SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES - ÉCOLE POLYTECHNIQUE

D. BURNS

Les équations de Monge-Ampère homogènes, et des exhaustions spéciales de variétés affines

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1983-1984), exp. nº 4, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1983-1984____A4_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. (6) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691 596 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-MEYER-SCHWARTZ 1983-1984

LES EQUATIONS DE MONGE-AMPERE HOMOGENES, ET DES EXHAUSTIONS SPECIALES DE VARIETES AFFINES

par D. BURNS

(Universités d'Orsay et Ann Arbor)

Exposé n° IV

18 octobre 1983

§ 1. DEFINITIONS

Soit u une fonction plurisousharmonique (p.s.h.) de classe C^2 sur Ω, un ouvert dans $\mathbb{C}^n$. Soit $\partial^2 u/\partial z^i\,\partial\bar{z}^j = u_{ij}$ le hessien complexe. Nous considérons l'équation homogène,

$$(*) \qquad \det(u_{ij}) = 0$$

Plus intrinsèquement, on peut l'exprimer par $(\partial\bar{\partial} u)^n = 0$, forme de l'équation qui est évidemment invariante par rapport aux changements de variables holomorphes. Donc on peut considérer l'équation sur n'importe quelle variété complexe. Notons que, en dim. 1, on retrouve le laplacien ordinaire, et les solutions sont les fonctions harmoniques. En dimension $n \geqslant 2$, l'équation devient non linéaire, et on étudie surtout, pour les solutions classiques, le cas générique où $(\partial\bar{\partial} u)^{n-1} \neq 0$, c'est à dire, $\mathrm{rg}(u_{ij}) = n-1$. Si on se restreint à la considération de l'opérateur appliqué aux fonctions p.s.h., on trouve dans le cadre classique un principe de maximum :

<u>Principe de maximum</u> : Soient u,v des fonctions p.s.h. de $C^2(\bar{\Omega})$, $\Omega \subset\subset \mathbb{C}^n$ avec $\partial\Omega \in C^1$; supposons que $u \geqslant v$ sur $\partial\Omega$, et $\det(v_{ij}) \leqslant \det(u_{ij})$ sur Ω. Alors, $u \geqslant v$ sur Ω.

On peut affaiblir les hypothèses sensiblement ici. En utilisant ce principe, et quelques inégalités fondamentales de Chern-Levine-Nirenberg, Bedford et Taylor ont établi une théorie "faible" de l'équation $(*)$, par une méthode de Perron, pour les fonctions p.s.h. et localement bornées [3] , [4] . Ils ont établi aussi une théorie du potentiel et construit une bonne capacité associée à cet opérateur pour les fonction p.s.h.

Nous nous bornerons ici au cadre des solutions classiques de $(*)$, qui sont p.s.h.

§ 2. LA STRUCTURE GEOMETRIQUE SOUS-JACENTE

Soit $u \in \mathcal{E}^k$, $k > 2$, et supposons le hessien u_{ij} de rang constant $< n$. Définissons la distribution $\mathcal{F}$, au sens de Chevalley, des vecteurs v tangents à Ω pour lesquels la forme linéaire $\partial\bar{\partial}u(v,.) = 0$. Comme $\partial\bar{\partial}u$ est fermée, $\mathcal{F}$ est intégrable, et comme $\sqrt{-1}\,\partial\bar\partial u$ est réelle, et de type (1,1), les feuilles de $\mathcal{F}$ sont des sous variétés complexes du domaine de définition de u. Donc, dans le cas générique, $\mathcal{F}$ est un feuilletage par des surfaces de Riemann.

Du point de vue des E.D.P., la linéarisation de ($*$) en u est l'opérateur (écrit sous forme invariante)

$$v \longmapsto n\, \partial\bar\partial v \wedge (\partial\bar\partial u)^{n-1}$$

Comme u est p.s.h., cet opérateur est elliptique dégénéré, dans le cas générique et identiquement nul sinon. Les feuilles de $\mathcal{F}$ sont les caractéristiques de cet opérateur, et l'opérateur lui-même est une sorte de laplacien "le long des feuilles" - voir ex. 0, § 3.

