G. Métivier

Unicité pour les équations non linéaires du premier ordre

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 2, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A2_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

UNICITE POUR LES EQUATIONS NON LINEAIRES DU PREMIER ORDRE.

par G. METIVIER

Exposé n° II

22 Octobre 1985

§1. INTRODUCTION.

L'unicité du problème de Cauchy non caractéristique pour une équation linéaire à coefficients analytiques, est un résultat bien connu (Hölmgren [5]). Par contre, pour les équations non linéaires, on ne dispose pas d'un résultat aussi général et le but de cet exposé est de montrer que l'unicité de Cauchy a encore lieu pour les équations non linéaires du premier ordre, généralisant un résultat antérieur de Baouendi-Goulaouic-Trèves [1].

De façon précise, considérons au voisinage du point $(o,x^o) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ le problème de Cauchy suivant :

(1.1) $$\partial_t u = F(f,x,u,\partial_x u)$$

(1.2) $$u\big|_{t=o} = \phi(x)$$

où $F(t,x,\zeta,\xi)$ est une fonction analytique de ses arguments sur un voisinage complexe du point (o,x^o,ζ^o,ξ^o) dans $\mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n$, et ϕ est une fonction (de classe C^1) à valeurs complexes vérifiant :

(1.3) $$\phi(x^o) = \zeta^o \ , \qquad d_x\phi(x^o) = \xi^o$$

Par solution de (1.1), on entend une fonction au moins de classe C^1 sur un voisinage réel de (o,x^o) à valeurs complexes, et solution classique de (1.1).

On peut énoncer :

Théorème 1 : si u et u^* sont deux solutions de classe C^2 de (1.1) (1.2), alors u et u^* coïncident au voisinage de (o,x^o)

Théorème 2 : soit u solution de classe C^2 de (1.1) au voisinage de (o,x^o). Alors il existe un voisinage réel Ω de (o,x^o) et une suite de solutions analytiques u_ν de (1.1) sur Ω qui converge vers u dans $C^2(\Omega)$ lorsque $\nu \to +\infty$.

Dans [1], S. Bouendi, C. Goulaouic et F. Trèves ont établi ces résultats d'unicité et d'approximation pour les équations semi-linéaires, et aussi l'unicité dans deux autres cas : soit lorsque la donnée de Cauchy ϕ est analytique, soit en dimension deux (avec nos notations, $n=1$). Le but de cet exposé est donc de montrer que ces résultats d'unicité et d'approximation sont vrais en général pour les équations du premier ordre. Signalons aussi que dans le cas linéaire la propriété d'approximation du Théorème 2 a été établie dans de nombreuses situations ([8], [3] [4] [2]).

Les théorèmes 1 et 2 sont susceptibles de diverses généralisations : d'abord, comme d'habitude dans ces problèmes, l'analyticité en t de F n'est nullement indispensable ; l'unicité reste vraie ainsi que la propriété d'approximation, à condition bien entendu de ne plus demander aux solutions approchantes u_ν que d'être partiellement analytiques en x. Ensuite on peut encore aller un peu plus loin, et remplacer l'hypothèse d'analyticité en x de F, par une hypothèse d'intégrabilité du champ hamiltonien ; on envoie à [7] pour un énoncé précis.

Dans les théorèmes 1 et 2 ci-dessus, on suppose a priori que les solutions sont de classe C^2. Remarquons d'abord qu'il est indispensable de faire une certaine hypothèse de régularité a priori, d'une part pour donner un sens à l'équation (1.1), et d'autre part parce qu'on sait bien que, même dans le cas où tout est réel (cas hyperbolique) il n'y a pas unicité des solutions faibles. Néanmoins, l'hypothèse la plus naturelle serait de supposer les solutions de classe C^1 et non pas C^2. Le problème de la régularité minimale à imposer aux solutions reste donc ouvert. Cependant, on peut effectivement diminuer de C^2 à C^1 cette hypothèse de régularité, dans le cas des équations quasilinéaires :

$$\partial_t u + \sum_{j=1}^{n} f_j(t,x,u)\partial_{x_j} u = g(t,x,u) \tag{1.4}$$

où $f_j(t,x,\zeta)$ et $g(t,x,\zeta)$ sont des fonctions analytiques au voisinage de (o,x^o,ζ^o) .

