

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. SCHAPIRA

Front d'onde analytique au bord II

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1985-1986), exp. n° 13,
p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1985-1986____A13_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1985-1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES 1985 - 1986

FRONT D'ONDE ANALYTIQUE AU BORD II *

par P. SCHAPIRA

* Ce texte développe et améliore, avec des notations légèrement différentes, les résultats de la Note [20]

Abstract : Let M be a real analytic manifold, X a complexification of M , Ω an open subset of M . Using the functor μ_{hom} of [10] we construct a sheaf $C_{\Omega|X}$ on T^*X , which extends the sheaf C_M of Sato's microfunctions above Ω , and permits us to define a new analytic wave front set $SS_{\Omega}(u)$, when $u \in B_M(\Omega)$ is a hyperfunction on Ω . If M is a system of microdifferential equations and $u \in \text{Ext}_{\mathbb{C}_X}^j(M, C_M)$ we also introduce $SS_{\Omega}^{M,j}(u)$, a closed subset of T^*X .

Let now N be a submanifold of M of codimension d , Y the complexification of N in X , and let ω be an open subset of N with $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$. Under a topological assumption on ω and Ω we show how to define for any sheaf F on M a morphism (in the derived category of sheaves on M) of "boundary values", $b : R\Gamma_{\Omega}(F)|_N \rightarrow R\Gamma_{\omega}(F) \otimes \omega_N|_M[d]$, and we apply this construction to the case where $F = R\mathcal{H}om_{D_X}(M, B_M)$. If Y is non characteristic for M , and M_Y denotes the induced system by M on Y , we obtain a morphism $R\mathcal{H}om_{D_X}(M, \Gamma_{\Omega}(B_M))|_N \rightarrow R\mathcal{H}om_{D_Y}(M_Y, \Gamma_{\omega}(B_N))$ and we prove that if ρ and ϖ denote the natural maps from $Y \times T^*X$ to T^*Y and T^*X respectively, one has the inclusion $SS_{\omega}^{M_Y,j}(b(u)) \subset \rho \varpi^{-1} SS_{\Omega}^{M,j}(u)$, with equality when $d = 1$, $\omega = N$. Finally we define the boundary value morphism in case Y is characteristic, but M is "regular" along Y .

§ I. MICROLOCALISATION.

Nous suivrons les notations de [10]. Soit X une variété réelle, $\pi : T^*X \rightarrow X$ son fibré cotangent, ω_X le faisceau d'orientation sur X . Si M est une sous-variété de X on note T_M^*X le fibré conormal à M dans X et $\omega_M|_X$ le faisceau d'orientation relative.

On note $D(X)$ la catégorie dérivée de la catégorie des faisceaux de groupes abéliens sur X , $D^+(X)$ (resp. $D^b(X)$) la sous-catégorie pleine formée des complexes à cohomologie bornée inférieurement (resp. bornée). On utilisera le bifoncteur μ_{hom} , de $D^b(X)^0 \times D^+(X)$ dans $D^+(T^*X)$, défini dans [10].

Si A est une partie localement fermé de X , on note \mathbb{Z}_A le faisceau sur X porté par A dont la restriction à A est le faisceau constant de fibre \mathbb{Z} , et si $F \in \text{Ob}(D^+(X))$, on pose $F_A = \mathbb{Z}_A \otimes^L F$. On posera aussi :

$$(1.1) \quad \mu_A(F) = \mu_{\text{hom}}(\mathbb{Z}_A, F) .$$

Rappelons que, X étant identifié à la section nulle de T^*X , on a $\mu_A(F)|_X \cong R\Gamma_A(F)$ et si A est une sous-variété fermée de X , $\mu_A(F)$ coïncide avec le microlocalisé de Sato de F le long de A (cf. [15]). Soit $SS(F)$ le micro-suppport de F (cf. [10]). On a :

$$(1.2) \quad SS(\mu_A(F)) \subset SS(Z_A) \cap SS(F)$$

et plus généralement :

$$(1.3) \quad SS(\mu_A(F)) \subset C(SS(F), SS(Z_A))$$

où $C(.,.)$ désigne le "cône normal" (cf. [10 ch1]).