Soit $p \in \Omega$, et soit L_p la feuille de $\mathcal{F}$ passant par p. Choisissons des coordonnées locales par rapport auxquelles L_p est donnée comme l'axe de z^n. Le long de L_p, $u_{i\bar j}$ à la forme :

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{c|c} * & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \}\, n-1 \\ \}\, 1 \end{array} \end{array}$$

Donc, on voit que u est harmonique sur des feuilles et de plus, la (1,0)-forme différentielle ∂u est holomorphe le long d'une feuille. En général, cependant les feuilles ne varient pas holomorphiquement de l'une à l'autre -voir ex 2, § 3.

§ 3. DES EXEMPLES

a) Soit $u = \sum_{j=1}^{n-1} |z^j|^2$, fonction strictement p.s.h. (= s.p.s.h.) de $(Z^1,\dots,Z^{n-1})$,

vue comme fonction de $(Z^1,\dots,Z^n)$. Alors u vérifie ($*$) partout, et son feuilletage $\mathcal{F}$ est holomorphe (par les droites parallèles à l'axe z^n). La linéarisation de ($*$) en u est donnée par

$$v \longmapsto n!\, \frac{\partial^2 v}{\partial z^n\, \partial \bar z^n}\, dz^1 \wedge d\bar z^1 \wedge \dots \wedge d\bar z^n .$$

1) Sur $\mathbb{C}^n$, la fonction p.s.h. $u = \log|z|^2$ vérifie

$$(i\,\partial\bar\partial\, u)^n = c_n\,\delta_o \qquad (\delta_o = \text{Dirac en } 0)$$

Donc, sur $\Omega = \mathbb{C}^n - \{0\}$, u satisfait à $(*)$, et le feuilletage est réalisé par les droites complexes passant par 0. Les feuilles sont aussi toutes fermées dans Ω.

2) Pour $z^i \neq 0$, soit $\xi^i = \log|z^i|^2$. Soit $\tilde u$ une fonction réelle des ξ^i, et définissons $u(z) = \tilde u(\xi)$. Alors, il est bien connu que u est p.s.h. si et seulement si $\tilde u$ est convexe comme fonction des ξ. On voit par un calcul facile que u vérifie $(*)$ si et seulement si $\tilde u$ vérifie l'équation de Monge-Ampère réelle

$$(*)_{\mathbb{R}} \qquad \det\left(\frac{\partial^2\,\tilde u}{\partial\xi^i\,\partial\xi^j}\right) = 0$$

Les solutions convexes de $(*)_{\mathbb{R}}$, avec un hessien de rang $n-1$, admettent un feuilletage de leurs domaines par des droites réelles. Le feuilletage associé à u est holomorphe si et seulement si le feuilletage de $\tilde u$ consiste en droites parallèles. Par exemple, pour $n = 2$, $\tilde u(\xi) = r = \sqrt{(\xi^1)^2 + (\xi^2)^2}$ est une solution de $(*)_{\mathbb{R}}$. Son feuilletage est formé des droites réelles passant par 0. Le feuilletage complexe de u est donné par les courbes complexes contenues dans les hypersurfaces réelles

$$|z^1|^\alpha = |z^2|^\beta .$$

Noter que les feuilles ne sont pas fermées sauf quand le rapport α/β est rationnel.

On appelle ces solutions les solutions Reinhardt. Ce sont les solutions invariantes par rapport aux transformations $(z^1,\dots,z^n) \longmapsto (e^{i\theta_1} z^1,\dots,e^{i\theta_n} z^n)$.

