Y. Meyer

# De la recherche pétrolière à la géométrie des espaces de Banach en passant par les paraproduits

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1985-1986), exp. n° 1, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A1_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tel. (6) 941.82.00 - Poste N°
Telex . ECOLEX 691596 F

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES 1985 - 1986

# DE LA RECHERCHE PETROLIERE A LA GEOMETRIE DES ESPACES DE BANACH EN PASSANT PAR LES PARAPRODUITS.

par Y. MEYER

Exposé n° I

22 Octobre 1985

## I. INTRODUCTION.

La transformation en ondelettes (wavelet transform) a été découverte et explicitée par J. Morlet et ses collaborateurs ([4] ,[7], [8]) comme une technique efficace d'analyse numérique permettant le traitement du signal ; il s'agit des signaux sismiques venant de la recherche pétrolière.

Comme souvent, on observe après coup que cette transformation était utilisée par A.P. Calderon et A. Torchinsky, dès 1977, pour l'étude des espaces de Hardy généralisés ([2]).

La transformation en ondelettes a pour objet de décomposer fonctions et distributions en "ondelettes". Une ondelette est une onde (ce qui évoque des oscillations ayant des fréquences bien définies) localisée (et nous nous heurtons aussitôt au principe d'incertitude de Heisenberg). Commençons par décrire la situation en dimension 1. Les ondelettes que nous allons utiliser sont à la fois localisées en la variable $t \in \mathbb{R}$ mais aussi en la variable de fréquence (notée $\xi$ ). Les ondelettes seront construites à partir d'une ondelette de base, notée $\psi(t)$. La fonction $\psi(t)$ est centrée en $t = 1/2$ , au sens que $\psi(1-t) = \psi(t)$ et la localisation en la variable $t$ de $\psi(t)$ est exprimée par le fait que $\psi(t)$ est à décroissance rapide à l'infini (on exigera la même décroissance rapide sur toutes les dérivées de $\psi$ ). En d'autres termes, $\psi(t)$ appartiendra à la classe $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ de Schwartz.

Décrivons maintenant la localisation en la variable de fréquence $\xi$ . On exigera que la transformée de Fourier $\hat{\psi}(\xi)$ de $\psi$ soit supportée par la réunion des deux intervalles $[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}]$ et $[\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$ . C'est à dire que $\psi(t)$ ne contiendra ni petites, ni grandes fréquences. Nous donnerons dans un instant une formule exacte pour $\psi$ .

La fonction $\psi$ est la "mère" des autres ondelettes qui sont déduites de $\psi$ par translation et changement d'échelle.

Les auteurs mentionnés ci-dessus utilisent toutes les translations (par $\tau \in \mathbb{R}$ ) et toutes les dilatations (par $h > 0$). La collection (normalisée) de leurs ondelettes est donc $h^{-1/2}\psi(\frac{t-\tau}{h}) = \psi_{\tau,h}(t)$. La transformation en ondelettes, au sens de A. Grossmann et J. Morlet est l'opérateur $W$ défini par $(Wf)(\tau,h) = \langle f,\psi_{\tau,h} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{\psi}_{\tau,h}(t)dt$. Cet opérateur transforme une fonction définie sur la droite réelle en une fonction définie sur le demi-plan supérieur.

Comment peut-on reconstituer $f$ ? En utilisant la "transformation en ondelettes inverse" (inverse wavelet transform). On a

$$(1.1) \qquad f(t) = c \int_{-\infty}^{\infty} \int_{0}^{\infty} (Wf)(\tau,h)\psi_{\tau,h}(t)d\tau \; \frac{dh}{h^2}$$

à condition que $\frac{1}{c} = \int_0^\infty |\psi(\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi} = \int_0^\infty |\psi(-\xi)|^2 \frac{d\xi}{\xi}$ .

L'identité (1.1) signifie que $f$ est une superposition d'ondelettes $\psi_{\tau,h}(t)$ et que les coefficients correspondants se calculent par la transformation $W$ .

