

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. ROBERT

**Asymptotique semi-classique pour la densité spectrale locale
d'opérateurs de Schrödinger (d'après D. Robert et H. Tamura)**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 4,
p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986___A4_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

ASYMPTOTIQUE SEMI-CLASSIQUE POUR LA DENSITE SPECTRALE

''
LOCALE D'OPERATEURS DE SCHRÖDINGER.

(d'après D. ROBERT et H. TAMURA)

par D. ROBERT

§ 1. NOTIONS DE DENSITE SPECTRALE.

Considérons un opérateur autoadjoint H (non nécessairement borné) opérant sur un espace de Hilbert (complexe) \mathcal{H} . Si $]a, b[$ est un intervalle réel tel que spectre $H \cap]a, b[$ est discret (i.e. constitué de valeurs propres isolées de multiplicité finie) on définit naturellement la densité spectrale de H sur $]a, b[$ comme étant la mesure positive :

$$(1) \quad d\sigma(\lambda) = \sum_j m_j \cdot \delta(\lambda_j - \lambda) \text{ où } \{\lambda_j\} = \text{spectre } H \cap]a, b[$$

et m_j est la multiplicité de λ_j .

On peut écrire (1) sous la forme :

$$(1') \quad \int f(\lambda) d\sigma(\lambda) = \text{tr}(f(H)) \text{ pour tout } f \in C_c^\circ(]a, b[) \text{ (espace des fonctions continues à support compact sur }]a, b[).$$

Lorsque le spectre de H n'est plus discret sur $[a, b]$ on procède de la manière suivante (Bérezenskii[BE], Guelfand-Vilenkin [G-V]) :

Soit $\{E(\lambda), \lambda \in \mathbb{R}\}$ la résolution spectrale de H . Pour tout intervalle $I = [\alpha, \beta]$ on pose : $E(I) = E(\beta+0) - E(\alpha)$.

On se donne un opérateur positif T , borné sur \mathcal{H} tel que l'opérateur $T.E.([a, b])$ soit de classe Hilbert-Schmidt.

On définit alors une densité spectrale pour H sur $[a, b]$ par :

$$(2) \quad \sigma_T(B) = \text{tr}(T.E(B).T), \quad B \text{ borélien de } [a, b].$$

(2) définit une mesure positive finie sur $[a, b]$ qui s'écrit encore :

$$(2') \quad \int f(\lambda) d\sigma_T(\lambda) = \text{tr}(T.f(H).T), \quad f \in C([a, b]).$$

La terminologie est justifiée par le théorème de Radon-Nikodym qui permet d'écrire que l'on a :

$$(3) \quad T.E(B).T = \int_B F_T(\lambda) \cdot d\sigma_T(\lambda)$$

où $\lambda \rightarrow F_T(\lambda)$ est une application borélienne à valeurs opérateurs bornés sur \mathcal{H} . On peut alors retrouver H à partir de σ_T et F_T si T est inversible (T^{-1} sera en général non borné).

Exemple élémentaire :

$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$, $H = -\Delta$, opérateur de Laplace de domaine l'espace de Sobolev $H^2(\mathbb{R}^n)$. Ce qui précède s'applique pour $[a, b] \subset]0, +\infty[$ et T l'opérateur de multiplication par $(1+|x|^2)^{s/2}$, $x \in \mathbb{R}^n$, pour $s > n/2$ ■

Dans la suite on supposera toujours que $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n, dx)$. Suivant R. Lavine [La] on localise la notion de densité spectrale de la manière suivante : Supposons qu'il existe un entier k tel que $W.(H+i)^{-k}$ soit de classe Hilbert-Schmidt pour tout $W \in C_c^\circ(\mathbb{R}^n)$. On définit alors la densité spectrale locale comme étant la mesure positive $d\sigma(\lambda, x)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ définie par :

$$(4) \quad \int f(\lambda) \cdot W^2(x) d\sigma(\lambda, x) = \text{tr}(W \cdot f(H) \cdot W)$$

pour toute $f \in C_c^\circ(\mathbb{R})$, $W \in C_c^\circ(\mathbb{R}^n)$.

Exemple de base :

Soit H la réalisation autoadjointe d'un opérateur différentiel d'ordre $2m$ sur \mathbb{R}^n , uniformément elliptique, à coefficients C^∞ , bornés. Alors $(H+i)^{-k} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow H^{2km}(\mathbb{R}^n)$. D'où $W.(H+i)^{-k}$ est Hilbert-Schmidt pour $k > \frac{n}{4m}$.