Soit M une sous-variété fermée de X , Ω un ouvert de M , j l'inclusion $\Omega \hookrightarrow X$, \tilde{j} l'inclusion $\pi^{-1}(\Omega) \hookrightarrow T^*X$. On a un diagramme commutatif dans $D^+(T^*X)$:

$$(1.4) \quad \begin{array}{ccccccc} \pi^{-1} R\Gamma_M(F) = \pi^{-1} R\pi_* \mu_M(F) & \longrightarrow & \mu_M(F) & \longrightarrow & R\tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} \mu_M(F) \\ \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\ \pi^{-1} Rj_* j^{-1} R\Gamma_M(F) = \pi^{-1} R\pi_* \mu_\Omega(F) & \longrightarrow & \mu_\Omega(F) & \longrightarrow & Rj_* j^{-1} \mu_\Omega(F) \end{array}$$

§ II. PROBLEMES AUX LIMITES POUR LES FAISCEAUX.

Soit Ω un ouvert de X , $\bar{\Omega}$ son adhérence, $\partial\Omega = \bar{\Omega} \setminus \Omega$.

Définition 2.1 : Nous dirons que Ω est localement cohomologiquement trivial (en abrégé : lct) dans X si pour tout $x \in \partial\Omega$ on a :

$$(2.1) \quad \begin{cases} (R\Gamma_{\bar{\Omega}}(Z_X))_x = 0, \\ (R\Gamma_{\Omega}(Z_X))_x = \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Exemple 2.2 : Supposons que, localement sur X , Ω soit homéomorphe à un ouvert convexe d'un espace vectoriel. Alors Ω est lct dans X .

Soit $F \in \text{Ob}(D^b(X))$. On désigne par F^* son dual au sens des faisceaux, i.e :

$$(2.2) \quad F^* = R\mathcal{H}om(F, Z_X)$$

Si Ω est un ouvert lct dans X , on montre facilement que :

$$(2.3) \quad \begin{cases} \mathbb{Z}_{\Omega}^* & \simeq \mathbb{Z}_{\bar{\Omega}} \\ \mathbb{Z}_{\bar{\Omega}}^* & \simeq \mathbb{Z}_{\Omega} \end{cases}$$

Soit maintenant M une sous-variété fermée de X de codimension n , N une sous-variété fermée de M de codimension d . Nous aurons à considérer la situation suivante :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \Omega \text{ est ouvert et lct dans } M \\ \omega \text{ est ouvert et lct dans } N \text{ avec } \bar{\omega} \subset \bar{\Omega} . \end{cases}$$

Le morphisme de faisceaux sur X , $\mathbb{Z}_{\bar{\Omega}} \rightarrow \mathbb{Z}_{\bar{\omega}}$ définit alors par dualité un morphisme dans $D^b(X)$:

$$(2.5) \quad b : \mathbb{Z}_{\bar{\omega}} \longrightarrow \mathbb{Z}_{\bar{\Omega}} \otimes \omega_{N|M}[d] .$$

Si $F \in \text{Ob}(D^+(X))$ on en déduit le morphisme dans $D^+(T^*X)$:

$$(2.6) \quad \mu_{\bar{\Omega}}(F) \rightarrow \mu_{\bar{\omega}}(F) \otimes \omega_{N|M}[d]$$

qui induit sur la section nulle le morphisme :

$$(2.7) \quad R\Gamma_{\bar{\Omega}}(F) \rightarrow R\Gamma_{\bar{\omega}}(F) \otimes \omega_{N|M}[d] .$$

§ III. FAISCEAU $C_{\Omega|X}$ ET FRONTS D'ONDES ANALYTIQUES.

