

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

H. BREZIS

Quelques propriétés de l'opérateur de Schrödinger $-\Delta + V$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1977-1978), exp. n° 8,
p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1977-1978____A9_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1977-1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91128 PALAISEAU CEDEX

Téléphone : 941.82.00 - Poste N°

Télex : ECOLEX 691 596 F

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 7 - 1 9 7 8

QUELQUES PROPRIETES DE L'OPERATEUR

DE SCHRÖDINGER - $\Delta + V$

par H. BREZIS

Soit Ω un ouvert quelconque de $\mathbf{R}^n$, avec $n \geq 3$, pour simplifier. Soit $V(x)$ un potentiel réel ou complexe avec des singularités. On considère dans $H = L^2(\Omega)$ l'opérateur non borné $Au = -\Delta u + Vu$.

On cherche à définir convenablement $D(A)$ pour que, sous certaines conditions, A soit m -accrétif, autoadjoint etc...

Ce travail a été fait en collaboration avec T. Kato et les démonstrations détaillées se trouvent dans [2].

§ 1. LE CAS D'UN POTENTIEL REEL

On suppose que V est à valeurs réelles et

$$(1) \quad V \in L^1_{loc}(\Omega)$$

Les résultats principaux sont les suivants :

Théorème 1 : On fait l'hypothèse (1) ainsi que

$$(2) \quad V^- \in L^\infty(\Omega) + L^{n/2}(\Omega).$$

On pose $Au = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(A) = \{u \in H^1_0(\Omega) ; Vu \in L^1_{loc} \text{ et } -\Delta u + Vu \in L^2\}.$$

Alors

i) Il existe $\lambda_0 \in \mathbf{R}$ tel que $A + \lambda_0$ soit m -accrétif
i.e. $-(A + \lambda_0)$ engendre un semi-groupe de contractions.

$$ii) \quad A^* = A.$$

Théorème 1' : On suppose ici que $\Omega = \mathbf{R}^n$. On fait les hypothèses (1), (2)
et

$$(3) \quad V^- \in L^{n/2 + \varepsilon}_{loc} \text{ lorsque } n = 3 \text{ ou } n = 4, \varepsilon > 0 \quad \diamond.$$

* Plus précisément on suppose que pour tout borné B de $\mathbf{R}^n$ il existe $\varepsilon > 0$ (dépendant de B) tel que $V^- \in L^{n/2 + \varepsilon}(B)$.

On pose $\tilde{A}u = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(\tilde{A}) = \{u \in L^2; Vu \in L^1_{\text{loc}} \text{ et } -\Delta u + Vu \in L^2\}$$

Alors $\tilde{A} = A$.

Remarque 1 : Les théorèmes 1 et 1' ne sont pas entièrement nouveaux (cf. les travaux de B. Simon [7], T. Kato [3], [4], [5] et les bibliographies correspondantes) -sauf peut-être en ce qui concerne le théorème 1' lorsque $n=3$ et $n=4$.

Démonstration du théorème 1

Etape 1 : Il existe λ_0 tel que

$$(4) \quad \int V^- |u|^2 \leq \int |\text{grad } u|^2 + \lambda_0 \int |u|^2 \quad \forall u \in H^1_0.$$

En effet on écrit $V^- = V_1 + V_2$ avec $V_1 \in L^\infty$ et $V_2 \in L^{n/2}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \int V^- |u|^2 &\leq \int |V_1| |u|^2 + \int_{|V_2| \leq \delta} |V_2| |u|^2 + \int_{|V_2| > \delta} |V_2| |u|^2 \\ &\leq (\|V_1\|_{L^\infty} + \delta) \|u\|_{L^2}^2 + \|V_2\|_{L^{n/2}(|V_2| > \delta)} \|u\|_{L^{2*}}^2 \end{aligned}$$

avec $\frac{1}{2*} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$.

