

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. LEBEAU

Non holonomie dans un problème de diffraction

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1979-1980), exp. n° 17,
p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1979-1980____A18_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1979-1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
91128 PALAISEAU CEDEX - FRANCE

Tél. : (1) 941.82.00 - Poste N°
Télex : ECOLEX 691596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 9 - 1 9 8 0

NON HOLONOMIE DANS UN PROBLEME DE DIFFRACTION

par G. LEBEAU

Exposé n° XVII

18 Mars 1980

I. INTRODUCTION

Soit P l'opérateur du second ordre dans $\mathbb{R}^3$:

$$P = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y \partial t} - x \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

et u la solution du problème mixte extérieur

$$\begin{aligned} Pu &= 0 & x > 0 \\ u &= 0 & t < 0 \\ u|_{x=0} &= 2\pi \delta_{t=0} \otimes \int_1^{+\infty} e^{iy\eta} d\eta . \end{aligned}$$

On s'intéresse ici aux singularités de u aux points du front diffracté. Sur un exemple analogue (4) Friedlander et Melrose ont montré qu'en ces points u est de classe Gevrey 3 et le spectre singulier de u lagrangien. Il est alors naturel de se poser la question : " u est-elle (micro)-holonôme (nécessairement irrégulière) au voisinage de ces points".

(La micro-holonomie de u aux points du front direct (ou hyperbolique) étant bien connue).

En fait il n'en est rien et le résultat qu'on donne ici relie la nature de la singularité de u avec la géométrie du problème.

Remarque : Le problème identique intérieur (i.e. dans $x < 0$) a été étudié par G. Eskin (3) et Anderson Melrose (1) ; nous allons constater que les deux problèmes sont assez intimement liés.

II. RESULTATS

On note H [respectivement R_n , respectivement R_∞] la réunion des demi-bicaractéristiques de P issues des points $x = 0, y = 0, t = 0, \xi < 0, \eta > 0, \eta\tau = \xi^2$ [respectivement $x = 0, y = 0, t = 0, \xi > 0, \eta > 0, \eta\tau = \xi^2$ et n fois réfléchies sur le bord $x = 0$, respectivement $x = 0, y = 0, t > 0, \xi = 0, \eta > 0, \tau = 0$, pour lesquelles on a $t > 0$].

Si π désigne la projection canonique de $T^*\mathbb{R}^3$ sur $\mathbb{R}^3$ on note

$$S = \pi(H), \quad \Sigma_n = \pi(R_n), \quad \Sigma_\infty = \pi(R_\infty)$$

et $\sigma_n = \Sigma_n \cap \{x = 0\}$, $\sigma_\infty = \Sigma_\infty \cap \{x = 0\}$.

On obtient facilement les équations suivantes pour ces lieux géométriques :

$$S = \{(x, y, t), t > 0, x > t^2, y = \frac{x^2}{4t} + \frac{xt}{2} - \frac{t^3}{12}\}$$

$$\Sigma_\infty = \{(x, y, t), t > 0, 0 \leq x < t^2, y = 2/3 x^{3/2}\}$$

$$\sigma_\infty = \{(y, t), t > 0, y = 0\}$$

$$\sigma_n = \{(y, t), t > 0, y = \frac{-t^3}{12(n+1)^2}\}$$

Remarques :

1) $\overline{SU \Sigma_\infty}$ est une surface C^1 pour $x > 0$, non analytique le long de la courbe $x = t^2, y = 2/3 t^3$.

2) $\overline{SU \Sigma_0}$ est la surface analytique dont le demi fibré conormal ($\eta > 0$) est réunion des demi bicaractéristiques de P issues de $x = y = t = 0, \eta > 0, \tau = \pm 2$.

Les singularités de $u|_{x=0}$ sont :

$$SS(u|_{x=0}) = \{(0, 0, \eta \geq 0, \tau)\}$$

Les points $\eta > 0, \tau < 0$ sont elliptiques pour le problème. Les points $\eta > 0, \tau > 0$ sont hyperboliques; ils génèrent les singularités de u sur $\mathcal{H}$.