Soit maintenant M une variété analytique réelle de dimension n , X un complexifié de M , \mathcal{O}_X le faisceau des fonctions holomorphes sur X . Si A est une partie localement fermée de M nous poserons :

$$(3.1) \quad C_{A|X} = \mu_A(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[n]$$

si $A = M$, $C_{M|X} = C_M$ est le faisceau des microfonctions de Sato (cf. [15]). Si $A = N$ est une sous-variété analytique fermée de M , $C_{N|X}$ coïncide, à un facteur $\omega_{N|M}$ près, avec le faisceau du même nom de [15]. Si $A = \bar{M}^+$ est un demi-espace fermé à frontière analytique, le faisceau $C_{\bar{M}^+|X}$ a déjà été introduit, par une méthode différente, par Kataoka [11].

Supposons $M = \mathbb{R}^n$ et A est convexe et fermé. On a alors ([10 Cor559]) :

$$(3.2) \quad H^j(C_{A|X})(x_0, \zeta_0) = \varinjlim_{U, G} H_{U \cap (A+G)}^{j+n}(U; \mathcal{O}_X)$$

où U parcourt la famille des voisinages ouverts de x_0 dans $X = \mathbb{C}^n$, et G parcourt la famille des cônes convexes fermés de $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ dont le polaire est un voisinage de ζ_0 . Il résulte alors d'un théorème de Kashiwara (cf. [5p.276]) que $C_{A|X}$ est concentré en degré 0. Nous allons retrouver et préciser ce résultat.

Proposition 3.1. Soit A une partie fermée de M , et $\Omega = M \setminus A$. Supposons A localement difféomorphe à un convexe de \mathbb{R}^n . Alors :

- i) $C_{A|X}$ est concentré en degré 0.
- ii) Le morphisme $C_{A|X} \Big|_{T_M^* X} \rightarrow C_M \Big|_{T_M^* X}$ est injectif.
- iii) $C_{\Omega|X} \Big|_{T_M^* X}$ est concentré en degré 0.

Esquisse de démonstration. Par l'astuce de l'"adjonction d'une variable muette", on se ramène au cas où $A = A' \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$, et l'on travaille au voisinage de $p = (x_0; i\eta'_0, i\eta_n)$ avec $\eta_n > 0$.

Soit T^*X et T^*Y deux exemplaires de $T^*\mathbb{C}^n$ munis respectivement des coordonnées symplectiques (z, ζ) et (w, θ) . On posera $z = x + iy$, $\zeta = \xi + i\eta$, $w = u + iv$ et aussi $z = (z', z_n)$, $\zeta = (\zeta', \zeta_n)$, $w = (w', w_n)$.

On utilise la transformation canonique complexe $\phi : (z, \zeta) \mapsto (w, \theta)$ définie pour $\zeta_n \neq 0$ par :

$$(3.3) \quad \begin{cases} w_j = \zeta_j / \zeta_n - 2\sqrt{-1} z_j, & j < n \\ w_n = \langle z, \zeta / \zeta_n \rangle - \sqrt{-1} z'^2 \\ \theta_j = -z_j \zeta_n, & j < n \\ \theta_n = \zeta_n \end{cases}$$

où on a posé $z'^2 = \sum_{j=1}^{n-1} z_j^2$, $\langle z, \zeta \rangle = \sum_{j=1}^n z_j \zeta_j$.

Soit $S = \mathbb{R}^{n-1}$ muni des coordonnées (s) , et soit q_1 et q_2 les projections de $X \times S$ et $Y \times S$ sur X et Y respectivement. On peut considérer ϕ comme une transformation canonique entre $T^*(X \times S)$ et $T^*(Y \times S)$. Soit :

$$\tilde{M} = \{(z, s) \in X \times S; y = 0, x' = s\}$$

$$\tilde{N} = \{(w, s) \in Y \times S; \operatorname{Re} \langle w - w(s), \sqrt{-1}(-s, 1) \rangle \leq 0\}$$

avec $w(s) = (-2\sqrt{-1}s, -\sqrt{-1}s^2)$.

La transformation ϕ échange $T_{\tilde{M}}^*(X \times S)$ et $T_{\tilde{N}}^*(Y \times S)$ sur l'ouvert $\{\eta_n > 0\}$.