Comme $V_2 \in L^{n/2}$, on conclut en choisissant δ assez grand, que $\forall \varepsilon > 0$

$\exists C_\varepsilon$ tel que

$$\int V^- |u|^2 \leq \varepsilon \|u\|_{L^{2*}}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{L^2}^2$$

et d'après Sobolev on a

$$(5) \quad \int V^- |u|^2 \leq \varepsilon \|\text{grad } u\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|u\|_{L^2}^2.$$

Plus généralement on a aussi

$$(6) \quad \int V^-|u||v| \leq \varepsilon \|u\|_{H^1} \|v\|_{H^1} + C_\varepsilon \|u\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \quad \forall u, v \in H_0^1$$

Etape 2 : $A + \lambda I$ est surjectif $\forall \lambda > \lambda_0$. En effet, soit $f \in L^2$ et soit

$$V_n^+ = \begin{cases} V^+ & \text{si } V^+ \leq n \\ n & \text{si } V^+ > n \end{cases} . \text{ Soit } u_n \in H_0^1 \text{ l'unique solution de l'équation}$$

$$(7) \quad -\Delta u_n + V_n^+ u_n - V^- u_n + \lambda u_n = f$$

(noter que u_n existe d'après Lax-Milgram). Multipliant (7) par $\overline{u_n}$ on obtient

$$(8) \quad \|u_n\|_{L^2} \leq C$$

$$(9) \quad \int V_n^+(u_n)^2 \leq C$$

$$(10) \quad \|\text{grad } u_n\|_{L^2} \leq C$$

On peut donc extraire une sous-suite, notée encore u_n telle que $u_n \rightharpoonup u$ (faiblement) dans H_0^1 et $u_n \rightarrow u$ p.p.

D'après Fatou et (9) on a $V^+|u|^2 \in L^1$. Il en résulte que $Vu \in L_{loc}^1$; en effet

$$V^+|u| \leq V^+(1 + |u|^2) \in L_{loc}^1$$

et

$$V^-|u| \leq V^-(1 + |u|^2) \in L_{loc}^1$$

Il reste à passer à la limite dans (7) et à montrer que l'on a

$$-\Delta u + Vu + \lambda u = f \text{ au sens de } \mathfrak{D}'.$$

Ceci se déduit du

Lemme 1 : $(V_n^+ - V^-)u_n \rightarrow Vu$ dans L_{loc}^1 .

Démonstration : On applique le lemme de convergence de Vitali. Soit $\omega \subset\subset \Omega$; il faut vérifier que $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ tel que si $E \subset \omega$ et si $|E| < \delta$, alors

$$\int_E |V_n^+ - V^-| |u_n| < \varepsilon \quad \forall n .$$

Or $\forall R > 0$ on a

$$V_n^+ |u_n| \leq \frac{1}{2R} V_n^+ |u_n|^2 + \frac{R}{2} V_n^+ .$$

et par conséquent

$$\int_E V_n^+ |u_n| \leq \frac{1}{2R} C + \frac{R}{2} \int_E V^+ .$$

On choisit d'abord R assez grand pour que $\frac{C}{R}$ et puis $\delta > 0$ assez petit pour que $R \int_E V^+ < \varepsilon$.

Par ailleurs on a

$$\begin{aligned} \int_E V^- |u_n| &\leq \|V^-\|_{L^{n/2}(\omega)} \|u_n\|_{L^{2^*}} |E|^{\frac{1}{2^*}} \\ &\leq C |E|^{1/2^*} \end{aligned}$$

Etape 3 : Pour tout $\lambda > \lambda_c$, $A + \lambda I$ est injectif . En effet, soit $u \in D(A)$ solution de

$$-\Delta u + Vu + \lambda u = 0$$

On utilise maintenant le lemme suivant dû à T. Kato qui joue un rôle crucial.

Lemme 2 [3] : Soit $u \in L_{loc}^1(\Omega)$, avec $\Delta u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Alors

$$\Delta |u| \geq \operatorname{Re} [\Delta u \operatorname{sign} \bar{u}] \quad \text{dans } \mathcal{D}',$$

où $\operatorname{sign} \bar{z} = \frac{\bar{z}}{|z|}$ pour $z \neq 0$ et $\operatorname{sign} 0 = 0$.

