

Pour cela on considère, pour $i = 0$ et 1 , les problèmes :

$$(P_i) \quad \begin{cases} \text{déterminer } \lambda \in \mathbf{C} \text{ et } u \in V_i(\Omega) \text{ vérifiant (au sens faible)} \\ -\Delta u = \lambda u \text{ dans } \Omega, \end{cases}$$

avec, pour $i = 1$, $V_1(\Omega) := H^1(\Omega)$, l'espace de Sobolev usuel d'ordre 1 ; pour $i = 0$, $V_0(\Omega) := H_0^1(\Omega)$ est le complété de $\mathcal{D}(\Omega)$ pour la norme de $H^1(\Omega)$. L'indice i précise donc les conditions limites (homogènes) ($i = 0$ pour les problèmes de Dirichlet ; $i = 1$ pour ceux de Neumann).

Aux problèmes (P_i) , on associe les "fonctions de comptage" $N_i(\lambda, \Omega)$, nombre de valeurs propres inférieures à λ des problèmes (P_i) .

Pour $i = 0$ et Ω borné, la formule de Weyl (2) est toujours valable [19,20].

Pour $i = 1$, par contre, le bord ne doit pas être "trop long" pour que la formule (2) reste valable [8,10,18,19,20].

Plus précisément, la distance dans Ω doit être équivalente à la distance euclidienne usuelle ; on a en particulier le contre exemple suivant :

Soit une suite d'intervalles ouverts disjoints $(I_j)_{j \in \mathbb{N}}$, $I_j \subset]0,1[$; pour $0 < \beta < 1$, désignons par Ω_β l'ouvert de \mathbf{R}^2 :

$$\Omega_\beta := \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 / x \in]0,1[; 0 < y < 1 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-\beta} \mathbf{1}_{I_\beta}(x)\}$$

$(\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$ et 0 si non) ; on a alors :

$$N_1(\lambda, \Omega_\beta) \approx \lambda^{1/2\beta}, \lambda \rightarrow +\infty ;$$

Le signe \approx signifie qu'il existe deux constantes positives encadrant $\lambda^{-1/2\beta} N_1(\lambda, \Omega_\beta)$.

Pour des ouverts très réguliers, on sait d'ailleurs précisément comment intervient la mesure du bord dans "le son du tambour". Pour un ouvert de bord \mathcal{C}^∞ , on a en effet l'estimation "avec reste" [11,12,22].

$$(3) \quad N_0(\lambda, \Omega) = \varphi(\lambda, \Omega) - \gamma_n |\partial\Omega|_{n-1} \lambda^{(n-1)/2} + o(\lambda^{(n-1)/2}), \lambda \rightarrow +\infty ,$$

avec

$$\gamma_n = (n-1) B_{n-1} [8(2\pi)^{n-1}]^{-1} .$$

Des formules analogues aux formules (2) et (3) ont été établies pour des ouverts irréguliers, non bornés, et des opérateurs plus généraux par de nombreux auteurs. En 1966, en particulier, la recherche sur ce sujet a été réactivée par le célèbre article de M. Kač [13] intitulé "can one hear the shape of a drum ?", où l'auteur pose la question de savoir si la connaissance du spectre permet de déterminer complètement les caractéristiques géométriques de Ω . La réponse est négative, comme l'a montré H. Urakawa [24]. Toutefois, la connaissance du spectre donne de nombreux renseignements qui ont des applications ; il est par exemple possible de détecter des fissures dans un objet car elles modifient sa "réponse vibratoire" (il "sonne creux").

Dans la suite on considère des ouverts Ω "à bord fractal" et on obtient une majoration du "reste" $N_0(\lambda, \Omega) - \varphi(\lambda, \Omega)$. Plus précisément, si $\partial\Omega$ a pour dimension de Minkowski δ , on a [9,15,16] :

$$(4) \quad N_0(\lambda, \Omega) = \varphi(\lambda, \Omega) + O(\lambda^{\delta/2}), \lambda \rightarrow +\infty .$$

Ce résultat a été obtenu en collaboration avec M.L. Lapidus qui a, depuis, étendu ce résultat aux cas de certains problèmes de Neumann ou d'opérateurs plus généraux [14].

Avant de démontrer ce résultat (dans le paragraphe III) nous rappelons, dans le paragraphe suivant, les définitions des dimensions de Hausdorff et de Minkowski ainsi que la conjecture de M. Berry et les résultats de J. Brossard et R. Carmona.