3) On peut généraliser la solution donnée dans le n° 1 ci-dessus. Soit M une variété algébrique affine, autrement dit, une sous-variété fermée (de dimension n) dans $\mathbb{C}^N$, définie comme les zéros communs de plusieurs polynômes holomorphes. Pour une telle M, et $\pi : \mathbb{C}^N \longrightarrow \mathbb{C}^n$ la projection linéaire générique, $\pi|_M := \pi$ applique M proprement en $\mathbb{C}^n$ (c'est à dire, π^{-1}(compact) = compact). Soit $u_o = \log|z|^2$ sur $\mathbb{C}^n$ (n°1 ci-dessus), et soit $u = \pi^* u_o$. Alors u est une solution de $(*)$ en dehors de $\pi^{-1}(0)$. De plus, u jouit de la propriété intéressante

suivante : si $\tau := e^u$, une fonction entière f sur M est algébrique (restriction d'un polynôme à M) si et seulement si il existe des constantes ℓ, $C_\ell > 0$ telles que :

$$|f(z)| \leqslant C_z (1+\tau(z))^\ell , \qquad z \in M. \tag{3.1}$$

On estime qu'il doit exister une sorte de réciproque de cette construction à savoir qu'une variété de Stein M munie d'une fonction propre $\tau : M \to \mathbb{R}^+$ telle que $u := \operatorname{Log} \tau$ vérifie $(*)$ doit en fait être une variété algébrique affine, avec fonctions algébriques distinguées comme en (3.1) ci-dessus. Si on suppose τ lisse partout, et $\tau_{i\bar{j}} > 0$ partout, c'est bien le cas ([5] ,[11]). Autrement, il faut supposer des hypothèses plus techniques sur l'ensemble $\Sigma = \{(\partial\bar{\partial}\tau)^n = 0\}$. Pour un énoncé en cette direction, avec une hypothèse topologique embêtante, voir [6] .

Plus analytiquement, cette question de l'algébrisation intrinsèque concerne des propriétés d'un voisinage de l'infini dans M ; donc la question la plus naturelle est de demander si une variété M de Stein, munie d'une exhaustion τ s.p.s.h. $\geqslant 0$, telle que $u = \operatorname{Log}\tau$ vérifie $(*)$ en dehors d'un compact K, est toujours algébrisable comme en (3.1). C'est vrai en dimension 1, [7] , mais malheureusement, on ne sait pas s'il existe une telle exhaustion sur une M affine générale. Nous considérons cette question d'existence dans les paragraphes suivants.

§ 4. <u>THEOREMES D'EXISTENCE SUR DES BORNES DANS $\mathbb{C}^n$</u>

Les solutions faibles de $(*)$ ne sont pas toujours lisses. (Voir [7]). Les premiers résultats positifs pour les solutions classiques concernant le problème de Dirichlet. Moriyon [10] et Bedford [1] ont démontré des théorèmes de stabilité dans une situation dont l'analogue dans $\mathbb{C}$ est la stabilité de la mesure harmonique.

<u>Théorème</u> (Moriyon) : Supposons que $\Omega_o \subset\subset \Omega_1 \subset\subset \mathbb{C}^n$ soient deux domaines strictement pseudoconvexes, $\partial\Omega_i \in \mathcal{C}^{k+k_o}$, $k \geqslant 4$ donné, et u_o une solution sur $\Omega = \Omega_1 - \Omega_o$ de

$$(\mathrm{MH}) \quad \begin{cases} 1) & u \text{ est p.s.h. et } \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}), \\ 2) & u \text{ vér. } (*) \text{ sur } \Omega, \\ 3) & u|_{\partial\Omega_o} = 0,\ u|_{\partial\Omega_1} = 1 , \end{cases}$$

telle que le feuilletage $\mathcal{F}$ associé à u_o soit holomorphe. Alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour chaque paire Ω_i' , $i = 0,1$, $\partial\Omega_i' \in \mathcal{C}^k$, ε-proche de $\partial\Omega_i$ dans $\mathcal{C}^{22}$ admet une solution $u \in \mathcal{C}^k(\bar{\Omega}')$ de (MH) où $\Omega' = \Omega_1' - \Omega_o'$.

Remarque : On peut généraliser la condition d'holomorphie du feuilletage $\mathcal{F}$ associé à u_o, en la remplaçant par une condition de non-holomorphie d'ordre moins qu'exponentiel, qui permet l'application du théorème à la perturbation des solutions de Reinhardt (§ 3, n°2).