Interprétation formelle de la mesure $d\sigma(\lambda, x)$:

Désignons par $e(\lambda, x, y)$ le noyau du projecteur spectral $E(\lambda)$. Un calcul formel sur (4) donne : $d\sigma(\lambda, x) = \frac{\partial e}{\partial \lambda}(\lambda, x, x) \cdot d\lambda \cdot dx$.

Lien avec la fonction spectrale de perturbation :

Considérons l'opérateur de Schrödinger :

$$H(h) = -\frac{h^2}{2} \Delta + V, \quad h > 0, \quad \text{où le potentiel } V \text{ vérifie la condition :}$$

(V) _{ρ} V est C^∞ sur \mathbb{R}^n et pour tout multi-indice α on a :

$$\partial_x^\alpha V(x) = O(|x|^{-\rho-|\alpha|}), \quad \text{où } \rho \in \mathbb{R}.$$

On pose : $H_0(h) = -\frac{h^2}{2} \cdot \Delta$.

Il résulte de Birman-Krein [B-K] que pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(H(h)) - f(H_0(h))$ est de classe trace et que $f \mapsto \text{tr}(f(H(h)) - f(H_0(h)))$ est une mesure borélienne

$$(5) \quad \int f(\lambda) ds(\lambda, h) = \text{tr}(f(H(h)) - f(H_0(h))), \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

La fonction spectrale de perturbation (appelée encore phase de diffusion) est par définition la fonction de répartition $s(\lambda, h)$ de $ds(\lambda, h)$ (noter que $\text{supp}(ds(\lambda, h))$ est limité "à gauche").

On a une relation remarquable avec la densité spectrale locale :

Proposition 1 : Sur $]0, +\infty[$ on a :

$$(6) \quad ds(\lambda, h) = \frac{1}{2\lambda} \int_{\mathbb{R}^n} (2V(x) + x \cdot \nabla V(x)) \cdot d\sigma(\lambda, x, h)$$

où $d\sigma(\lambda, x, h)$ désigne la densité spectrale locale relative à $H(h)$.

Preuve : Nous ne donnerons ici qu'une preuve formelle de (6). La preuve rigoureuse est plus délicate à cause des problèmes de domaine des opérateurs en jeu.

Pour simplifier l'écriture on suppose que $h = 1$.

Introduisons l'opérateur : $A = \frac{1}{2i} (x \cdot \nabla + \nabla \cdot x)$, générateur infinitésimal du groupe unitaire des dilatations dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ (i.e. : $\psi \mapsto e^{n\theta/2} \cdot \psi(e^\theta \cdot x)$, $\theta \in \mathbb{R}$)
 [...] désignant le commutateur de deux opérateurs, on a les égalités :

$$i[H_0, A] = 2 \cdot H_0$$

$$i[A, V] = x \cdot \nabla V = i[A, H] + 2H_0$$

Il en résulte, grâce à (5), que (6) équivaut à

$$(7) \quad \text{tr}([A, H] \cdot f(H) - [A, H_0] \cdot f(H_0)) = 0$$

pour tout $f \in C_0^\infty(]0, +\infty[)$.

A supposer que cela ait un sens, on commence par vérifier (7) pour la famille de fonctions : $f_\mu(\lambda) = (\lambda + \mu)^{-1}$, $\mu > 0$ (ou encore supposer que l'espace de Hilbert \mathcal{H} est de dimension finie !).

On a : $\frac{d}{d\mu} [A, H] (H + \mu)^{-1} = - [A, H] (H + \mu)^{-2}$

d'où : $\frac{d}{d\mu} \text{tr}([A, H] (H + \mu)^{-1}) = - \text{tr}(H + \mu)^{-1} [A, H] (H + \mu)^{-1}$
 $= \text{tr} [A, (H + \mu)^{-1}] = 0$

d'autre part on a : $\lim_{\mu \rightarrow +\infty} \text{tr}([A, H] (H + \mu)^{-1}) = 0$.

On en déduit facilement (7) par un argument de densité.

Nous nous proposons ici de donner des résultats sur la limite semi-classique (i.e. $h \searrow 0$) des mesures $d\sigma(\lambda, x, h)$ et $ds(\lambda, h)$.