II Dimensions fractales et conjectures

En 1980, lors d'une étude sur la diffraction des ondes par des fractals, M. Berry fait (avec les notations précédentes), la conjecture suivante [1,2] :

Si Ω est un ouvert borné de bord $\partial\Omega$ de dimension de Hausdorff H et de H -mesure de Hausdorff $m_0(H, \partial\Omega)$, alors :

$$(5) \quad N_0(\lambda, \Omega) = \varphi(\lambda, \Omega) - \gamma_n m_0(H, \partial\Omega) \lambda^{H/2} + o(\lambda^{H/2}), \lambda \rightarrow +\infty .$$

La dimension de Hausdorff d'un ensemble Γ de \mathbf{R}^n est définie de la façon suivante :

Pour $\varepsilon > 0$ fixé, on considère l'ensemble des recouvrements $\mathcal{R}_\varepsilon(\Gamma)$ de Γ par des ensembles de diamètre $\sigma_i \leq \varepsilon$ et on pose

$$(6) \quad m(\alpha, \varepsilon, \Gamma) = \inf_{\mathcal{R}_\varepsilon(\Gamma)} \sum (\sigma_i)^\alpha ;$$

la quantité $m(\alpha, \varepsilon, \Gamma)$ est une fonction non croissante de ε , et on définit $m_0(\alpha, \Gamma)$, la α -mesure de Hausdorff de Γ par

$$(7) \quad m_0(\alpha, \Gamma) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} m(\alpha, \varepsilon, \Gamma) = \inf_{\varepsilon > 0} m(\alpha, \varepsilon, \Gamma) .$$

La dimension de Hausdorff H de Γ est alors définie par

$$(8) \quad \begin{array}{l} \text{si } \alpha > H , m_0(\alpha, \Gamma) = 0 \\ \text{si } \alpha < H , m_0(\alpha, \Gamma) = +\infty . \end{array}$$

Si $\partial\Omega$ est suffisamment irrégulier, on a $H > n - 1$, et on justifie ainsi la terminologie de "dimension fractale" utilisée, et actuellement très répandue [17].

Toutefois d'autres dimensions non entières existent, et, en particulier, la dimension de Minkowski. Cette dimension peut s'introduire de diverses façons, et, de ce fait, on la trouve dans la littérature sous des terminologies variées, telles que : dimension logarithmique, ordre dimensionnel de Bouligand, "box counting dimension",... . Il s'agit en réalité de l'extension par Bouligand [3], au cas fractal, de la dimension de Minkowski.

Soit Γ un ensemble de \mathbf{R}^n ; désignons par $\nu(\varepsilon, \Gamma)$ le nombre minimum de boules de rayon ε nécessaire pour recouvrir Γ ; on définit alors δ , la dimension de Minkowski de Γ , par

$$(9) \quad \delta = \inf \{ \alpha > 0 / \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^\alpha \nu(\varepsilon, \Gamma) = 0 \} = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln \nu(\varepsilon, \Gamma)}{\ln 1/\varepsilon} .$$

Avec les notations précédentes ((6) et (9)), on a :

$$m(\alpha, \varepsilon, \Gamma) \leq \nu(\varepsilon, \Gamma)(2\varepsilon)^\alpha$$

et donc

$$H \leq \delta .$$

On peut aussi, pour définir δ , introduire la “saucisse” de Cantor Minkowski :

$$\Gamma_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^n / \text{dist}(x, \Gamma) < \varepsilon\} ;$$

ici $\text{dist}(x, \Gamma)$ désigne la distance euclidienne usuelle de x à Γ .

Pour $\alpha > 0$, on définit la “ α mesure supérieure de Γ au sens de Minkowski” par

$$\mu^*(\alpha, \Gamma) = \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-(n-\alpha)} |\Gamma_\varepsilon|_n ;$$

on définit de même la “ α -mesure inférieure”:

$$\mu_*(\alpha, \Gamma) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-(n-\alpha)} |\Gamma_\varepsilon|_n .$$

on dit que Γ a pour dimension de Minkowski δ si

$$0 < \mu_*(\delta, \Gamma) \leq \mu^*(\delta, \Gamma) < \infty ;$$

de plus si $\mu_*(\delta, \Gamma) = \mu^*(\delta, \Gamma)$, cette quantité est appelée δ -mesure de Minkowski de Γ .