Comme l'intuition le laisse pressentir, on calcule beaucoup trop de coefficents et l'on utilise trop d'ondelettes $\psi_{\tau,h}$ pour reconstruire $f$ . En d'autres termes l'information donnée par la connaissance de Wf sur le demi-plan supérieur est redondante.

L'objet de ce travail (réalisé en collaboration avec P.G. Lemarié) est de faire disparaître cette redondance en restreignant les couples $(\tau,h)$. La construction qui suit a pour point de départ des idées géométriques introduites par L. Carleson.

Tout d'abord, on introduit l'intervalle $I = [\tau,\tau+h]$ qui, en un sens un peu vague, donne la largeur et la position de la fonction $\psi_{\tau,h}$ . En d'autres termes, $\psi_{\tau,h}$ que l'on écrira désormais $\psi_I$ est localisée et ajustée à l'intervalle $I$ .

Pour faire disparaître la redondance, on remplace la collection de tous les intervalles par la sous-collection notée $\mathcal{I}$ , des intervalles dyadiques $I = [k2^{-j},(k+1)2^{-j}[$ où $k \in \mathbb{Z}$ , $j \in \mathbb{Z}$ .

On a donc $\psi_I(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t-k)$ et l'on demande que l'on ait $f(t) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \lambda_I\psi_I(t)$ lorsque les coefficients $\lambda_I$ sont donnés par $\lambda_I = \langle f,\psi_I \rangle$ . On veut, de plus, éliminer la redondance. Si, en particulier, $f = \psi_J$ où $J \in \mathcal{I}$ , l'absence de redondance implique $\langle \psi_J , \psi_I \rangle = \delta_{I,J}$ (symbole de Kronecker).

Finalement la collection des $\psi_I$ , $I \in \mathcal{I}$ , doit être une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$. Voici exprimée notre première exigence. La seconde est une exigence naturelle en analyse numérique. On demande que si $f(t)$ est très régulière le nombre de coefficients $\lambda_I$ à calculer soit "petit" (c'est à dire que $\lambda_I$ décroisse très rapidement). En d'autres termes la régularité de $f$ doit "accélérer la convergence". Cela n'est évidemment pas le cas pour une autre base hilbertienne (qui ressemble à la collection des $\psi_I$) le système de Haar $h_I$ (on a $h_I(t) = 2^{j/2}h(2^j t-k)$ où $h(t) = 1$ si $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ , $-1$ si $1/2 \leqslant t < 1$

et 0 ailleurs).

Reste à construire la fonction $\psi$ dont l'existence est loin d'être évidente.

## II. ENONCE DU THEOREME FONDAMENTAL.

Nous commençons par construire des fonctions spéciales d'une variable réelle.

Nous partons d'une fonction impaire $\theta(t)$, indéfiniment dérivable, égale à $\frac{\pi}{4}$ si $t \geqslant \frac{\pi}{3}$ (et donc à $-\frac{\pi}{4}$ si $t \leqslant -\frac{\pi}{3}$). Le choix de $\theta(t)$ est, par ailleurs, arbitraire mais les valeurs numériques utilisées ($\pi/3$, $\pi/4$ etc...) ne peuvent être modifiées. On définit la fonction paire $\alpha(t)$ par $\alpha(t) = \frac{\pi}{4} + \theta(t-\pi)$ si $\frac{2\pi}{3} \leqslant t \leqslant \frac{4\pi}{3}$ et $\alpha(2t) = \frac{\pi}{2} - \alpha(t)$ pour ces mêmes valeurs de $t$. On impose que $\alpha(t) = 0$ pour $0 \leqslant t \leqslant \frac{2\pi}{3}$ ou $t \geqslant \frac{8\pi}{3}$. La fonction ainsi définie est indéfiniment dérivable. Finalement $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ est déterminée grâce à sa transformée de Fourier

$$\psi(\xi) = e^{-i\xi/2} \sin\alpha(\xi) . \tag{2.1}$$

On a donc

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left[(t - \tfrac{1}{2})\xi\right] \sin\alpha(\xi)d\xi . \tag{2.2}$$