C'est le point "glancing" m_0 (ici strictement diffractif), défini par $\tau = 0$ qui nous intéresse; il est responsable des singularités de u sur le front diffracté Σ_∞ . Si m est un point hyperbolique voisin de m_0 , il existe deux demi bicaractéristiques de P issues de m , $\gamma_1(s), \gamma_2(s)$, sur lesquelles on a $t > 0$, $(\frac{dt}{ds} < 0)$; on a $x > 0$ sur γ_1 et $x < 0$ sur γ_2 pour $|s|$ petit. La diffractivité de m_0 entraîne que x s'annule pour $s = s_0 < 0$ sur γ_2 en un point hyperbolique. Ainsi peut-on imposer exactement n réflexions sur le bord à γ_2 et obtenir les R_n , qui sont réunion de bicaractéristiques brisées de P.

[Les singularités de $u|_{x=0}, \eta = 0, \tau = \pm 1$ ne fournissent pas de singularités de u dans $t > 0$.]

On a les résultats suivants :

1) $SS(u|_{\substack{x > 0 \\ t > 0}}) = T_+^*(\overline{SU \Sigma_\infty})$, où T_+^* désigne le demi fibré conormal sur lequel on a

$\eta > 0$

2) u est de classe Gevrey 3 aux points de Σ_∞ et non micro-holonyme en ces points (plus précisément, si $p \in G_\infty$, $\text{codim support } (\mathcal{E}\bar{u})_p = 2$ où $\mathcal{E}$ désigne l'anneau des opérateurs microdifférentiels et $\bar{u}$ la microfonction associée à u)

3) Au voisinage de tout point de Σ_∞ , il existe une carte locale (u_1, u_2, u_3) et un opérateur pseudo différentiel elliptique de degré $0, Q$, tels que

$$Qu = h(u_1) \quad (\text{modulo l'analytique})$$

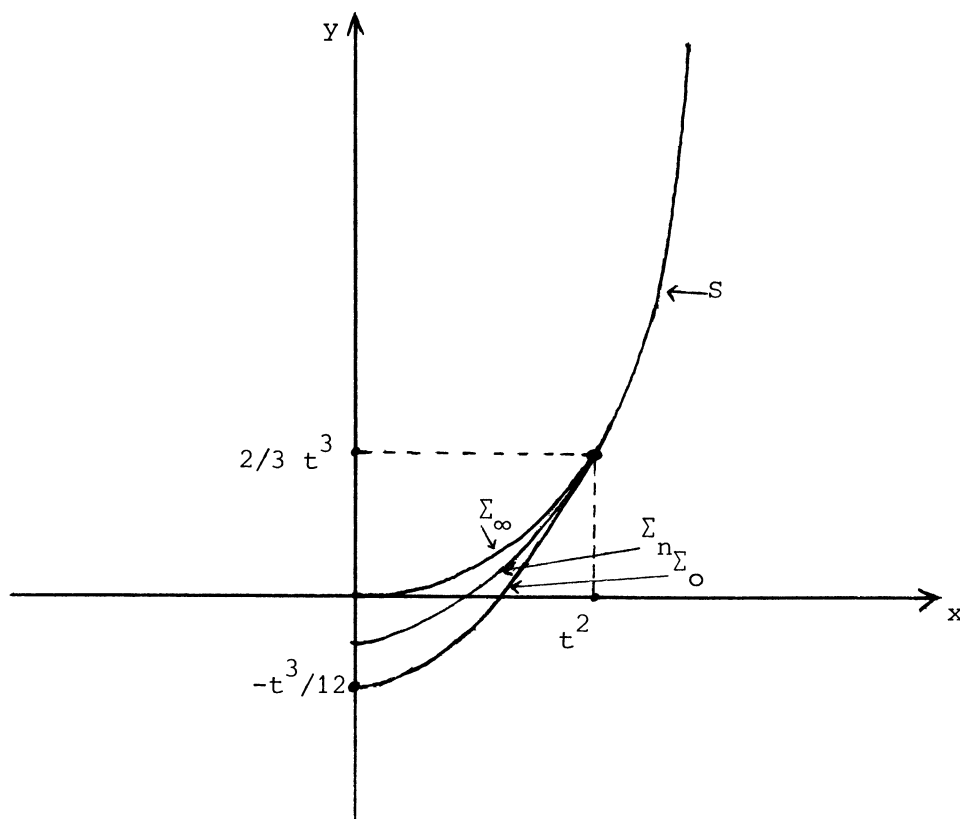
où $u_1 = 0$ est une équation locale de Σ_∞ et où h est valeur au bord d'une fonction holomorphe dans $\text{Im } u_1 > 0$ prolongeable d'un tour dans le sens direct autour de l'origine et dont le prolongement est singulier aux points $\alpha_n \in \mathbb{R}_-$, $\alpha_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow +\infty$) et où $u_1 = \alpha_n$ est une équation locale pour Σ_n (n grand).