En 1984-85, J. Brossard et R. Carmona [5,6] montrent, à l'aide d'un contre exemple, que (5) n'est pas toujours valable, et ils suggèrent de substituer δ à H dans (5). En effet, par des “estimations browniennes”, ils obtiennent une inégalité pour la “fonction partition” $Z(t, \Omega) := \sum_{j=1}^{\infty} e^{-\lambda_j t}$ de la forme :

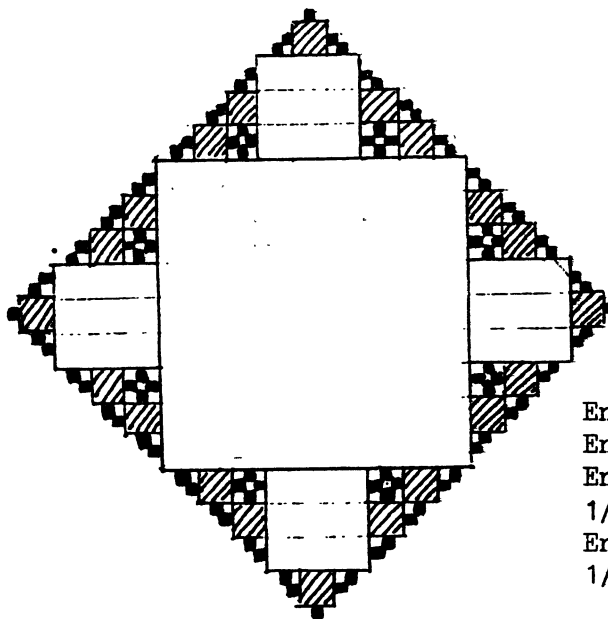
$$c' t^{-\delta/2} \leq Z(t, \Omega) - (4\pi t)^{-n/2} |\Omega|_n \leq c'' t^{-\delta/2} .$$

Cette estimation est valable quand $\partial\Omega$ a pour dimension de Minkowski δ et sous une hypothèse supplémentaire sur ce bord (hypothèse de “densité capacitaire minorée”).

La fonction partition $Z(t, \Omega)$ est obtenue par transformation de Laplace de la fonction spectrale du problème (P_0) ; toutefois, une estimation asymptotique sur $Z(t, \Omega)$, quand $t \rightarrow 0$, est plus faible qu'une estimation asymptotique sur $N_0(\lambda, \Omega)$, quand $\lambda \rightarrow +\infty$.

Le contre exemple de J. Brossard et R. Carmona est un ouvert de \mathbf{R}^2 constitué d'une réunion dénombrable de carrés de taille décroissante : on considère un grand carré G_0 de côté 1 ; à l'extérieur de G_0 , on “accroche”, sur le tiers médian de chaque côté, quatre

carrés de côté $\frac{1}{3}$ et on recommence indéfiniment l'opération en plaçant régulièrement des carrés de côté 3^{-p} , $p \in \mathbb{N}$:



En blanc, un cube de côté 1.
 En gris, 4 cubes de côté $1/3$.
 En hachuré, 20 cubes de côté $1/9$.
 En noir, les cubes de côté $1/27$.

on a là un "fractal régulier" pour lequel $\delta = H = \frac{\ln 5}{\ln 3}$. Les auteurs "créent alors du bord" en subdivisant chaque carré de côté 3^{-p} en $[a^p]$ carrés égaux ($[\cdot]$ désigne la partie entière de \cdot), avec $a > 1$. On a maintenant $\delta > H$, et un calcul montre que, pour cet ouvert, le "reste" $N_0(\lambda, \Omega) - \varphi(\lambda, \Omega)$ est de l'ordre de $\lambda^{\delta/2}$.

III Démonstration

Avec les notations précédentes, on démontre que

Théorème 1.— Si Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^n avec un bord $\partial\Omega$ de δ mesure supérieure de Minkowski μ^* , et de dimension de Minkowski $\delta \in]n-1, n[$ tels que

$$(10) \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-(n-\delta)} |\Omega_\varepsilon|_n = \mu^* < \infty$$

alors

$$N_0(\lambda, \Omega) = \varphi(\lambda, \Omega) + o(\lambda^{\delta/2}), \lambda \rightarrow +\infty$$

La méthode utilisée ici est celle de courant [7,21] utilisant la formule du "mini-max" et ses conséquences. Plus précisément on reprend exactement les démonstrations de G. Métivier [19,20]. On considère une partition de \mathbb{R}^n en cubes égaux et disjoints $(Q_{r_p})_{r_p \in \mathbb{Z}^n}$, de côtés $\eta_p = 2^{-p}$.