Comme me l'a fait remarquer J. Morlet, on peut également partir d'une fonction impaire $\beta(t)$ avec $\beta(t) = \alpha(t)$ si $t \geqslant 0$ et construire $\psi$ par

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \sin\left[(t - \tfrac{1}{2})\xi\right] \sin\alpha(\xi)d\xi . \tag{2.3}$$

Les théorèmes qui suivent ne dépendent pas du choix adopté pour $\psi$. Rappelons que $\mathcal{I}$ est la collection de tous les intervalles dyadiques $I = [k2^{-j}, (k+1)2^{-j}[$ ($j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$) et que $\psi_I(t) = 2^{j/2}\psi(2^j t-k)$.

Théorème 1. La collection des ondelettes $\psi_I(t)$ est une base hilbertienne de $L^2(\mathbb{R})$.

En fait l'identité fondamentale

$$f(t) = \sum_{I\in\mathcal{I}} \lambda_I\psi_I(t) \quad \text{avec} \quad \lambda_I = \langle f,\psi_I \rangle \tag{2.4}$$

fonctionne dans beaucoup d'autres cas.

Par exemple, nous noterons $S'_o(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R})$ le sous-espace des distributions tempérées qui tendent (en moyenne) vers 0 à l'infini. Cela signifie que $\lim\limits_{T\uparrow+\infty} < S,\varphi_T > = 0$ pour $\varphi_T(x) = \frac{1}{T}\ \varphi(\frac{x}{T})$, $\varphi \in S(\mathbb{R})$. Alors si $f \in S'_o(\mathbb{R})$, les coefficients $\lambda_I$ se calculent encore par $\lambda_I = < f,\psi_I >$ et (2.4) est encore satisfaite ; la convergence a lieu au sens de la topologie $\sigma(S'_o\ ,\ S_o)$ où $S_o \subset S(\mathbb{R})$ est l'ensemble des fonctions dont tous les moments sont nuls.

Un contre-exemple très simple montre le bien fondé de la définition de $S'_o$. Si $f = 1$, alors $\lambda_I = 0$ pour tout $I$ et (2.4) conduirait à $1 = 0$.

En revanche les espaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$, sont inclus dans $S'_o(\mathbb{R})$. L'identité (2.4) est particulièrement frappante : la suite $\psi_I(t)$ est une base inconditionnelle de $L^p(\mathbb{R})$, $1 < p < +\infty$. Rappelons la définition de cette notion. Soit $B$ un espace de Banach et soit $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $B$. Alors $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une base inconditionnelle si tout $x \in B$ s'écrit, de façon unique, $x = \sum\limits_{o}^{\infty} \alpha_k\ e_k$, cette série étant une famille sommable (c'est à dire qu'elle converge vers $x$ et que cette convergence n'est pas altérée par une permutation arbitraire des indices).

Sur le plan numérique, cela signifie que la condition portant sur les suites $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de coefficients et assurant l'appartenance à $B$ de la somme de la série $\sum\limits_{o}^{\infty} \alpha_k\ e_k$ ne concerne, en fait, que la suite des modules $|\alpha_k|$, $k \in \mathbb{N}$, et qu'étant satisfaite pour une telle suite, elle l'est automatiquement pour toute autre suite $\beta_k$ telle que $|\beta_k| \leqslant |\alpha_k|$, $k \in \mathbb{N}$.

Dans le cas de $L^p(\mathbb{R})$ la condition est explicite et s'écrit $(\sum\limits_{I\in\mathcal{I}} |\alpha_I|^2 \psi_I^2(x))^{1/2} \in L^p(\mathbb{R})$. La condition correspondante, écrite pour $p = 1$, caractérise l'espace $\mathcal{H}^1$ de Stein et Weiss.