Moriyon introduit un feuilletage approché sur Ω , et, après une analyse du laplacien le long des feuilles approchées, il applique une forme du théorème des fonctions implicites à la Nash-Moser pour corriger les feuilles.

Le théorème de Bedford se borne à une classe plus petite de domaines Ω mais admet des données de Dirichlet au bord non-constantes.

Théorème (Bedford) : Soient $\Omega_o = \{|z| < 1\}$, $\Omega_1 = \{|z| < 2\}$, et $\Omega = \Omega_1 - \bar{\Omega}_o$. Soit $u_o = \text{Log } |z|/\text{Log } 2$. Pour des données $\Omega_i' \in \mathcal{C}^{m+48,\alpha}$, $\varphi_i' \in \mathcal{C}^{m+48,\alpha}(\partial\Omega_i')$, $m \geqslant 5$, $0 < \alpha < 1$, suffisamment proches des données Ω_i, $\varphi_o \equiv 0$, $\varphi_1 \equiv 1$, il existe $u \in \mathcal{C}^{m,\alpha}(\bar{\Omega}')$ telle que u vérifie $(*)$ dans $\Omega' = \Omega_1' - \Omega_o'$, et $u/\partial\Omega_i' = \varphi_i'$

Bedford traite d'autres cas un peu plus explicites dans [1]. Bedford considère directement le problème de trouver les feuilles, en le voyant comme problème aux fontières libres. Dans les deux problèmes, on perd de la régularité. En effet, on ne connaît aucun exemple d'un domaine $\Omega = \Omega_1 - \Omega_o$ comme ci-dessus , $\partial\Omega_i \in \mathcal{C}^\infty$, pour lequel on ait une "mesure harmonique" de classe $\mathcal{C}^\infty$, sauf les exemples de Reinhardt.

Une autre classe de solutions de $(*)$ est construite par Lempert [8] , [9] . Il s'agit ici des solutions de $(*)$ généralisant la fonction de Green d'un domaine dans $\mathbb{C}$.

Théorème (Lempert) : Soit Ω un domaine borné dans $\mathbb{C}^n$, à bord de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 6$ ($k = \infty$, ω admis), et strictement convexe. Soit $0 \in \Omega$. Alors il existe une solution u de ($*$), p.s.h. sur Ω, telle que

(G)

1) $(\partial\bar{\partial} u)^n = c_n \cdot \delta_o$

2) $u \in \mathcal{C}^{k-4}(\bar{\Omega} - \{0\})$

3) $u|_{\partial\Omega} = 0$

4) $u - \log |z|^2$ soit bornée sur $\Omega - \{0\}$.

Lempert utilise la méthode de continuité, en ramenant le cas de Ω général au cas de la boule unité. Il construit directement le feuilletage, en interprétant les feuilles variationnellement comme les disques extrémaux de Royden. Rappelons le problème de Royden : soient Ω une variété complexe, p un point de Ω et $\underline{v}$ un vecteur tangent à Ω en p, et soit Δ le disque unité dans $\mathbb{C}$. Définissons

$$H(\Omega,\underline{v}) = \{f : \Delta \longrightarrow \Omega \text{ , holomorphe, t.q. } f(0) = p, \text{ et } f'(0) = \lambda \underline{v} \text{ , } \lambda > 0\}.$$

On cherche les f pour lesquelles la fonctionnelle $\lambda = \lambda(f)$ prend son maximum. Lempert montre que, pour Ω comme dans l'énoncé du théorème, il existe une application extrémale unique qui dépend de façon $\mathcal{C}^\infty$ des paramètres $p, \underline{v}$, et Ω . Il peut donc construire une application $\Phi : \mathbb{B}^n \longrightarrow \Omega$, $\Phi(0) = 0$, qui applique chaque disque linéaire passant par 0 dans $\mathbb{B}^n$ (disque extrémal pour $\Omega = \mathbb{B}^n$) , en la direction $\underline{v}$, en l'unique disque extrémal de Ω , de même direction en 0. La "fonction de Green" u est $(\Phi^{-1})^*(\log|z|^2)$, ce qui est évidemment en accord avec le cas de dimension 1.