On définit par induction :

$$A_0 = \{r_0 \in \mathbb{Z}^n / Q_{r_0} \subset \Omega\} \quad \text{et} \quad \Omega'_0 = \bigcup_{r_0 \in A_0} Q_{r_0} ; \quad \Omega''_0 = \Omega \setminus \overline{\Omega'_0}.$$

$$A_1 = \{r_1 \in \mathbf{Z}^n / Q_{r_1} \subset \Omega''_0\} \quad \text{et} \quad \Omega'_1 = \Omega'_0 \cup \left(\bigcup_{r_1 \in A_1} Q_{r_1} \right); \quad \Omega''_1 = \Omega \setminus \overline{\Omega}'_1.$$

...

$$A_p = \{r_p \in \mathbf{Z}^n / Q_{r_p} \subset \Omega''_{p-1}\} \quad \text{et} \quad \Omega'_p = \Omega'_{p-1} \cup \left(\bigcup_{r_p \in A_p} Q_{r_p} \right); \quad \Omega''_p = \Omega \setminus \overline{\Omega}'_p.$$

On fait alors les remarques suivantes :

Remarque 1. $\Omega''_p \subset \Omega_{\varepsilon_p}$ avec $\varepsilon_p = \sqrt{n}\eta_p = \sqrt{n}2^{-p}$. En tenant compte de la définition de δ dans (9), on en déduit qu'il existe $M > 0$ et $p_0 \in \mathbf{N}$ tel que, pour tout $p \geq p_0$,

$$(11) \quad \#A_p \leq M2^{p\delta}$$

Remarque 2. Pour tout entier $p \geq P$ avec

$$(12) \quad P := \max\{q \in \mathbf{N} / 2^q < \sqrt{\lambda}/\pi\}, \quad \text{on a} \quad N_i(\lambda, Q_p) = 0;$$

Ceci est une conséquence immédiate du calcul des valeurs propres (positives) du Laplacien sur un cube (avec des conditions limites de Dirichlet ou de Neumann).

Dans la démonstration on utilise aussi les deux estimations suivantes :

Proposition 1.— *Il existe une constante positive c' , ne dépendant que de n , telle que pour tout cube Q de \mathbf{R}^n de côté η et pour tout $\lambda > 0$, on ait :*

$$(13) \quad |N_i(\lambda, Q) - \varphi(\lambda, Q)| \leq C'[1 + (\lambda\eta^2)^{(n-1)/2}].$$

Cette estimation se trouve par exemple dans [7].

Proposition 2.— *Si ω est un ouvert borné convexe de \mathbf{R}^n de diamètre $\delta(\omega)$, il existe une constante $C'' > 0$ qui est indépendante de ω , telle que, pour tout $f \in H^1(\omega)$,*

$$(14) \quad \|f - \bar{f}_\omega\| \leq C''\delta(\omega)\|f\|_{H^1(\omega)}^2$$

où \bar{f}_ω désigne la valeur moyenne de f sur ω .

Cette estimation se déduit de [8,10,18] ou [20], lemme 3.7 p.157.

On choisit maintenant λ suffisamment grand pour que $P > p_0$. On obtient un encadrement du "reste" $N_0(\lambda, \Omega) - \varphi(\lambda, \Omega)$ en utilisant la formule de "Dirichlet-Neumann bracketing" [7,21]. Ainsi :

$$\sum_{p=0}^P \sum_{r_p \in A_p} N_0(\lambda, Q_{r_p}) \leq N_0(\lambda, \Omega) \leq \sum_{p=0}^P \sum_{r_p \in A_p} N_1(\lambda, Q_{r_p}) + N_1(\lambda, \Omega''_p).$$

Par conséquent :

$$(15) \quad \sum_{p=0}^P (\#A_p)[N_0(\lambda, Q_{r_p}) - \varphi(\lambda, Q_{r_p})] - \varphi(\lambda, \Omega''_p) \leq N_0(\lambda, \Omega) - \varphi(\lambda, \Omega)$$

$$\leq \sum_{p=0}^P (\#A_p) [N_1(\lambda, Q_{r_p}) - \varphi(\lambda, Q_{r_p})] + N_1(\lambda, \Omega''_P).$$