On renvoie à [7] pour des démonstrations complètes des théorèmes 1 et 2. En fait dans la suite de l'exposé nous allons nous restreindre au cas quasilinéaire (1.4), le cas général de l'équation (1.1) se ramenant à un système quasilinéaire "diagonal" par dérivation suivant les procédés classiques : si u est une solution C^2 de (1.1) alors $v=(v_o,..,v_n)=(u,\partial_{x_1}u,\dots,\partial_{x_n}u)$

est solution de :

$$(1.5)\qquad \begin{cases} \partial_t v_k + \sum_{j=1}^{n} f_j(t,x,v)\partial_{x_j} v_k = g_k(t,x,v) \\ \text{pour} \quad k = o,\dots,n \end{cases}$$

avec $f_j = -\dfrac{\partial F}{\partial \xi_j}$, $j=1,\dots,n$, $g_o = F - \sum_{\ell=1}^{n} \xi_\ell \dfrac{\partial F}{\partial \xi_\ell}$

et $g_k = \dfrac{\partial F}{\partial x_k} + \xi_k \dfrac{\partial F}{\partial \zeta}$, $k=1,\dots,n$.

Nous terminons cette introduction en disant un mot des méthodes : comme dans [1] elles reposent sur une analyse du champ hamiltonien associé à l'équation. Elles sont donc strictement limitées aux équations du premier ordre. Le point le plus important consiste à donner une formule de représentation d'une solution à l'aide de sa donnée de Cauchy, formule (2.11) ci-dessous. L'unicité en résulte immédiatement. Cette formule est d'ailleurs copie conforme de celle donnée par Baouendi-Trèves [3] dans le cas linéaire, et qui sert à ces auteurs à établir le théorème d'approximation. Ici aussi, cette formule ou plutôt sa version plus générale (2.10), est l'ingrédient essentiel pour la preuve du théorème 2, la non linéarité compliquant cependant la technique des démonstrations.

§ 2. UNICITE.

Nous nous intéressons donc à l'équation (1.4). Introduisons d'abord quelques notations : au voisinage de (o,x^o,ζ^o,ξ^o) dans $\mathbb{C}^{2n+2}$ on définit les champs (hamiltoniens) :

$$(2.1)\qquad \mathcal{L}_o = \partial_t + \sum_{j=1}^{n} f_j(t,x,\zeta)\, \partial_{x_j} + g(t,x,\zeta)\, \partial_\zeta$$

$$(2.2)\qquad \mathcal{L} = \mathcal{L}_o + \sum_{k=1}^{n} g_k(t,x,\zeta,\xi)\, \partial_{\xi_k}$$

avec $g_k(t,x,\zeta,\xi) = \dfrac{\partial g}{\partial x_k} + \dfrac{\partial g}{\partial \zeta} . \xi_k - \sum_{\ell=1}^{n} \left(\dfrac{\partial f_\ell}{\partial x_k} + \xi_k \dfrac{\partial f_\ell}{\partial \zeta}\right) \xi_\ell$.

Enfin on introduit l'opérateur :

$$(2.3)\qquad M = \mathcal{L} + \sum_{\ell=1}^{n} \left(\frac{\partial f_\ell}{\partial x_\ell} + \xi_\ell \frac{\partial f_\ell}{\partial \zeta}\right) .$$

Si u est une fonction de classe C^1 au voisinage de (o,x^o) avec $u(o,x^o) = \zeta^o$ et $d_x u(o,x^o) = \xi^o$ et si $G(t,x,\zeta,\xi)$ est une fonction holomorphe au voisinage de (o,x^o,ζ^o,ξ^o) , on convient de noter :

(2.4) $$\widetilde{G}(t,x) = G(t,x,u(t,x)\ , d_x u(t,x)) \ .$$

Par vérification directe, on a :

<u>Lemme 1</u> : si u est une solution C^2 de (1.4) et si G est une solution holomorphe de $G = 0$, alors :

(2.5) $$\frac{\partial}{\partial t}\widetilde{G} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_\ell}(\widetilde{f}_\ell\ \widetilde{G}) = 0$$

Lorsque u est une solution C^1 de (1.4), alors $\widetilde{G}$ est seulement continu et (2.5) a lieu au sens faible. Plus précisément, disons que u est définie sur $[o,T]\times\overline{\omega}$, que $(u,d_x u)$ prend ses valeurs dans W et que G est homolorphe sur un voisinage de $[o,T]\times\overline{\omega}\times\overline{W}$. Alors :

<u>Lemme 2</u> : pour tout $X \in C_o^\infty(\omega)$, tous $t,t' \in [o,T]$ on a :

$$\int(\widetilde{G}(t,x) - G(t',x))\chi(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_{t'}^{t} \int \widetilde{f}_j(\tau,x)\widetilde{G}(\tau,x)\frac{\partial\chi}{\partial x_j}(x)\,dx\,d\tau$$

Nous construisons maintenant des solutions de $MG = 0$, et pour cela nous résolvons d'abord par le théorème de Cauchy Kowalewski :

(2.6) $$\begin{cases} \mathcal{L}_o(t,x,\zeta,\partial_t,\partial_x,\partial_\zeta)\ Z_j(s,t,x,\zeta) = 0 \\ Z_j\big|_{t=s} = x_j \end{cases}$$