On voit que la méthode de continuité s'effondre quand les disques extrémaux deviennent non uniques ou se croisent, lorsqu'on déforme Ω en un domaine non convexe mais strictement pseudoconvexe, comme on le vérifie sur des exemples. En ces cas là, les solutions de (G) deviennent singulières.

§ 5. UN CAS GEOMETRIQUE

On cherche à construire des bonnes exhaustions τ s.p.s.h. sur une variété algébrique affine M, dont le logarithme u satisfasse à ($*$) en dehors d'un compact $K \subset M$, comme suggéré à la fin de § 3. Nous esquissons une construction de telles solutions ici dans le cas générique, défini comme suit : considérons M plongée dans $\mathbb{C}^N$. Sa fermeture $\bar{M}$ dans le projectif $\mathbb{P}^N$ est un sous ensemble algébrique. Nous supposons que $\bar{M}$ est lisse, et que $H_\infty = \mathbb{P}^N - \mathbb{C}^N$ coupe $\bar{M}$ transversalement en $M_\infty = H_\infty \cap \bar{M}$.

<u>Théorème</u> : Soit M algébrique affine générique. Il existe des exhaustions $\tau \in C^\infty$, s.p.s.h., non négatives, de M telles que

(E) 1) $\log \tau = u$ vérifie $(*)$ en dehors d'un compact $K \subset M$

2) $u - \log|Z|^2$ soit bornée sur $M - K$.

On a, en plus, des bornes sur la courbure de Ricci de la métrique kählérienne à potentiel τ, utiles pour les estimées L^2 de l'équation $\bar\partial$ sur une telle M.

On utilise ici la méthode variationnelle de Lempert. On cherche un feuilletage d'un voisinage de M_∞ dans $\bar M$ par disques holomorphes plongés, centrés sur M_∞ et coupant M_∞ transversalement.

Fixons $0 \in \mathbb{C}^N$, et considérons les homothéties $T_\varepsilon : z \to \varepsilon z$ de $\mathbb{C}^N$. Elles se prolongent à $\mathbb{P}^N$ en laissant stable chaque point de H_∞. Soit $\bar M_\varepsilon = T_\varepsilon(\bar M)$. La limite des $\bar M_\varepsilon$, quand ε tend vers 0, est $\bar M_0$, le cône dans $\mathbb{P}^N$ de sommet 0 et de base $\bar M_0 \cap H_\infty = \bar M \cap H_\infty = M_\infty$. Notons que $\bar M_0$ est lisse en dehors de 0, et que $u_0 = \log|z|^2$ restreinte à $\bar M_0$ est une solution de $(*)$ en dehors de 0. Les disques linéaires dans $\bar M_0$ centrés dans M_∞ et bords dans $\partial\mathbb{B}^n \cap \bar M_0$ sont des solutions extrémales locales pour une fonctionnelle à la Royden, dont les variations secondes sont non dégénérées. Donc, pour tout point $p \in M_\infty$, et tout vecteur tangent $\underline{v}$ à $\bar M_\varepsilon$ en p, transverse à M_∞, si ε est suffisamment petit et si la direction de $\underline{v}$ est assez proche, dans $\mathbb{P}^N$, de la direction de la droite complexe dans $\bar M_0$, passant par 0 et par p, alors il existe un disque extrémal plongé dans $\bar M_\varepsilon$, dans la direction $\underline{v}$ en p, dont le bord soit plongé dans $\partial\mathbb{B}^n \cap \bar M_\varepsilon$. Ce disque dépend lissement des paramètres ε, p, $\underline{v}$. Le choix lisse d'une direction $\mathbb{C}.\underline{v}$ tangente à $\bar M$ en chaque $p \in M_\infty$ et transversale à M_∞, donne lieu à un feuilletage du voisinage $U = T_\varepsilon^{-1}(\bar M_\varepsilon \cap \{\mathbb{P}^N \setminus \mathbb{B}^N\})$ de M_∞ dans $\bar M$. On transporte la fonction $\log|Z|^2$ sur $M_0 \setminus (M_0 \cap \mathbb{B}^N)$ à $\bar M_\varepsilon - (\bar M_\varepsilon \cap \mathbb{B}^N)$, par l'application $\Phi : \bar M_0 \setminus (\bar M_0 \cap \mathbb{B}^N) \to \bar M_\varepsilon - (\bar M_\varepsilon \cap \mathbb{B}^N)$, dont la construction est semblable à celle du § 4, et puis à U par l'application T_ε^{-1}.