Plutôt que de continuer la description des espaces fonctionnels en termes de coefficients d'ondelettes, nous allons reprendre toute cette discussion en dimension quelconque.

On définit $\varphi \in S(\mathbb{R})$ par sa transformée de Fourier $\hat{\varphi}(\xi)$ : $\hat{\varphi}(\xi) = \cos\alpha(\xi)$ si $|\xi| \leqslant \frac{4\pi}{3}$ et $\hat{\varphi}(\xi) = 0$ sinon.

Désignons par $E$ l'ensemble des $2^n-1$ suites $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ de 0 ou de 1, la suite $(0,0,\ldots,0)$ étant exceptée. Si $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ appartient à $E$, on forme $\psi^{(\varepsilon)}(x) = \psi^{(\varepsilon_1)}(x_1)\ldots\psi^{(\varepsilon_n)}(x_n)$ où $\psi^{(o)} = \varphi$, $\psi^{(1)} = \psi$. Cette construction est semblable à celle du système de Haar en plusieurs dimensions. La fonction qui joue le rôle de $\varphi$ est la fonction indicatrice de $[0,1]$ tandis que celle qui joue le rôle de $\psi$ est la fonction h présentée ci-dessus.

On désigne par $\mathcal{Q}$ la collection de tous les cubes dyadiques Q ; ils sont définis par $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}^n$ et la condition $2^j x - k \in [0,1]^n$. Finalement, si $\varepsilon \in E$ et $Q \in \mathcal{Q}$, on pose

$$\psi_Q^{(\varepsilon)}(x) = 2^{nj/2}\psi^{(\varepsilon)}(2^j x-k) =$$

$$2^{nj/2}\psi^{(\varepsilon_1)}(2^j x_1-k_1)\dots\psi^{(\varepsilon_n)}(2^j x_n-k_n) .$$

Théorème 2. <u>La collection des ondelettes</u> $\psi_Q^{(\varepsilon)}(x)$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, <u>est une base hilbertienne de</u> $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Nous allons maintenant donner les caractérisations des espaces fonctionnels usuels par les coefficients d'ondelettes c'est à dire les coefficients

$$\lambda(Q,\varepsilon) = \langle S,\psi_Q^{(\varepsilon)} \rangle$$

où $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

## III. CARACTERISATION DES ESPACES FONCTIONNELS USUELS.

Commençons par les espaces $L^p(\mathbb{R}^n;dx)$ où $1 < p < +\infty$. On a $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si

$$f(x) = \sum_{\varepsilon\in E}\sum_{Q\in\mathcal{Q}} \alpha(Q,\varepsilon)\psi_Q^{(\varepsilon)}(x) \quad \text{où}$$

$$\Big(\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{Q\in\mathcal{Q}} |\alpha(Q,\varepsilon)|^2|\psi_Q^{(\varepsilon)}(x)|^2\Big)^{1/2} \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

La collection des ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est donc une base inconditionnelle de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Mais le système de Haar avait déjà cette propriété. Là où nos ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ deviennent plus performantes que le système de Haar, c'est dans l'étude de l'espace de John et Nirenberg $BMO(\mathbb{R}^n)$ et de son pré-dual $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$.

La "condition de Carleson" ([3])

$$\sum_{\varepsilon\in E}\sum_{Q\subset R} |\alpha(Q,\varepsilon)|^2 \leqslant C|R| \tag{3.1}$$

écrite pour tout cube dyadique R et tous les sous-cubes $Q \subset R$ caractérise l'espace $BMO(\mathbb{R}^n)$. Puisque la même condition écrite pour les coefficients dans le système de Haar caractérise la version dyadique de BMO , l'isométrie $U$ de $L^2(\mathbb{R}^n)$ définie par $U(h_Q^{(\varepsilon)}) = \psi_Q^{(\varepsilon)}$ , $\varepsilon \in E$ , $Q \in \mathcal{Q}$ , s'étend en un isomorphisme entre BMO et sa version dyadique. Il en résulte que $U$ se prolonge aussi en un isomorphisme entre $\mathcal{H}^1(\mathbb{R}^n)$ et sa version dyadique (théorème de Maurey ([11])).