Posons :

$$G = \{w \in Y ; v_n \geq - (\frac{v'}{2})^2\}$$

$$G_s = \{w \in Y ; v_n \geq \langle v', s \rangle + s^2\}$$

$$G_A = \bigcup_{s \in A'} G_s .$$

Comme $Rq_{1*} \mathbb{Z}_{\tilde{M} \cap (X \times A)} = \mathbb{Z}_A$ et $Rq_{2*} \mathbb{Z}_{\tilde{N} \cap (Y \times A)} = \mathbb{Z}_{G_A}$ (sous l'hypothèse

que A est fermé et convexe), on obtient que si l'on quantifie ϕ en ϕ_K comme dans [10Ch.11] alors ϕ_K induit un isomorphisme dans $D^+(Y; \{\eta_n > 0\})$:

$$\phi_K(\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y ,$$

$$\phi_K(\mathbb{Z}_M) \simeq \mathbb{Z}_G [n-1],$$

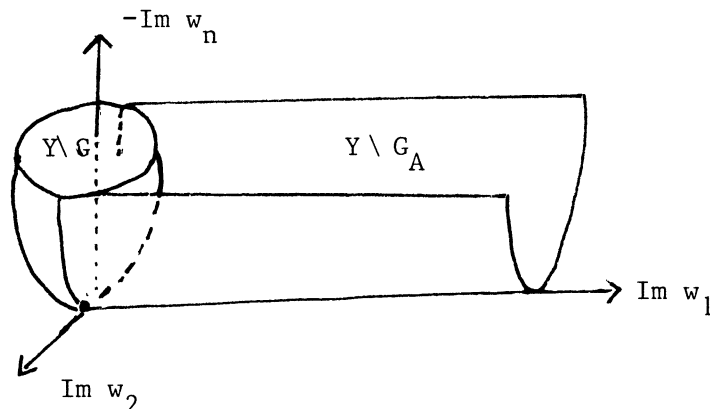
$$\phi_K(\mathbb{Z}_A) \simeq \mathbb{Z}_{G_A} [n-1] .$$

Les ouverts $Y \setminus G$ et $Y \setminus G_A$ étant pseudo-convexes on obtient :

$$(C_M)_p \simeq H_G^1(\mathcal{O}_Y)_{y_0}$$

$$(C_{A|X})_p \simeq H_{G_A}^1(\mathcal{O}_Y)_{y_0}$$

où $y_0 = \pi(\phi(p))$. Ceci achève la démonstration.



Exemple : $A = \{x \in \mathbb{R}^3 ; x_1 \geq 0\}$.

Remarque 3.2. Soit A_1 et A_2 deux fermés convexes de \mathbb{R}^n . On a un triangle distingué :

$$C_{A_1 \cap A_2|X} \rightarrow C_{A_1|X} \oplus C_{A_2|X} \rightarrow C_{A_1 \cup A_2|X} \rightarrow +1$$

En utilisant la transformation canonique précédente et le fait que l'enveloppe d'holomorphie de $\mathbb{C}^n \setminus (G_{A_1} \cup G_{A_2})$ est $\mathbb{C}^n \setminus G_{A_1 \cap A_2}$, on en conclut que la Proposition 3.1 iii) est encore valide avec $\Omega = M \setminus (A_1 \cup A_2)$. Il semble très vraisemblable qu'il en soit de même pour le complémentaire d'une réunion finie de convexes fermés de \mathbb{R}^n .

Conjecture 3.3. Pour toute partie localement fermée A de M , $C_{A|X} \Big|_{T_M^*X}$ est concentré en degré 0.

Soit Ω un ouvert de M , B_M le faisceau des hyperfonctions de Sato sur M (i.e. : $B_M = R\Gamma_M(\mathcal{O}_X) \otimes \omega_{M|X}[n]$). Soit j l'injection $\Omega \hookrightarrow M$, \tilde{j} l'injection $\pi^{-1}(\Omega) \hookrightarrow T^*X$. Du diagramme (1.4) on déduit le diagramme commutatif :

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccccc} & & \pi^{-1} j_* j^{-1} B_M & & \\ & \nearrow & \downarrow & \searrow & \\ \pi^{-1} B_M & \longrightarrow & H^0(C_{\Omega|X}) & \longrightarrow & \tilde{j}_* \tilde{j}^{-1} C_M \\ & \searrow & \uparrow & \nearrow & \\ & & C_M & & \end{array}$$