§ 2. ASYMPTOTIQUES FAIBLES :

Rappelons d'abord que sous des conditions assez faibles sur V (continu, borné inférieurement sur \mathbb{R}^n) R. Lavine [La], B. Simon [SI]₁ ont établi :

Proposition 2 : $\lim_{h \searrow 0} h^n \cdot d\sigma(\lambda, x, h) = d\sigma_{cl}(\lambda, x)$ au sens de la convergence vague des mesures de Radon sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ où $d\sigma_{cl}(\lambda, x) = [(2\pi)^{-n} \int \delta(p(x, \xi) - \lambda) d\xi] dx d\lambda$
 avec $p(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x)$

Cette proposition signifie que pour tout $W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n_x)$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a :

$$\lim_{h \rightarrow 0} h^n \cdot \text{tr}(W(x) \cdot f(H(h))) = (2\pi)^{-n} \cdot \int f(p(x, \xi)) \cdot W(x) dx d\xi .$$

Sous l'hypothèse $(V)_\rho$, $\rho > 0$, nous avons le résultat plus précis suivant :

Proposition 3 : Soit $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

i) Pour tout $h > 0$, $f(H(h))$ a un noyau C^∞ sur $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_y$

ii) Pour tout $N \in \mathbb{N}$ on a :

$$[f(H(h))](x, x) = \sum_{j=0}^N h^{2j-N} \cdot K_j(x) + H^{2N+2-n} \cdot r_N(x, h)$$

avec $r_N \in L^\infty(\mathbb{R}^n \times]0, 1])$ et

$$K_j(x) = (2\pi)^{-n} \sum_{k=2}^{3j} \int P_{2j, k} \left(p \begin{matrix} (\beta) \\ (\alpha) \end{matrix} \right) \cdot f^{(k)}(p) d\xi, \quad j \geq 1$$

$$K_0(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} f(p(x, \xi)) d\xi \quad (p(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x))$$

$P_{2j,k}$ étant des polynômes universels de $p_{(\alpha)}^{(\beta)} = \partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} p$.

Le principe de la preuve de la Proposition 3 utilise la méthode exposée dans [H-R] pour le calcul fonctionnel.

Corollaire 4 : Sous l'hypothèse (V_{ρ}) , $\rho > 0$, la densité spectrale locale

$d\sigma(\lambda, x, h)$ admet dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_{\lambda} \times \mathbb{R}_x^n)$ le développement asymptotique complet, pour $h \downarrow 0$:

$$d\sigma(\lambda, x, h) \sim \sum_{j=0}^{\infty} h^{2j-n} \cdot T_{2j}(\lambda, x)$$

où : $T_0(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \cdot \int \delta(p(x, \xi) - \lambda) d\xi$

$j \geq 1, T_{2j}(x, \lambda) = (2\pi)^{-n} \cdot \sum_{k=2}^{3j} (-1)^k \cdot \int P_{2j,k} (p_{(\alpha)}^{(\beta)}) \delta^{(k)}(p(x, \xi) - \lambda) d\xi$

Remarques 5 :

(i) T_{2j} est C^{∞} en λ (à valeurs distributions en x) sur $\mathbb{R} \setminus C(V)$ où $C(V)$ est l'ensemble des valeurs critiques de V i.e. :

$$C(V) = \{ \mu \in \mathbb{R} \mid \exists x_0 \in \mathbb{R}^n, V(x_0) = \mu \text{ et } \nabla V(x_0) = 0 \} .$$

(ii) Pour tout $\varepsilon_0 > 0$ il existe $R_0 > 0$ tel que

$$T_{2j} \in C^{\infty}(\{x, |x| > R_0\} \times [\varepsilon_0, +\infty[)$$

Il suffit par exemple de choisir R_0 de sorte que

$$|x| > R_0 \Rightarrow |V(x)| < \varepsilon_0 / 2 .$$

(iii) Nous verrons plus loin que (V_{ρ}) implique que $e(\lambda, x, y, h)$ est C^{∞} en λ, x, y sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^n$ par conséquent le corollaire 4 donne un développement au sens des distributions de $\frac{\partial}{\partial \lambda} e(\lambda, x, x; h)$ lorsque $h \downarrow 0$.