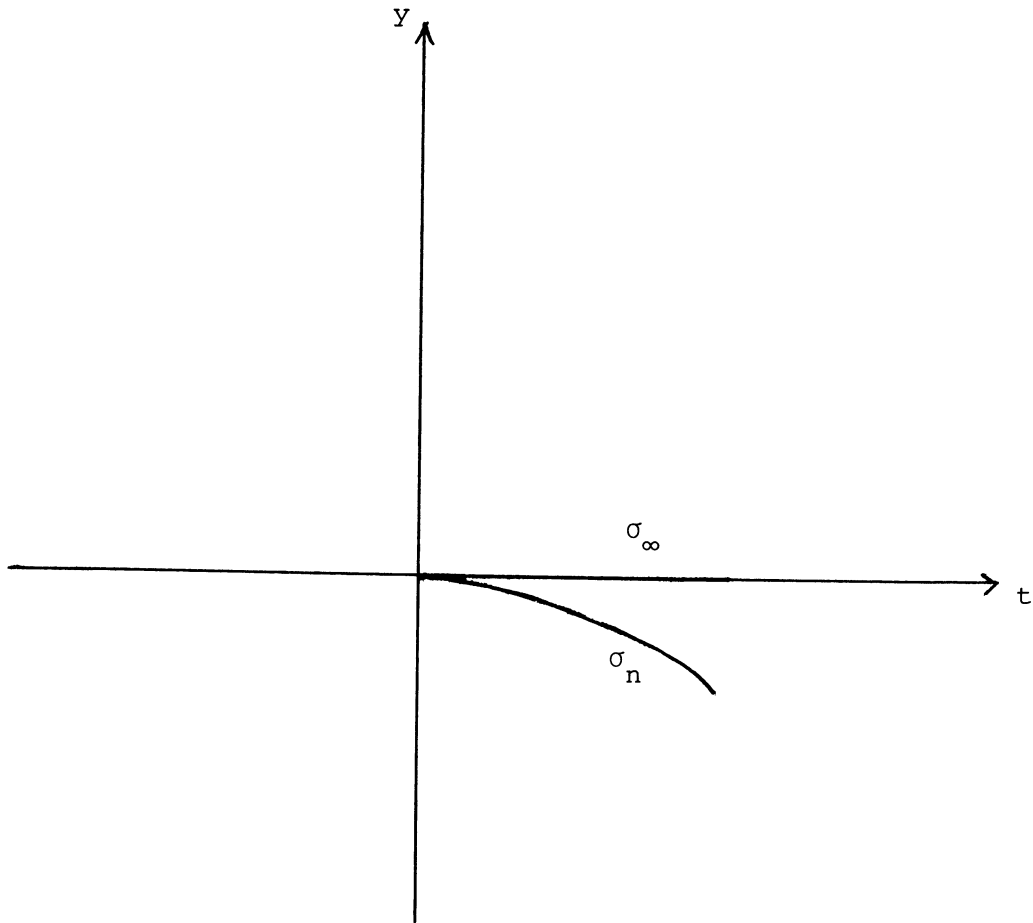
On a aussi des résultats analogues pour la trace de la dérivée normale de u ,
 $\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} :$

$$1') \quad SS(\varphi) = SS(u|_{x=0}) \cup T_+^*(\sigma_\infty)$$

2') φ est de classe Gevrey 3 aux points de σ_∞ et non micro holonyme en ces points.

3') le prolongement holomorphe de φ autour de σ_∞ est singulier sur σ_n .