Remarquons que le faisceau $H^0(C_{\Omega|X})$ est porté par T_M^*X . Du diagramme précédent on déduit les flèches :

$$\alpha : j_* j^{-1} B_M \rightarrow \pi_* H^0(C_{\Omega|X})$$

$$\beta : C_M \rightarrow H^0(C_{\Omega|X})$$

Définition 3.4. Si $u \in j_* j^{-1} B_M$ (resp. $u \in C_M$) on pose :

$$SS_{\Omega}(u) = \text{supp}(\alpha(u))$$

(resp : $\text{supp}(\beta(u))$).

L'ensemble $SS_{\Omega}(u)$ est donc un fermé conique de T_M^*X . On a :

$$(3.4) \quad SS_{\Omega}(u) \supset \overline{SS(u|_{\Omega})}$$

où $\overline{SS(u|_{\Omega})}$ désigne l'adhérence du front d'onde analytique de u au-dessus de Ω .

Proposition 3.5. Supposons que Ω soit à frontière analytique réelle. Soit $u \in B_M(\Omega)$. Alors $SS_{\Omega}(u)$ est contenu dans la section nulle si et seulement si u est analytique dans Ω et se prolonge holomorphiquement à un ouvert $\tilde{\Omega}$ de X tel que le cône normal (cf. [10]) $C_{\partial\Omega}(\tilde{\Omega})$ soit un voisinage de $C_{\partial\Omega}(\Omega)$.

Dans un système de coordonnées locales tel que $\Omega = \{x; x_1 > 0\}$, cela signifie que u se prolonge (localement sur $\partial\Omega$) à un ouvert $\tilde{\Omega} = \{z; x_1 > c|\text{Im}z|\}$, $c > 0$. La démonstration de cette Proposition utilise [10, Prop. 2.3.2], utilisant le morphisme (2.6), avec $F = \mathcal{O}_X$, on obtient aussi :

Proposition 3.7. Soit $\tilde{\Omega}$ un ouvert de X avec $\bar{\Omega} \subset \tilde{\Omega}$. On suppose $\tilde{\Omega}$ (resp. Ω) lct dans X (resp. M). Soit $f \in \mathcal{O}(\tilde{\Omega})$, $b(f) \in \Gamma(\Omega; B_M)$ sa valeur au bord. Alors :

$$SS_{\Omega}(b(f)) \subset T_M^*X \cap SS(\mathbb{Z}_{\tilde{\Omega}})$$

Remarquons que Delort et Lebeau [2] ont obtenu un résultat de ce type (avec $\Omega = M$) dans la situation évidemment plus difficile où Ω n'est pas nécessairement lct, mais f est C^1 sur $\bar{\Omega}$.

Soit maintenant M un module cohérent sur l'anneau \mathcal{D}_X (resp. \mathcal{E}_X) des opérateurs différentiels (resp. microdifférentiels) d'ordre fini (cf. [15] ou [1], [19] pour une introduction à cette théorie). On a des flèches naturelles :

$$\begin{aligned} \alpha &: \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(M, j_* j^{-1} B_M) \rightarrow \pi_* H^j(\mathcal{R}Hom_{\pi^{-1}\mathcal{D}_X}(\pi^{-1} M, C_{\Omega|X})) \\ \beta &: \mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_X}^j(M, C_M) \rightarrow H^j(\mathcal{R}Hom_{\mathcal{E}_X}(M, C_{\Omega|X})) \end{aligned}$$

Définition 3.8. Si $u \in \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(M, j_* j^{-1} B_M)$ (resp. $\mathcal{E}xt_{\mathcal{E}_X}^j(M, C_M)$) on pose :

$$SS_{\Omega}^{M,j}(u) = \text{supp}(\alpha(u)) \quad (\text{resp. } \text{supp}(\beta(u))).$$