(2.7) $$\begin{cases} \mathcal{L}_o(t,x,\zeta,\partial_t,\partial_x,\partial_\zeta)U(s,t,x,\zeta) = 0 \\ U\big|_{t=s} = \zeta \end{cases}$$

Notons $J_{k,\ell}(s,t,x,\zeta,\xi) = \dfrac{\partial Z_\ell}{\partial x_k} + \xi_k\,\dfrac{\partial Z_\ell}{\partial \zeta}$ et

$J = \det(J_{k,\ell})$. Alors on a :

(2.8)
$$\begin{cases} \mathcal{M}(t,x,\zeta.\xi,\partial_t,\partial_x,\partial_\xi.\partial_\zeta)J = 0 \\ J\Big|_{t=s} = 1 \end{cases}$$

On définit maintenant :

$$G_\lambda(s,y,t,x,\zeta,\xi) = (\frac{\lambda}{\Pi})^{n/2} U(s,t,x,\zeta)\ J(s,t,x,\zeta,\xi)$$
$$\exp\{-\lambda(Z(s,t,x,\zeta)-y)^2\}$$

qui est solution de :

(2.9)
$$\begin{cases} \mathcal{M}(t,x,\zeta,\xi,\partial_t,\partial_x,\partial_\zeta.\partial_\xi)\ G_\lambda = 0 \\ G_\lambda\Big|_{t=s} = (\frac{\lambda}{\Pi})^{n/2}\ e^{-\lambda(x-y)^2} \end{cases}$$

On peut choisir T, ω et W de sorte que les fonctions J et U soient définies sur un voisinage complexe de $[o,T]\times\overline{\omega}\times\overline{W}$. On applique alors le lemme 2 avec $G = G_\lambda$ et $\chi \in C_o^\infty(\omega)$ qui prend la valeur 1 sur $\omega' \subset\subset \omega$. On vérifie aisément que le terme de droite est uniformément en $O(e^{-\varepsilon\lambda})$ lorsque $y \in \omega_o \subset\subset \omega'$ et T assez petit. On a donc :

(2.10)
$$\int\{\widetilde{G}\ (s,y,t,x) - \widetilde{G}_\lambda(s,y,t',x)\}\ \chi(x)\ dx = O(e^{-\varepsilon\lambda})$$

où la notation (2.4) $\widetilde{G}_\lambda$ est utilisée de manière évidente en considérant λ, s et y comme des paramètres.

On choisit maintenant $s=t$, $t'=0$, et, compte tenu de (2.9), on obtient la formule de représentation suivante : pour $y \in \omega_o$, $s \in [o,T]$:

(2.11)
$$u(s,y) = \lim_{\lambda\to+\infty} \int \widetilde{G}_\lambda(s,y,o,x)\ \chi(x)dx$$

Mais, par définition, $\widetilde{G}_\lambda(s,y,o,x)$ ne fait intervenir que la trace de u en $t=o$, c'est-à-dire la donnée de Cauchy. L'unicité est alors immédiate.

§3. APPROXIMATION.

Considérons une solution de classe C^1 , u , de (1.4) (1.2) sur $[o,T]\times\omega$. , u prenant ses valeurs dans $\mathcal{U}$, et les fonctions Z_j , U et J vérifiant (2.6), (2.7), (2.8) étant définies pour s et t dans [o,T], x dans $\overline{\omega}$, ζ dans $\overline{\mathcal{U}}$.

On fixe $\chi\in C_o^\infty(\omega)$, vérifiant $\chi=1$ sur $\omega'\subset\subset\omega$ et, pour $\lambda>o$, on pose :

$$\phi_\lambda(y) = (\tfrac{\lambda}{\Pi})^n \int e^{-\lambda(x-y)^2}\,\phi(x)\;\chi(x)dx \tag{3.1}$$

Le problème de Cauchy pour (1.4) avec donnée initiale ϕ_λ possède une solution u_λ analytique, et ceci grâce au théorème de Cauchy-Kowalewski. Une difficulté majeure liée à la non linéarité, est que le domaine d'existence de cette solution dépend a priori très fortement de λ . En fait nous allons établir que ce n'est pas le cas et que u_λ converge vers u lorsque λ tend vers $+\infty$:

Théorème 3 : pour $\omega_o\subset\subset\omega'$, il existe $T_1>o$, tel que pour tout $\lambda\geq 1$ le problème de Cauchy pour (1.4) avec donnée initiale ϕ_λ , possède une solution analytique u_λ. définie sur $[o,T_1]\times\overline{\omega}_o$. En outre, lorsque λ tend vers $+\infty$, u_λ converge vers u dans $C^1([o,T_1]\times\overline{\omega}_o)$.