Passons aux espaces de Sobolev, notés $H^s(\mathbb{R}^n)$ , $s \in \mathbb{R}$ . Alors $f$ appartient à $H^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $\sum_{\varepsilon\in E} \sum_{Q\in\mathcal{Q}} |\alpha(Q,\varepsilon)|^2(1 + 4^{js}) < +\infty$ .

En d'autres termes, la collection des $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ est une base inconditionnelle de l'espace de Hilbert $H^s(\mathbb{R}^n)$ . Observons qu'une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est une base inconditionnelle de $\mathcal{H}$ si et seulement si l'on peut trouver deux constantes $C_1$ et $C_2$ telles que l'on ait

$$C_1\Big(\sum_0^\infty|\alpha_k|^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big\|\sum_0^\infty \alpha_k e_k\Big\| \leqslant C_2\Big(\sum_0^\infty|\alpha_k|^2\Big)^{1/2} ,$$

et si la suite des $e_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , est totale dans $\mathcal{H}$ . Il existe alors une suite bi-orthogonale $f_k$ , $k \in \mathbb{N}$ , d'éléments de $\mathcal{H}$ . On a $< e_j|f_k > = \delta_{j,k}$ et les coefficients $\alpha_k$ de $x = \sum_0^\infty \alpha_k e_k$ sont donc donnés par $\alpha_k = < x|f_k >$ .

L'espace (homogène) $C^r(\mathbb{R}^n)$ est définit comme suit. Si $0 < r < 1$ , alors $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si l'on peut trouver une constante $C$ telle que $|f(x)-f(y)| \leqslant C|x-y|^r$ . Si $r = 1$ , on abandonne l'espace $C^1$ usuel au profit de la classe de Zygmund définie par la condition $|f(x+h) + f(x-h)-2f(x)|\leqslant C|h|$ , $x \in \mathbb{R}^n$ , $h \in \mathbb{R}^n$ .

Enfin si $r = m + s$ où $m \in \mathbb{N}$ et $0 < s \leqslant 1$ , on écrira $f \in C^r(\mathbb{R}^n)$ si (et seulement si) $\partial^\alpha f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ pour tous les $\alpha \in \mathbb{N}^n$ de longueur $|\alpha| = m$ . Alors $C^s(\mathbb{R}^n)$ est un espace de fonctions modulo les polynômes de degré $\leqslant [s]+1$ . On a $f \in C^s(\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $|< f,\psi_Q^{(\varepsilon)} >| \leqslant C2^{-nj/2}2^{-rj}$ pour tout $\varepsilon \in E$ et tout $Q \in \mathcal{Q}$ . Cela semble banal mais cette propriété, en défaut pour le système trigonométrique, permet immédiatement de construire des fonctions qui sont partout $C^r$ et nulle part $C^{r+\varepsilon}$ pour $\varepsilon > 0$ . Pour alléger, nous nous limiterons à la dimension un et au cas $0 < r < 1$ . On forme alors $f(t) = \sum_I \alpha_I\psi_I(t)$ où $|\alpha_I| = 2^{-j/2}2^{-rj}$ si $j \geqslant 0$ et $\alpha_I = 0$ sinon. Toutes ces séries convergent (au sens de la convergence uniforme sur tout $\mathbb{R}$) vers $f \in C^r$ . Si l'on avait $|f(t)-f(t_o)| \leqslant C|t-t_o|^{r+\varepsilon}$ pour un certain $t_o \in \mathbb{R}$ et un $\varepsilon > 0$ , on aurait $|\int f(t)\psi_I(t)dt| \leqslant C'2^{-j/2}2^{-(r+\varepsilon)j}$ lorsque $t_o \in I$ . Notre choix des $\alpha_I$ interdit une telle décroissance.