Remarque 3.9. a) Si $u \in \mathcal{E}xt_{\mathcal{D}_X}^j(M, j_* j^{-1} B_M)$, alors $SS_{\Omega}^{M,j}(u)$ n'est pas nécessairement porté par T_M^*X . Par exemple si $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X \cdot P$, $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0\}$ et si $u \in B_M(\Omega)$ vérifie $Pu = 0$, un point $p = (0, x'; \zeta_1, i\eta')$ avec $\text{Re} \zeta_1 < 0$ appartient à $SS_{\Omega}^{M,0}(u)$ si et seulement si, \bar{u} désignant un prolongement de u à support dans $\{x_1 \geq 0\}$, l'équation $Pv = \bar{P}\bar{u}$ n'a pas de solutions

$v \in (C_N|_X)_p$.

b) Si $C_\Omega|_X \Big|_{T_M^*X}$ est concentré en degré 0 , alors :

$$(3.5) \quad SS_\Omega^{M,0}(u) \cap T_M^*X = SS_\Omega(u)$$

c) On a :

$$(3.6) \quad SS_\Omega^{M,j}(u) \subset SS(Z_\Omega) \cap \text{char}(M),$$

$\text{char}(M)$ désignant la variété caractéristique de M , et $SS(Z_\Omega)$ le micro-support de Z_Ω dans T^*X .

§ IV PROBLEMES AUX LIMITES.

Soit N une sous-variété analytique de codimension d de M ,
 Y le complexifié de N dans X . On note ρ et $\bar{\omega}$ les applications canoniques :

$$T^*Y \xleftarrow{\rho} Y \times_X T^*X \xrightarrow{\bar{\omega}} T^*X .$$

Soit M un \mathcal{D}_X -module cohérent. On suppose :

(4.1) Y est non caractéristique pour M .

On désigne alors par M_Y le système induit par M sur Y . Le théorème de Cauchy-Kowalevski-Kashiwara s'énonce (cf. [19] pour un exposé détaillé) :

$$(4.2) \quad R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)|_Y \simeq R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(M_Y, \mathcal{O}_Y)$$

D'autre part Y étant non caractéristique pour le faisceau $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{O}_X)$, on a :

$$(4.3) \quad R\Gamma_Y(F) \otimes \omega_{Y|X}[2d] \simeq F|_Y$$

Soit maintenant Ω (resp. ω) un ouvert lct de M (resp. N) avec $\bar{\omega} \subset \bar{\Omega}$.

Comme $R\Gamma_\Omega(F) = R\Gamma_\Omega \circ R\Gamma_M(F)$ et $R\Gamma_\omega(F) = R\Gamma_\omega \circ R\Gamma_N \circ R\Gamma_Y(F)$, le morphisme (2.7) composé avec (4.3) donne le morphisme :

$$(4.4) \text{ b : } R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \Gamma_\Omega(B_M))|_N \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(M_Y, \Gamma_\omega(B_N))$$

Cette construction de la "valeur au bord" généralise celles de [16] et [12] .

Proposition 4.1. Soit $u \in \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(M, B_M(\Omega))$ et soit $b(u) \in \text{Ext}_{\mathcal{D}_Y}^j(M_Y, B_N(\omega))$

sa valeur au bord. Alors :

$$i) \quad \text{SS}_{\omega}^{M_Y, j}(b(u)) \subset \rho \bar{\omega}^{-1} \text{SS}_{\Omega}^{M, j}(u)$$

ii) Supposons $d = 1$, $\omega = N$, $j = 0$. Alors l'inclusion précédente est une égalité, autrement dit :

$$\text{SS}(b(u)) = \rho \bar{\omega}^{-1} \text{SS}_{\Omega}^{M, 0}(u)$$

La démonstration de i) utilise le caractère fonctoriel des constructions (i.e : le morphisme (2.6)). La démonstration de ii) utilise une version du "watermelon theorem" de Kashiwara [4] (cf. [18] , [7] , ou [3]).