Suivant les méthodes classiques de résolution des équations du premier ordre, on cherche la solution u_λ en résolvant l'équation en ζ :

$$U(o,t,x,\zeta) = \phi_\lambda(Z(o,t,x,\zeta)) \tag{3.2}$$

Avec les notations du §2 on a $\phi_\lambda(y)=\int\widetilde{G}_\lambda(o,y,o,x)\;\chi(x)dx$ et en appliquant la formule (2.10), il vient :

$$\Phi_\lambda(Z(o,t,y,\zeta)) = (\tfrac{\lambda}{\Pi})^{n/2}\int e^{-\lambda[\widetilde{Z}(o,t,x)-Z(o,t,y,\zeta)]^2}\,. \tag{3.3}$$

$$.\;\widetilde{U}\,\widetilde{J}(o,t,x)\;\chi(x)\;dx + O(e^{-\varepsilon\lambda})\;.$$

Remarquant que :

$$\tilde{Z}(o,t,x) - Z(o,t,y,u(t,y)) = x-y + O(t)|x-y|$$

on obtient aisément l'estimation suivante :

<u>Lemme 3</u> : il existe T_1 et C_o tels que pour $y \in \bar{\omega}_o$, $t \in [o,T_1]$, et $\lambda \geq 1$ on a :

(3.4) $$|\phi_\lambda(Z(o,t,y,u(t,y)) - V(o,t,y,u(t,y))| \leq C_o \lambda^{-1/2}$$

Ecrivant maintenant que :

$$\tilde{Z}(o,t,x) - Z(o,t,y,\zeta) = x-y + O(t)|x-y| + O(|\zeta-u(t,y)|)$$

on montre aussi que :

<u>Lemme 4</u> : il existe $T_2 > o$ et M tels que pour $y \in \bar{\omega}_o$ $t \in [o,T_2]$, $|\zeta-u(t,y)| \leq 3\,C_o\,\lambda^{-1/2}$ et $\lambda \geq 1$ on a :

$$|(d_y\phi_\lambda)(Z(o,t,y,\zeta))| \leq M \; .$$

Notons $H(t,y,\zeta) = U(o,t,y,\zeta) - \phi_\lambda(Z(o,t,y,\zeta))$.

Alors on tire des lemmes 3 et 4 que :

(3.5) $$|H(t,y,u(t,y))| \leq C_o\,\lambda^{-1/2}$$

(3.6) $$\left|\frac{\partial H}{\partial \zeta}(t,y,\zeta)\right| \leq 1/2$$

pour $t \in [o,T_3]$, $y \in \bar{\omega}_o$, $|\zeta-u(t,y)| \leq 3\,C_o\,\lambda^{-1/2}$.

Il en résulte clairement que l'équation (3.2) $H=0$ possède une unique solution ζ dans la boule $|\zeta-u(t,y)| \leq 3\,C_o\,\lambda^{-1/2}$. On note $u_\lambda(t,y)$ cette solution, et on a :

(3.7) $$|u_\lambda(t,y) - u(t,y)| \leq 2C_o\,\lambda^{-1/2}$$

pour $t \in [o,T_3]$, $y \in \bar{\omega}_o$.

Différentiant (3.2), il est immédiat que u_λ est bien une solution de (1.4), et faisant $t=o$ dans (3.2) on obtient bien la condition initiale $u_\lambda\big|_{t=o} = \phi_\lambda$.

Maintenant (3.7) affirme la convergence de u_λ vers u dans $C^o([o,T_3]\times\bar{\omega}_o)$. La convergence des dérivées s'obtient de manière analogue, et le théorème 3 en résulte.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] S. BAOUENDI - C. GOULAOUIC - F. TREVES : Uniqueness in certain first order nonlinear complex Cauchy problems ; Comm. on Pure Appl. Math., 38 (1985), p. 109-123.

[2] S. BAOUENDI - L. ROTHSCHILD : Analytic Approximation for homogeneous solutions of invariant differential operators on Lie groups ; Colloque L. Sxhwartz, Asterisque, S.M.F., to appear.

[3] S. BAOUENDI - F. TREVES : A property of the functions and distributions annihilated by a locally integrable system of complex vector fields ; Ann. Math., 113 (1981), pp. 341-421.

[4] S. BAOUENDI - F. TREVES : Approximation of solutions of linear P.D.E. with analytic coefficients ; Duke Math. J. ; 50 (1983), pp. 285-301.

[5] E. HÖLMGREN : Über Systeme von linearen partiallen Differentialgleichugen. Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akad. Foh 58 (1901), pp. 91-105.

[6] B. MALGRANGE : Existence et approximation des solutions des équations aux dérivées partielles et des équations de convolution ; Ann. Inst. Fourier Grenoble, 6 (1955-56), pp. 271-355.

[7] G. METIVIER : Uniqueness and approximation of solutions of first order nonlinear equations ; Invent. Math., 1985 (à paraître).