Si $|\alpha_I| = 2^{-3j/2}$ si $j \geq 0$ (et $\alpha_I = 0$ si $j < 0$), alors les sommes correspondantes appartiennent à la classe de Zygmund mais ne sont dérivables nulle part (sinon on aurait $\alpha_I = o(2^{-3j/2})$ lorsque $I$ contient le point de dérivabilité $t_o$ et que sa longueur tend vers 0 .

Plus généralement une distribution tempérée $f$ (modulo les polynômes) appartient à l'espace de Besov homogène $B_q^{s,p}$ si et seulement si $\alpha(k,j) = \sup_{\varepsilon \in E} |<f,\psi_Q^{(\varepsilon)}>|$ vérifie $(\sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (\alpha(k,j))^p)^{1/P} = \varepsilon_j 2^{-\mu j}$ où $\varepsilon_j \in \ell^q(\mathbb{Z})$ et où $\mu = s + n(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})$ ; la relation entre le couple $(j,k)$ et le cube $Q$ est $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \ ; \ 2^j x - k \in [0,1]^n\}$ .

IV. ALGEBRES D'OPERATEURS.

Rappelons d'abord la définition de l'algèbre $A \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ de P.G. Lemarié ([9],[10] , [12]). Un opérateur linéaire continu $T$ : $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ appartient à $A$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites.

(4.1) La restriction à l'ouvert $y \neq x$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ du noyau-distribution $K(x,y)$ de $T$ est une fonction $C^\infty$ vérifiant $|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C(\alpha,\beta)|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et tout $\beta \in \mathbb{N}^n$

(4.2) On a $T(x^\alpha) = 0$ (modulo les polynômes de degré $\leq |\alpha|$) et de même on a $T^*(x^\alpha) = 0$ (modulo ces mêmes polynômes pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ .

Les opérateurs $T \in A$ sont caractérisés par leurs matrices dans la base des ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ , $Q \in \mathcal{Q}$ , $\varepsilon \in E$ . Les conditions sur les coefficients

(4.3) $\gamma^{(\varepsilon,\varepsilon')}(Q,R) = < T(\psi_Q^{(\varepsilon)}), \ \psi_R^{(\varepsilon')} >$ , $Q \in \mathcal{Q}$ , $R \in \mathcal{Q}$ , sont symétriques en $(Q,R)$. Appelons $\delta(Q,R)$ le plus entier $m$ tel que $mQ \supset R$ et $mR \supset Q$ ($mQ$ désigne le cube ayant même centre que $Q$ et pour côté, $m$ fois celui de $Q$).
Alors les conditions sont tout simplement

$$|\gamma^{(\varepsilon,\varepsilon')}(Q,R)| \leq C(q)(\delta(Q,R))^{-q} \tag{4.4}$$

pour tout entier $q \geq 1$ .

Munissons l'ensemble fini $E$ de la distance triviale (deux points distincts sont à la distance 1), notée $d_o$ , et définissons sur l'ensemble $\Omega = \mathcal{Q} \times E$ la distance $d$ par

$$d(\omega,\omega') = \log\delta(Q,Q') + d_o(\varepsilon,\varepsilon')$$

lorsque $\omega = (Q,\varepsilon)$ et $\omega' = (Q',\varepsilon')$.

Appelons $\mathcal{G}$ le groupe de toutes les permutations $\pi : \Omega \to \Omega$ telles que $\sup\limits_{\omega\in\Omega} d(\omega,\pi(\omega))$ soit fini. Désignons enfin par $U \subset \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n), L^2(\mathbb{R}^n))$ le groupe des isomorphismes unitaires de $L^2(\mathbb{R}^n)$ et par $\rho : \mathcal{G} \to U$ la représentation définie par $\rho(\pi)[\psi_\omega] = \psi_{\pi(\omega)}$. Nous avons écrit $\psi_\omega$ au lieu de $\psi_Q^{(\varepsilon)}$.