Soit $q \in T^*Y$. Si Z_q est une partie de $\rho^{-1}(q) \cap \text{char}(M)$ on posera :

$$(4.5) \quad M_{Y, Z_q} = \bigoplus_{p \in Z_q} (\mathcal{E}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{D}_X} \pi^{-1} M)_p$$

On posera aussi :

$$(4.6) \quad M_{Y, q} = (\mathcal{E}_Y \otimes_{\pi^{-1} \mathcal{D}_Y} \pi^{-1} M)_q,$$

autrement dit $M_{Y, q} = M_{Y, Z_q}$ avec $Z_q = \rho^{-1}(q) \cap \text{char}(M)$. On notera j_{Z_q} et p_{Z_q} les morphismes naturels de $\mathcal{E}_{Y, q}$ -modules :

$$(4.7) \quad M_{Y, q} \begin{array}{c} \xleftarrow{j_{Z_q}} \\ \xrightarrow{p_{Z_q}} \end{array} M_{Y, Z_q}$$

Ces morphismes induisent des applications :

$$(4.8) \quad R \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y, q}}(M_{Y, q}, C_{\omega|Y, q}) \begin{array}{c} \xleftarrow{j_{Z_q}} \\ \xrightarrow{p_{Z_q}} \end{array} R \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y, q}}(M_{Z_q}, C_{\omega|Y, q})$$

Proposition 4.2. Soit $u \in \text{Ext}_{\mathcal{D}_X}^j(M, B_M(\Omega))$, et soit $b(u)_q$ l'image de $b(u)$ dans $H^j(R \mathcal{H}om_{\mathcal{E}_{Y, q}}(M_{Y, q}, C_{\omega|Y, q}))^X$. Alors :

$$b(u)_q = p_{Z_q} \circ j_{Z_q} (b(u)_q)$$

avec $Z_q = \rho^{-1}(q) \cap \text{SS}_{\Omega}^{M, j}(u)$

La démonstration utilise un théorème de division dans $C_{\omega|X}$ qui résulte de [10, Cor.557].

La Proposition précédente signifie grossièrement que les traces de u sur N sont déterminées, au voisinage de q , par les $\#Zq$ premières d'entre elles, $\#Zq$ désignant le nombre de points, comptés avec leurs multiplicités, de Zq .

Les Propositions 4.1 et 4.2 généralisent le théorème 3 de [17].

Remarque 4.3. On a un morphisme canonique (obtenu en utilisant (2.6) et [10, Prop.2.3.5]) :

$$(4.9) \quad R\rho_! \bar{\omega}^{-1} C_{\Omega|X} \rightarrow C_{\omega|Y} .$$

Si N est une hypersurface, et $\omega = N$, il semble (nous n'avons pas vérifié ce point en détail) que le faisceau $H^0(R\rho_! \bar{\omega}^{-1} C_{\Omega|X})$ ne soit autre que le faisceau $\hat{C}_N|_{M^+}$ des "mild microfonctions" de Kataoka [11].

Remarque 4.4. Appelons Ω -réguliers en p les \mathbb{C}_X -modules M tels que l'application $H^0(R\mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(M, C_{\Omega|X}))_p \rightarrow \mathcal{H}om_{\mathbb{C}_X}(M, \tilde{\mathcal{J}}_* \tilde{\mathcal{J}}^{-1} C_M)_p$ soit injective

(cf. [17], [1] pour des cas particuliers de cette définition). Nous donnons avec G. Zampieri [21] des critères de Ω -régularité.

Remarque 4.5. Quand Y est caractéristique pour M , mais M est "régulier le long de Y ", on peut encore définir un morphisme de "valeurs au bord".

Posons $M^* = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \mathcal{D}_X)$ [$\dim X$] et supposons que $(M^*)_Y = \mathcal{D}_{Y \rightarrow X} \otimes_{\mathcal{D}_Y} M^*$ soit à cohomologie cohérente sur \mathcal{D}_Y . Supposons aussi que le morphisme $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_{[Y]}(\mathcal{O}_X)) \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, R\Gamma_Y(\mathcal{O}_Y))$ soit un isomorphisme. On construit alors facilement grâce à (2.7) un morphisme :

$$(4.10) \quad b : R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(M, \Gamma_{\Omega}(B_M))|_N \rightarrow R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(M_Y^{**}, \Gamma_{\omega}(B_N))$$

où l'on a posé $M_Y^{**} = ((M^*)_Y)^*$. Remarquons que si Y est non caractéristique, ou encore si M est holonome régulier, M est régulier le long de Y . Malheureusement il semble que (4.10) ne coïncide pas avec le morphisme de valeurs au bord de Kashiwara-Oshima [8] (cf. aussi [14], [13]) défini quand Y est une hypersurface, $M = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$, et P est "fuchsien" le long de Y .