Dans (15), étudions d'abord le "terme intérieur"

$$T_i := \sum_{p=0}^P (\#A_p) [N_i(\lambda, Q_{r_p}) - \varphi(\lambda, Q_{r_p})] .$$

En utilisant (11) et (13) on obtient

$$T_1 \leq C_1 + C_2 \lambda^{(n-1)/2} + C_3 [2^{P\delta} + \lambda^{(n-1)/2} 2^{P[\delta-(n-1)]}] ;$$

Par conséquent il résulte de la définition de P , (12), que

$$(16) \quad T_1 \leq c_4 (1 + \lambda^{(n-1)/2} + \lambda^{\delta/2}) .$$

On étudie maintenant le volume de la "bande frontière". On déduit de la remarque 1 que

$$\varphi(\lambda, \Omega''_P) \leq c_5 \lambda^{n/2} |\Omega''_P|_n \leq c_5 \lambda^{n/2} |\Omega_{\sqrt{n}\eta_P}|_n .$$

Il résulte alors de (10) et (12) que

$$(17) \quad \varphi(\lambda, \Omega''_P) \leq c_6 \lambda^{n/2} \eta_P^{(n-\sigma)} = c_7 \lambda^{n/2} 2^{P(\delta-n)} \leq c_8 \lambda^{\delta/2} .$$

Il reste enfin à estimer le "terme de bord" $N_1(\lambda, \Omega''_P)$. Pour cela on utilise les méthodes de [8,10,18 ou 20], et, en particulier, la proposition 2 ci-dessus.

Soit

$$B = \{r_P \in \mathbf{Z}^n / Q_{r_P} \cap \partial\Omega \neq \emptyset\}$$

et

$$B' = \{r_P \in B / |Q_{r_P} \cap \Omega|_n > \frac{1}{2} |Q_{r_P}|_n = \frac{1}{2} \eta_P^n\} ;$$

on a donc :

$$\frac{1}{2} \eta_P^n (\#B') \leq \sum_{r_P \in B} |Q_{r_P} \cap \Omega|_n \leq |\Omega_{\sqrt{n}\eta_P}|_n .$$

Il résulte alors, que comme dans la remarque 1,

$$(18) \quad \#B' \leq c_9 2^{P\delta} .$$

on prolonge alors $u \in H_0^1(\Omega)$ par 0 en dehors de Ω et l'on note par \tilde{u} ce prolongement. Sur chaque cube $(Q_{r_P})_{r_P \in B'}$ on approxime \tilde{u} par sa moyenne \bar{u}_{r_P} et sur chaque cube $(Q_{r_P})_{r_P \in B \setminus B'}$, on approxime \tilde{u} par 0.

Sur Ω''_P on approxime ainsi u par

$$v = \sum_{r_P \in B'} \bar{u}_{r_P} \mathbf{1}_{Q_{r_P}} .$$

On remarque que v est dans un sous-espace de $H^1(\Omega''_P)$ de dimension $\#B'$ et il résulte de la proposition 2 que

$$(19) \quad \|u - v\|_{L^2(\Omega''_P)}^2 \leq c_{10} \eta_P^2 \|u\|_{H^1(\Gamma_P)}^2$$

avec $\Gamma_P = \bigcup_{r_P \in B} Q_{r_P}$.

La constante c_{10} ne dépend que de n et Ω .

Ainsi, compte tenu de (12) et (18)

$$(20) \quad N_1(\lambda, \Omega''_P) \leq c_{11} \lambda^{\delta/2},$$

et le théorème 1 résulte de (15), (16), (17), (20).

Remarque 3 : L'inégalité (20) se déduit de (19) en utilisant la notion de k épaisseur et le lien avec la théorie spectrale donné dans [4,8,18,19,20].

Remarque 4 : Cette démonstration s'applique aux problèmes de Neumann pour des ouverts ayant la propriété de 1 prolongement.