Corollaire 5 : On suppose ici que (V_{ρ}) est satisfaite pour $\rho > n$. Soit

$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < +\infty$ non valeurs critiques de V . Alors la fonction spectrale de perturbation vérifie :

$$\lim_{h \downarrow 0} h^n \left(\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} ds(\mu, h) \right) = (2\pi)^{-n} \cdot \left\{ \int_{\lambda_1 \leq p(x, \xi) \leq \lambda_2} d\xi - \int_{\lambda_1 \leq p_0(\xi) \leq \lambda_2} d\xi \right\} dx$$

où $p_0(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}$

Esquisse de preuve : On régularise la fonction indicatrice de $[\lambda_1, \lambda_2]$ et on utilise le corollaire 4 (en testant sur les fonctions régularisées), ainsi que les formules de représentation (5) et (6).

§ 3. LE RESULTAT PRINCIPAL : ASYMPTOTIQUE FORTE

Théorème 6 :

i) Sous l'hypothèse (V_ρ) , $\rho > 0$, la densité spectrale locale de $H(h)$, $d\sigma(\lambda, x, h)$ est C^∞ sur $]0, +\infty[\times \mathbb{R}_x^n$. On a en particulier : $d\sigma(\lambda, x, h) = \frac{\partial e}{\partial \lambda}(\lambda, x, x, h) d\lambda dx$.

ii) Supposons $\rho > \frac{n+1}{2}$ ($\rho > 0$ devrait suffire !).

Soient W vérifiant (V_ν) , $\nu > n$ et $\lambda > 0$ un niveau d'énergie ne possédant pas de trajectoire piégée (voir définition plus loin). On a alors le développement asymptotique complet suivant, pour $h \downarrow 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} W(x) \frac{\partial e}{\partial \lambda}(\lambda, x, x; h) dx \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^{2j-n} \cdot F_{2j}(\lambda)$$

où $F_{2j}(\lambda) = \int T_{2j}(\lambda, x) \cdot W(x) dx$.

Corollaire 7 : Sous l'hypothèse précédente pour $\lambda > 0$ on a :

$\frac{ds}{d\lambda}(\lambda, h) \sim \sum_{j \geq 0} h^{2j-n} \cdot \gamma_j(\lambda)$ (au sens des séries asymptotiques en h) γ_j étant C^∞ au voisinage de λ .

(*) Définition : Soit $(y, \eta) \mapsto (x(t, y, \eta), \xi(t, y, \eta))$ le flot hamiltonien associé

à $p(x, \xi) = \frac{|\xi|^2}{2} + V(x)$. On dit qu'il n'y a pas de trajectoire piégée sur le niveau d'énergie $\lambda \in \mathbb{R}$ si pour tout $R > 0$ il existe $T(R) > 0$ tel que :

$$|y| < R, p(y, \eta) = \lambda, |t| > T(R) \Rightarrow |x(t, y, \eta)| > R$$

Remarques 8 :

(i) Dans un travail précédent ($[R-T]_1$) nous avons établi une asymptotique du type du Corollaire 7 pour des potentiels $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}_x^n)$. C'est en partie grâce à la formule (6) qu'on a pu étendre ce résultat aux potentiels vérifiant (V_ρ) , $\rho > n$.

(ii) Pour la preuve du théorème 6 nous renvoyons le lecteur à $[R.T]_2$.

De la démonstration du théorème 6 on peut déduire l'estimation suivante :

Théorème 6' : Il existe $R_1 > 0$ tel que pour tout entier N il existe $C_N > 0$ et pour tout $s > n$ il existe $C_{s,N} > 0$ tels que :

$$\int |W(x) \cdot \frac{\partial}{\partial \lambda} e(\lambda, x, x, h)| dx \leq h^{-n} [C_N \int |W(x)| dx + C_{s,N} \cdot h^N \text{Sup}|x|^s \cdot |W(x)|]$$

pour tout $W \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\text{Supp } W \subset \{x \in \mathbb{R}^n, |x| \geq R_1\}$

Question ouverte : Peut-on prendre $C_{s,N} = 0$ dans le théorème 6' ? Cela reviendrait à établir une estimation uniforme pour $\frac{\partial}{\partial \lambda} e(\lambda, x, x, h)$ en dehors d'un borné de \mathbb{R}^n . Sur tout borné de \mathbb{R}^n il y a un résultat pour $h = 1$ et $\lambda \rightarrow +\infty$ (Popov-Schubin [P-S])