III. Les résultats 1) et 1') sont contenus dans (4); 2 et 2') se déduisent assez facilement de 3) 3') et de leurs preuves. On indique ici brièvement la méthode de démonstration de 3 et 3') (on peut naturellement regarder 3) comme un résultat de propagation à partir de 3').

On a la représentation intégrale suivante de u :

$$\text{III.1} \quad u = \int_{\substack{\eta \geq 1 \\ \omega \in \mathbb{R}}} e^{i\eta(y+t\omega)} \frac{\text{Ai}[e^{i\pi/3} \eta^{2/3} (x + \omega)]}{\text{Ai}[e^{i\pi/3} \eta^{2/3} \omega]} \eta d\eta d\omega$$

où Ai désigne la fonction d'Airy. Rappelons que l'on a

$$\text{III.2} \quad \text{Ai}(\xi) = \xi^{-1/4} \Phi(z) \exp(-2/3 \xi^{3/2}) ; \quad z = \xi^{-3/2}, \quad |\text{Arg} \xi| < \pi$$

où Φ est Gevrey 2 à l'origine (donc un symbole analytique régulier en $1/Z$)

Notons qu'il résulte de III.2, que les $\omega < 0$ dans III.1 ne contribuent pas au spectre de u . Par une réduction microlocale (qui fournit 1) comme corollaire) on obtient le lemme suivant :

Lemme 1 : Au voisinage de tout point de Σ_∞ , il existe une carte locale (u_1, u_2, u_3) et un opérateur pseudo différentiel elliptique Q de degré 0 tels que (modulo une fonction analytique)

$$\text{III.3} \quad Qu = \int_0^+ e^{i\eta u_1} \eta^{1/6} \mathcal{F}(-\eta^{1/3}) d\eta$$

où $\mathcal{F}$ est la fonction de Fock : (5)

$$\mathcal{F}(x) = \int e^{-isx} \text{Ai}^{-1}[e^{i\pi/3} s] ds$$

et $u_1(x, t, y)$ est la valeur stationnaire de la phase

$$\lambda^{-3} [y + (t - \lambda)\omega - 2/3 (x + \omega)^{3/2}]$$

(d'où il résulte que u_1 vérifie l'équation eikonale de P).

$\mathcal{F}$ est une fonction entière de x et on a :

$$x < 0 \quad \mathcal{F}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} e^{-i\pi/3} \sigma_k e^{i\pi/6 x x_k}$$

où $-x_k$ est le $k^{\text{ième}}$ zéro strictement négatif de la fonction d'Airy et $\sigma_k = \text{Ai}'(-x_k)^{-1}$

$$x > 0 \quad \mathcal{F}(x) = e^{-ix^3/3} x a(x^3)$$

où a est un symbole analytique de degré 0.

$$\text{Soit alors } h(z) = \int_0^{+\infty} e^{i\tau z} \tau^{1/6} \mathcal{F}(-\tau^{1/3}) d\tau \quad \text{pour } \text{Im } z > 0.$$

On pose

$$h_k(z) = \sigma_k e^{-i\pi/3} \int_0^{+\infty} e^{i\tau z} \tau^{1/6} e^{-e^{i\pi/6} \tau^{1/3} x_k} d\tau$$

On a $h = \sum h_k$ pour $\text{Im } z > 0$, la série étant uniformément convergente sur tout compact. Les fonctions $h_k(z)$ sont ramifiées de détermination finie autour de l'origine et pour $\varphi > 0$ on a :

$$h_k(z e^{i\varphi}) = e^{-i\pi/3} \sigma_k e^{-7i\varphi/6} \int_0^{+\infty} e^{i\tau z \tau^{1/6}} e^{-e^{i(\pi/6-\varphi/3)} \tau^{1/3} x_k} d\tau$$

Par suite, la série $\sum h_k$ est uniformément convergente sur tout compact du secteur angulaire $0 < \text{Arg } z < 3\pi$ et donc h se prolonge à ce secteur.

On note h^* [resp. h_k^*] les fonctions définies pour $\text{Im } z > 0$ comme le prolongement analytique d'un tour dans le sens direct des fonctions h et h_k .

Lemme 2 : h^* est singulière aux points de l'axe réel $\alpha_n = \frac{-1}{12(n+1/2)^2}$, $n \geq 0$ et en 0.