Remarque 5 : La démonstration de [9] est plus simple ; on considère en effet une réunion de cubes θ contenant Ω et on majore $N_0(\lambda, \Omega)$ par $N_0(\lambda, \theta)$. Prenant

$$\theta = \Omega \cup \left(\bigcup_{P \in B} Q_{r_P} \right),$$

on a, pour B , une estimation analogue à (18) si l'on remplace l'hypothèse (10) par :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{-(n-\delta)} |\Omega_\varepsilon|_n = \mu.$$

Références

- [1] Berry, M.V. (1979). Distribution of modes in fractal resonators, in "Structural Stability in Physics", (W. Güttinger and H. Eikemeier, eds.), **Springer-Verlag**, Berlin, pp. 51-53.
- [2] Berry, M.V. (1980). Some geometrical aspects of wave motion : wavefront dislocations, diffractions catastrophes, diffractals, in "Geometry of the Laplace Operator", Proc. Symp. Pure Math., Vol. 36, **Amer. Math. Soc.**, Providence, R.I., pp. 13-38.
- [3] Bouligand, G. (1928). Ensembles impropres et nombre dimensionnel, **Bull. Sci. Math.**, 52, (2), 320-344 and 361-376.
- [4] Boutet de Monvel, L. et Grisvard, P. (1971). Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un opérateur, **C.R. Acad. Sci. Paris Série A** t.272 pp.23-25.
- [5] Brossard, J. (1985). Effets de bord pour un tambour à bord fractal. **Séminaire de théorie spectrale et géométrie des universités de Chambéry et Grenoble** exp 10.
- [6] Brossard, J. et Carmona, R. (1986). Can one hear the shape of a fractal ? **Comm. Math. Phys.** 104, pp. 103-122.
- [7] Courant, R. et Hilbert, D. (1953). "Methods of Mathematical Physics", Interscience, New-York.
- [8] Fleckinger, J. (1973). Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers, in "**Séminaires d'Analyse Numérique**", Université P. Sabatier, Toulouse, exp. D.
- [9] Fleckinger, J. (1988). "On eigenvalue problems associated with fractal domains" (proc. 10th Dundee conference on differential equations. Jarvis et Sleeman ed.) (à paraître)
- [10] Fleckinger, J. et Métivier, G. (1973). Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers, **C.R. Acad. Sci. Paris, Sér. A**, 276, 913-916.
- [11] Hörmander, L. (1985). The analysis of linear partial differential operators vol.3 et 4. **Springer Verlag**. Berlin.
- [12] Ivrii, V. Ja. (1980). Second term of the spectral asymptotic expansion for the Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary, **Funct. Anal. Appl.**, 14, 98-106.
- [13] Kac, M. (1966). Can one hear the shape of a drum ? **Amer. Math. Monthly**, 73, 1-23.
- [14] Lapidus, M.L. (1988). Fractal drum, inverse spectral problems for elliptic operators and a partial solution of the Weyl-Berry conjecture (to appear).
- [15] Lapidus, M.L. et Fleckinger, J. (1987). The vibrations of a "fractal drum", Proc. EQUADIFF 87, Xanthi, August 1987. **M. Dekker**.

- [16] Lapidus, M.L. et Fleckinger-Pellé, J. (1988). Tambour fractal : vers une résolution de la conjecture de Weyl-Berry pour les valeurs propres du Laplacien, **C.R. Acad. Sci. Paris**, Sér. I, Math. t.306 p.171-175.
- [17] Mandelbrot, B.B. (1982). "The fractal Geometry of Nature", **W.H. Freeman**, San Francisco.
- [18] Métivier, G. (1973). Théorie spectrale d'opérateurs elliptiques sur des ouverts irréguliers, **Sém. Goulaouic-Schwartz**, Ecole Polytechnique, Paris.
- [19] Métivier, G. (1976). Etude asymptotique des valeurs propres de la fonction spectrale de problèmes aux limites, **Thèse d'Etat**, Université de Nice, France.
- [20] Métivier, G. (1977). Valeurs propres de problèmes aux limites elliptiques irréguliers, **Bull. Soc. Math. Fr. Mem.**, 51-52, 125-219.
- [21] Reed, M. et Simon, B. (1978). "Methods of Modern Mathematical Physics" Vol.IV, **Academic Press**, New-York.
- [22] Seeley, R. (1978). A sharp asymptotic remainder estimate for the eigenvalues of the Laplacian in a domain of \mathbf{R}^3 . **Adv. in Maths** 29 p.244-269.
- [23] Tricot, B. (1981). Douze définitions de la densité logarithmique, **C.R. Acad. Sci.** 23, 549.
- [24] Urakawa, H. (1982). Bounded domains which are isospectral but not congruent, **Ann. Sci. Ecole Normale Sup.**, 15; 441-456.
- [25] Weyl, H. (1912). Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen, **Math. Ann.**, 71; 441-479.