On vérifie immédiatement que $\rho(\mathcal{G})$ est inclus dans l'algèbre $\mathcal{A}$ de Lemarié. Désignons par $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$ l'idéal des opérateurs régularisants : $T \in \mathcal{I}$ s'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, soit continu de l'espace de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{s+\varepsilon}$.

En construisant deux permutations particulières de $\mathcal{G}$, on démontre que l'algèbre quotient $\mathcal{A}/\mathcal{I}$ contient le groupe libre à deux éléments. Il n'existe donc aucun calcul symbolique dans $\mathcal{A}$ au sens usuel.

Naturellement l'algèbre $\mathcal{A}$ contient des sous-algèbres plus simples comme l'algèbre $\mathcal{B}$ des opérateurs qui se diagonalisent dans la base des $\psi_\omega$, $\omega \in \Omega$.

Venons en à la relation entre opérateurs et bases inconditionnelles. Soit $B$ un espace de Banach fonctionnel. Cela signifie que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset B \subset \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ et que les deux injections sont continues. Dire que la collection des $\psi_Q^{(\varepsilon)}$, $\varepsilon \in E$, $Q \in \mathcal{Q}$, est une base inconditionnelle de $B$ revient à dire que $\mathcal{S}_o$ est dense dans $B$ et que tous les opérateurs $T \in \mathcal{B}$ se prolongent en des opérateurs linéaires continus de $B$ dans $B$.
Rappelons que $\mathcal{S}_o \subset \mathcal{S}$ est le sous-espace des fonctions $f$ dont tous les moments sont nuls. Il est, par ailleurs, facile de vérifier que les opérateurs $T \in \mathcal{B}$ sont continus de $\mathcal{S}_o$ dans $\mathcal{S}_o$.

Les opérateurs de l'algèbre $\mathcal{A}$ de Lemarié sont continus sur les espaces fonctionnels classiques mentionnés ci-dessus et cela fournit une nouvelle démonstration du fait que les $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ forment une base inconditionnelle de ces espaces.

Nous allons donner un exemple familier aux auditeurs de ce séminaire d'un opérateur $T \in \mathcal{B}$. Soit $a(x)$ une fonction bornée et de classe $C^r$, définie sur $\mathbb{R}^n$. On suppose d'abord $0 < r < 1$ et l'on appelle $\pi(a,f)$ le paraproduit entre $a$ et $f$. Alors l'opérateur $\pi(a,f)$ se décompose en $T_a + R_a$ où $R_a$ est $r$-régularisant sur toute l'échelle des espaces de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, tandis que $T_a$ est diagonalisé dans la base des ondelettes $\psi_Q^{(\varepsilon)}$ ; la valeur propre correspondante ne dépend pas de $\varepsilon$ et vaut $a(2^{-j}k)$ lorsque $Q$ est défini par $2^jx-k \in [0,1]^n$ . C'est à dire que la paramultiplication est donnée par $a(2^{-j}k)\psi_Q^{(\varepsilon)}(x)$ tandis que la multiplication ordinaire est donnée par $a(x)\psi_Q^{(\varepsilon)}(x)$. Malgré les apparences, la différence n'est pas un opérateur r-régularisant lorsque $a(x)$ appartient à $C^r$ .

## V. LE CAS PERIODIQUE.

Nous allons, pour finir, donner la version locale des résultats précédents en nous restreignant à l'analyse des fonctions $f(x_1,\dots,x_n)$ périodiques de période 1 en chaque variable. Si $j \geqslant 0$ et si $r = (r_1,\dots,r_n)$ avec $0 \leqslant r_1 < 2^j,\dots,0 \leqslant r_n < 2^j$ , on pose

$$(5.1) \qquad \psi_{j,r}(x) = 2^{nj/2} \sum_{k\in\mathbb{Z}^n} \psi(2^jx + 2^jk - r).$$

On observe que $\psi_{j,r}(x)$ est périodique de période 1 en chaque variable, est indéfiniment dérivable et que

$$(5.2) \qquad \psi_{j,r}(x) = \theta_j(x-2^{-j}r)$$

où, si $|x_j| \leqslant \ell < 1$ , $1 \leqslant j \leqslant n$ ,

$$(5.3) \qquad \theta_j(x) = 2^{nj/2}\psi(2^jx) + \rho_j(x) \quad \text{où}$$

$\rho_j(x)$ et toutes ses dérivées convergent vers $0$ plus rapidement que toutes les puissances de $2^{-j}$ sur le cube $[-\ell,\ell]^n$ .