§ 4. LIENS AVEC LA THEORIE DE LA DIFFUSION

On peut déduire du théorème 6' une estimation de la section efficace de diffusion moyenne à l'énergie $\lambda > 0$, notée : $\sigma_{at}(\lambda, h)$. Pour définir cette quantité nous devons faire quelques rappels sur la théorie de la diffusion. ([R.T] §1 pour une présentation rapide, [R-S] pour les détails). On désigne par $S(\lambda, h)$ la matrice de diffusion à l'énergie λ pour le système $(H(h), H_0(h))$; $\lambda > 0$, $h > 0$. Rappelons que $S(\lambda, h)$ est un opérateur unitaire de $L^2(S^{n-1})$. De plus si $\rho > \frac{n+1}{2}$ on a : $S(\lambda, h) = \text{Id} + T(\lambda, h)$ où Id est l'opérateur identité et $T(\lambda, h)$ est un opérateur Hilbert-Schmidt. Des considérations physiques (cf. A-J-S) permettent de définir raisonnablement la quantité $\sigma_{at}(\lambda, h)$ comme étant la section efficace moyenne de diffusion, par :

$$\sigma_{at}(\lambda, h) = \frac{1}{\sigma_{n-1}} \cdot \left(\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\lambda}}\right)^{n-1} \cdot h^{n-1} \cdot \|T(\lambda, h)\|_{\text{HS}}^2$$

où σ_{n-1} est l'aire de la sphère unité.

Théorème 7 : Soient V vérifiant (V_ρ) avec $\rho > \frac{n+1}{2}$ et $\lambda > 0$ un niveau d'énergie sans trajectoire piégée. On a alors :

$$\sigma_{at}(\lambda, h) = O(h^{-(n-1)/\rho-1}), \quad h \searrow 0$$

Remarque 8 : - Enss-Simon ([E-S]) ont obtenu une estimation de ce type en faisant une moyenne en λ

- Yajima ([Ya]), sous certaines hypothèses, a montré que :

$$\lim_{h \searrow 0} h^{(n-1)/\rho-1} \left(\int_a^b \sigma_{at}(\lambda, h) d\lambda \right) > 0 .$$

Revenons maintenant au cas où $\rho > n$.

Dans ce cas $T(\lambda, h)$ est un opérateur de classe trace. On définit alors la phase de diffusion (ou encore le décalage total de phase) $\theta(\lambda, h)$ par :

$$(8) \quad \det S(\lambda, h) = e^{2i\pi\theta(\lambda, h)}$$

On montre de plus que : $\lambda \mapsto T(\lambda, h)$ est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$ à valeurs dans l'espace des opérateurs de classe trace sur $L^2(S^{n-1})$.

D'où

$$(9) \quad \frac{d}{d\lambda} \theta(\lambda, h) = -\frac{1}{2i\pi} \operatorname{tr}(S(\lambda, h) \cdot \frac{dS^*}{d\lambda}(\lambda, h))$$

Il résulte de la théorie de Birman-Krein que l'on a l'égalité remarquable :

$$(10) \quad \frac{d\theta}{d\lambda}(\lambda, h) = \frac{ds}{d\lambda}(\lambda, h) \quad \text{pour tout } \lambda > 0 .$$

où $s(\cdot, h)$ est la fonction spectrale de perturbation pour $(H(h), H_0(h))$.

On peut alors interpréter $\frac{ds}{d\lambda}(\lambda, h)$ comme un temps de retard moyen. Pour voir cela rappelons la définition du temps de retard en mécanique quantique. On considère les groupes unitaires :

$$U(t) = e^{-itH} \quad , \quad U_0(t) = e^{-itH_0} \quad (h = 1)$$

Les opérateurs d'ondes Ω_{\pm} sont définis par les propriétés :

$$\lim_{t \rightarrow \mp\infty} \|U(t)\Omega_{\pm} \cdot \psi - U_0(t) \cdot \psi\| = 0 \quad \text{pour tout } \psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

On a de plus : $\operatorname{Im}\Omega_{\pm} = \mathcal{H}_{ac}(H)$, sous espace absolument continu de H .

(C'est la propriété de complétude - cf[R-S]). L'opérateur de diffusion est alors bien défini par :

$$S = \Omega_{-}^* \cdot \Omega_{+} \quad (\text{opérateur unitaire de } L^2(\mathbb{R}^n))$$

Rappelons que dans la représentation spectrale de $H_0 : L^2(]0, +\infty[, L^2(S^{n-1}))$, S agit de la manière suivante :

$$(Sf)(\lambda, \omega) = (S(\lambda).f(\lambda, .))(\omega), \quad \lambda > 0, \omega \in S^{n-1}$$

où $S(\lambda)$ est la matrice de diffusion.