Remarque 4.6. L'étude microlocale des problèmes aux limites a commencé avec les notes [5] de Kashiwara-Kawai. Outre [7],[8] et [11] signalons le récent travail de Oaku [13] .

Remarque 4.7. Dans [2] Delort et Lebeau considère aussi des variétés Lagrangienne singulières et l'on pourrait quand Ω est un demi-espace définir $SS_{\Omega}(u)$ pour leurs méthodes.

BIBLIOGRAPHIE :

- [1] Björk, J.E. : Rings of differential operators. North-Holland (1979).
- [2] Delort J.M. , Lebeau G. : ce séminaire 1984-1985. Article à paraître.
- [3] Hörmander, L. : The analysis of linear partial differential operators I . Grundlehren der Math. 256, Springer-Verlag (1983).
- [4] Kashiwara, M. : Exposé à Nice, 1972.
- [5] Kashiwara, M., Kawai, T. : On boundary value problems for elliptic systems of linear differential equations. Proc. Japan Acad. 48, 712-715 (1971) et 49, 164-168, (1972).
- [6] Kashiwara, M., Kawai, T. : Second microlocalization and asymptotic expansions in Lecture Notes in Physics 126, 21-76, Springer (1980).
- [7] Kashiwara, M., Laurent, Y. : Théorèmes d'annulation et deuxième microlocalisation. Preprint Orsay (1983).
- [8] Kashiwara, M. , Oshima, T. : Systems of differential equations with regular singularities and their boundary value problems. Annals of Math 106, 145-200, (1977).
- [9] Kashiwara, M. , Schapira, P. : Microhyperbolic systems. Acta Mathematica 142, 1-55, (1979).
- [10] Kashiwara, M., Schapira, P. : Microlocal study of sheaves. Asterisque Soc. Mat. de France 128, (1985).
- [11] Kataoka, K. : Microlocal theory of boundary value problems, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect A. I : 27, 355-399 (1980), II : 28, 31-56 (1981).

- [12] Komatsu, H. : Boundary values for solutions of elliptic equations. Proc. Int. Conf. Func. Anal. Rel. Topics 107-121, Univ. Tokyo (1970).
- [13] Ôaku, T. : A new formulation of local boundary value problem in the framework of hyperfunctions. Proc. Japan Acad. I : vol. 60, 283-286 (1984), II : vol 61, 129-132 (1985), III : 197-200 (1985).
- [14] Oshima, T. : A definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities. Publ. RIMS Kyoto Univ. 19, 1203-1230 (1983).
- [15] Sato, M. , Kashiwara, M. , Kawai, T. : Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math 287, 265-529 Springer-Verlag (1973).
- [16] Schapira, P. : Problème de Dirichlet et solutions hyperfonctions des équations elliptiques. Bull. U.M.I. 4, 367-372, (1969).
- [17] Schapira, P. : Propagation at the boundary and reflexion of analytic singularities of solutions of linear partial differential equations I . Publ. RIMS, Kyoto Univ. 12. Suppl. 441-453 (1977).
- [18] Schapira, P. : Propagation at the boundary of analytic singularities. Nato adv. Study Inst. on Bound. value Problems. Reidel Publ Co , 185-212 (1981).
- [19] Schapira, P. : Microdifferential systems in the complex domain. Grundlehren der Math. 269, Springer-Verlag (1985).
- [20] Schapira, P. : Front d'onde analytique au bord I . C.R. Acad. Sci 302, n°10, 383-386 (1986).
- [21] Schapira, P. , Zampieri, G. : Regularity at the boundary for systems of microdifferential equations. Coll. Intern. "Hyperbolic equations", Padova (1985). A paraître.