Cela signifie que les ondelettes périodisées sont asymptotiquement des ondelettes tronquées.

Théorème 3. La suite formée de la fonction 1 et des fonctions $\psi_{j,r}(x)$ , $j \geqslant 0$ , $0 \leqslant r_1 < 2^j,\dots,0 \leqslant r_n < 2^j$ , est une base hilbertienne de $L^2([0,1]^n)$ et est une base inconditionnelle des espaces $L^p([0,1]^n)$, $1 < p < +\infty$ , de l'espace de Hardy périodisé $\mathcal{H}^1$ à la Stein-Weiss, des espaces de Besov...

Le cas particulier de la dimension 1 vaut la peine d'être explicité. On indexe la suite $\psi_{j,r}(t)$ en une suite $\widetilde{\psi}_m(t)$ $(m \in \mathbb{N})$ en posant $\widetilde{\psi}_o(t) = 1$ , $\widetilde{\psi}_1(t) = \psi_{o,o}(t),\dots,\widetilde{\psi}_m(t) = \psi_{j,r}(t)$ si $m = 2^j+r$ etc... Alors, outre les propriétés décrites par le théorème 3, on a le fait suivant : la suite $\widetilde{\psi}_m(t)$, $m \in \mathbb{N}$ , est une base de l'espace des fonctions continues et périodiques de période 1 ; c'est aussi une base des fonctions de classe $C^1$ (au sens usuel) et périodiques de période 1 etc...

BIBLIOGRAPHIE.

[1] J.M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Ann. Sc. E.N.S. 14 (1981) 209-246.

[2] A.P. Calderon, A. Torchinsky, Parabolic maximal functions associated with a distribution, Advances in Mathematics, 16, 1, (1975) 1-64 et 24, 2, (1977), 101-171.

[3] L. Carleson, An explicit unconditional basis in $H^1$, Bull. des Sciences Math., 104, (1980) 405-416.

[4] I. Daubechies, A. Grossmann, Y. Meyer, Painless non-orthogonal expansions (à paraître).

[5] G. David, J.L. Journé, A boundedness criterion for generalized Calderon-Zygmund operators, Annals of Mathematics, 120 (1984) 371-397.

[6] M. Frazier, B. Jawerth, Decomposition of Besov spaces (Dept. of Mathematics, Washington University, St. Louis MO 63130 U.S.A.).

[7] P. Goupillaud, A. Grossmann, J. Morlet, Cycle octave and related transforms in seismic signal analysis, Geoexploration 23 (1984/1985) Elsevier Science Publishers, B.V. Amsterdam 85-102.

[8] A. Grossmann, and J. Morlet, Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape SIAM J. Math. Anal. 15, 4, (1984).

[9] P.G. Lemarié, Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières (à paraître aux Annales de l'Institut Fourier).

[10] P.G. Lemarié, Thèse (c/o Mme Dumas, bâtiment 425, Faculté des Sciences, 91405 Orsay)

[11] B. Maurey, Isomorphismes entre espaces $H^1$, Acta Mathematica, 145, 1-2, (1980) 79-120.

[12] Y. Meyer, Real analysis and operator theory, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 43 (1985) 219-235.

[13] Y. Meyer, La transformation en ondelettes et les nouveaux paraproduits (à paraître aux Actes du Colloque d'Analyse du CEREMADE, Paris-Dauphine).

[14] P. Wojtaszczyk, The Franklin system is an unconditional basis in $H^1$, Arkiv för Matematik, 20, 293-300.

* * *