Pour un état ψ "assez régulier" on définit le temps de retard par la formule :

$$(11) \quad (\Delta T.\psi, \psi) = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (\|P_R \circ U(t).\Omega_+\|^2 - \|P_R.U_0(t).\psi\|^2) dt$$

$$\text{où } P_R \varphi(x) = (1_{\{|x| < R\}} \cdot \varphi)(x)$$

Il résulte de [J.e] que (11) définit un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n)$ à domaine dense, autoadjoint, commutant avec $U_0(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Comme pour l'opérateur de diffusion, on en déduit que ΔT est décomposable dans la représentation spectrale de H_0 :

$$(\Delta T)f(\lambda\omega) = (\Delta T(\lambda).f(\lambda, .))(\omega) \quad (\lambda > 0, \omega \in S^{n-1})$$

où $\Delta T(\lambda)$ est un opérateur borné sur $L^2(S^{n-1})$.

On a de plus la relation suivante :

$$(12) \quad \Delta T(\lambda) = iS(\lambda). \frac{dS^*}{d\lambda}(\lambda) \text{ (Eisenbud - Wigner)}$$

Pour une étude mathématique détaillée des relations (11) et (12) nous renvoyons le lecteur à [Je] .

Il résulte de (9) et (12) que l'on a :

$$\text{tr}(\Delta T(\lambda)) = -2\pi. \frac{ds}{d\lambda}(\lambda) .$$

On peut donc interpréter la quantité $-2\pi \frac{ds}{d\lambda}(\lambda)$ comme le temps de retard moyen à l'énergie λ du système quantique (H, H_0) .

D'autre part il existe également une théorie de la diffusion pour le système classique (p, p_0) , $p_0(\xi) = \frac{|\xi|^2}{2}$, $p(x, \xi) = p_0(\xi) + V(x)$. On peut relier la constante $\gamma_0(\lambda)$ du corollaire 7 au temps de retard moyen du système classique (pour la diffusion classique voir [SI], [HU],) ■

BIBLIOGRAPHIE :

- [A-J-S] WO. Amrein - J.M. Jauch - K.B. Sinha : Scattering theory in Quantum mechanics. (1977). WA Benjamin.Inc
- [Be] J.M. Berezenskü : Expansions in Eigenfunctions of Self-adjoint Operators. Translation AMS (1968)
- [B-K] MS Birman - MG. Krein : Dolk Akad Nauk SSSR 144 (1962) 475-478 (en Russe)
- [E-W] L. Eisenbud - E.P. Wigner : Phys Rev 72 - 29 - (1947)
- [E.S] V. Enss - B. Simon : Comm Math Phys 76, 177-209 (1980)
- [G-V] I.M. Guelfand - N.Y. Vilenkin : Les distributions tome 4 Traduction Dunod (1967).
- [H.R] B. Helffer - D. Robert : J. of funct. Anal. Vol 53 N° 3 246-268. (1983)
- [Hu] W. Hunziker : Comm Math. Phys 8, 282-299 (1968)
- [Je] A. Jensen : Commun. Math. Phys. 82 435-456 (1981).
- [La] R. Lavine : In Quantum Mechanics in Math, Chemistry and Physics. Ed : K.E Gustafson WP. Reinhardt. Plenum Press (1981).
- [P-S] GS. Popov - M.A. Schubin : Funk. Anal. Pril. Vol 17 N°3. 37-45 (1983) (en Russe).
- [R-S] M. Reed - B. Simon : Scattering Theory (III) Academic Press (1979)
- [R-T]₁ D. Robert - H. Tamura : Comm. in PDE 9 (10) 1017-1058 (1984). Exposé N°V Séminaire Goulaouic Meyer Schwartz (1983).
- [R-T]₂ D. Robert - H. Tamura : Article détaillé en préparation

[Si]₁ B. Simon : Bull. AMS 7 (3). 447-527 (1982).

[Si]₂ B. Simon : Comm. Math Phys 23, 37-48 (1971).

[Ya] K. Yajima : in "Schrödinger Operators" . Lecture Notes in Math N°1159.

*
*
*