En effet, les singularités de h^* sont les mêmes que celles de $\sum (h_k^* - h_k)$. Un calcul simple fournit pour $\text{Im } z > 0$:

$$(h_k - h_k^*)(z) = 3 \sigma_k x_k^{-7/2} e^{-i\pi/3} \int_{\gamma} e^{iu^3 z/x_k^3} u^{5/2} e^{-e^{i\pi/6} u} du$$

où γ est le chemin réunion des demi-droites d'argument $-2\pi/3$ et 0, orienté de gauche à droite. Posons alors pour $\text{Re } s > 0$:

$$\theta(s) = s^{7/2} \int_{\gamma} e^{-s[t^3 + e^{i\pi/6} t]} t^{5/2} dt$$

on obtient :

$$(h_k - h_k^*)(z) = 3 \sigma_k x_k^{-7/2} e^{-i\pi/3} \theta\left(\left(\frac{i}{2}\right)^{1/2} x_k^{3/2}\right)$$

Le comportement asymptotique de θ pour $\text{Re } s > 0$ est obtenu par la méthode de la phase stationnaire :

$$\theta(s) = \exp\left(\frac{-2}{3\sqrt{3}} e^{-i\pi/4} s\right) s^3 a(s)$$

où a est un symbole analytique régulier de degré 0.

Remarquons que pour a réel négatif, on a $\left(\frac{i}{2}\right)^{1/2} = e^{-i\pi/4} |z|^{-1/2}$. Or

$\sigma_k (-1)^k$ et x_k sont des symboles analytiques réguliers de k de degré respectif $-1/6$ et $2/3$. On est alors ramené à étudier les singularités pour t réel positif de la série définie pour $\text{Im } t > 0$.

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k a_k e^{\frac{2}{3\sqrt{3}} i x_k^{3/2} t} \bar{b}(x_k^{3/2} t)$$

où a_k est un symbole analytique régulier de degré $-15/6$ et $\bar{b}$ un symbole analytique

régulier de degré 3. Le lemme s'en déduit alors, compte tenu de :

$$x_k^{3/2} \simeq \frac{3\pi}{2} k$$

Il reste alors à vérifier que les surfaces Σ_n sont décrites par les équations :

$$u_1 + \frac{1}{12(n+1/2)^2} = 0$$

Compte tenu du fait que u_1 vérifie l'équation eikonale de P, il suffit de vérifier que

$$u_1(0, y, t) + \frac{1}{12} \frac{1}{(n+1/2)^2} = 0$$

est une équation de σ_n ; un calcul simple fournit

$$u_1(0, y, t) = yt^{-3} [1 - 3yt^{-3} - 2(-3yt^{-3})^{1/2}]^{-1} \quad (y < 0, t > 0)$$

ce qui assure le résultat.

Le résultat analogue pour la trace de la dérivée normale, φ , s'obtient plus aisément. En effet, on a :

$$\varphi = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} = \int e^{i(y+t\omega)\eta} e^{i\pi/3} \eta^{5/3} \frac{A_i}{A_i} (e^{i\pi/3} \eta^{2/3} \omega) d\eta d\omega$$

Pour $t_0 > 0$ fixé et pour $\text{Im } y > 0$, on obtient :

$$\varphi(y, t_0) = \int_{k=1}^{+\infty} e^{iy\eta} \sum e^{-e^{i\pi/6} t_0} \eta^{1/3} x_k \eta d\eta$$

et en suivant la preuve du lemme 2, on obtient les singularités du prolongement sur les courbes d'équation $yt^{-3} = \frac{-1}{12k^2}$ $k \geq 1$. C.Q.F.D.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Anderson, Melrose : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n°1 Ecole Polytechnique 1977.
- [2] L. Boutet de Monvel et P. Krée : Pseudo differential operators and Gevrey classes. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 17 (1967).

- [3] G. Eskin : Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n° 12 , Ecole Polytechnique, 1977.
- [4] Friedlander, Melrose : Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 77, 81.
- [5] V. A. Fock : J. Phys. USSR, 9, 225, 1945.
- [6] Handbook of Mathematical functions, National Bureau of standards, Washington, 1964 .
- [7] Sato, Kawai, Kashiwara : L.N. n° 287 (1973), Springer.

*
* *
*