§ 6. <u>REMARQUES ET QUESTIONS OUVERTES</u>

Si on se borne même au cas $M = \mathbb{C}^N$ lui-même, la méthode ci-dessus construit, pour les domaines lisses Ω suffisamment proche de $\mathbb{B}^N$ une solution lisse en dehors de Ω, valant 0 sur $\partial\Omega$, et de croissance logarithmique à l'infini. Rappelons que la fonction extrémale de Siciak est définie, pour un compact $K \subset \mathbb{C}^N$, comme u_K^*, où $u_K = \sup \{v \text{ p.s.h. sur } \mathbb{C}^N \mid v \leqslant 0 \text{ sur } K,\ v \leqslant \log\|z\|^2 + O(1) \text{ sur } \mathbb{C}^N\}$, et

u_K^* est la régularisée supérieure de u_K. Pour Ω comme ci-dessus, on a donc montré que u_Ω^* est lisse.

Question 1 : Pour quels Ω a-t-on une solution u_Ω^* lisse ? On espère, du moins, que u_Ω^* soit lisse pour Ω strictement convexe.

Question 2 : Dans le cas géométrique considéré ci-dessus (§ 5) en général on peut supposer que $\bar{M} \cap H_\infty$ est un diviseur singulier à "croisements normaux". Pour U un voisinage convenablement choisi de $\bar{M} \cap H_\infty$ dans $\bar{M}$, est-ce qu'il y a une solution lisse u de Monge-Ampère sur U, à croissance logarithmique à l'infini ? Il me semble ici qu'il faut considérer des solutions pour lesquelles les feuilles du feuilletage associé ne soient pas fermées.

---

[1] E. BEDFORD : Stability of envelopes of holomorphy and the degenerate Monge-Ampère equation, Math. Ann. 259 (1982), 1-28.

[2] E. BEDFORD, J. E. FORNAESS : Counterexamples to regularity for the complex Monge-Ampère equation, Inv. Math. 50 (1979), 129-134.

[3] E. BEDFORD, B. A. TAYLOR : The Dirichlet problem for a complex Monge-Ampère equation, Inv. Math. 37 (1976), 1-44.

[4] E. BEDFORD, B. A. TAYLOR : A new capacity for plurisubharmonic functions, Acta Math. 149 (1982), 1-40.

[5] D. BURNS : Curvatures of Monge-Ampère foliations and parabolic manifolds, Ann. Math. 115 (1982), 349-373.

[6] D. BURNS : Parabolic exhaustions and the algebraicization of certain Stein manifolds, à paraître.

[7] M. CORNALBA, P. GRIFFITHS : Analytic cycles and vector bundles on non-compact algebraic varieties, Inv. Math. 28 (1975), 1-108.

[8] L. LEMPERT : La métrique de Kobayashi et la représentation des domaines sur la boule, Bull. S.M.F., 109 (1981) 427-474.

[9] L. LEMPERT : Solving the degenerate complex Monge-Ampère equation with one concentrated singularity, Math. Ann. 263 (1983) 515-532.

[10] R. MORIYON : Regularity of the Dirichlet problem for the complex Monge-Ampère equation, C.P.A.M. 35 (1982), 1-28.

[11] W. STOLL : The characterization of strictly parabolic manifolds, Ann. E.N.S. Pisa, IV, VII (1980), 87-154.

*
* *
*