Appliquant le lemme 2 on obtient

$$\begin{aligned}\Delta |u| &\geq \operatorname{Re} [(Vu + \lambda u) \operatorname{sign} \bar{u}] = \operatorname{Re} [V|u| + \lambda |u|] \\ &= V|u| + \lambda |u| \geq (-V^- + \lambda) |u| .\end{aligned}$$

Donc il vient

$$\int |u| (-\Delta \zeta - V^- \zeta + \lambda \zeta) \leq 0 \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}_+$$

et par densité $\forall \zeta \in H_0^1$, $\zeta \geq 0$, on a

$$\int \operatorname{grad} |u| \operatorname{grad} \zeta - \int V^- |u| \zeta + \lambda \int |u| \zeta \leq 0 .$$

Choisissant en particulier $\zeta = |u|$, on déduit que $|u| = 0$.

Etape 4 : $A + \lambda_0$ est accréatif.

Démonstration : Soit $f = Au + \lambda_0 u$, soit $g = f + u$ et soit $u_n \in H_0^1$ la solution de

$$-\Delta u_n + V_n^+ u_n - V^- u_n + (\lambda_0 + 1) u_n = g .$$

D'après ce qui précède on sait que $u_n \rightharpoonup u$ dans H_0^1 .

Par ailleurs

$$\operatorname{Re}(g, u_n) \geq \int |u_n|^2$$

et donc à la limite $\operatorname{Re}(f, u) \geq 0$.

Etape 5 : A est autoadjoint. Comme $A + \lambda_0$ est m -accréatif, il suffit de vérifier que A est symétrique, pour en déduire que A est autoadjoint. Soient $u, v \in D(A)$ et soit $\lambda > \lambda_0$. On pose

$$f_1 = Au + \lambda u, \quad g = Av + \lambda v$$

Soient $u_n \in H_0^1$ et $v_n \in H_0^1$ les solutions respectives de

$$-\Delta u_n + V_n^+ u_n - V_n^- u_n + \lambda u_n = f$$

$$-\Delta v_n + V_n^+ v_n - V_n^- v_n + \lambda v_n = g$$

On sait que $u_n \rightharpoonup u$, $v_n \rightharpoonup v$ dans H_o^1 . Il est clair que

$$\int f \overline{v_n} = \int \overline{g u_n}$$

et par suite à la limite

$$(Au + \lambda u, v) = \overline{(Av + \lambda v, u)}$$

$$\text{i.e.} \quad (Au, v) = (u, Av) .$$

Remarque 2 : Lorsque Ω est un ouvert régulier on peut établir le fait suivant :

Soit $T \in H^{-1}(\Omega) \cap L_{loc}^1$ et soit $u \in H_o^1$. On suppose qu'il existe $\varphi \in L^1$ tel que $\text{Re } T \cdot \bar{u} \geq \varphi$ p.p. sur Ω . Alors $\text{Re } T \cdot \bar{u} \in L^1$ et

$$\text{Re} \langle T, u \rangle_{H^{-1}, H_o^1} = \int \text{Re } T \bar{u} \, dx.$$

Il est facile de montrer que $A + \lambda_o$ est accréatif. En effet soit $T = Vu$; on a $\text{Re } T \bar{u} \geq -V^- |u|^2 \in L^1$ et donc $\text{Re} \langle T, u \rangle = \int V |u|^2$. Par suite

$$\begin{aligned} \text{Re}(-\Delta u + Vu + \lambda_o u, u) &= \text{Re} \langle -\Delta u + Vu + \lambda_o u, u \rangle = \\ &= \int |\text{grad } u|^2 + \lambda_o \int |u|^2 + \int V |u|^2 \geq 0 \end{aligned}$$

Nous ne savons pas si cet argument est valable en général lorsque Ω n'est pas régulier.

Démonstration du théorème 1' : Il est clair que $A \subset \tilde{A}$. Soit $u \in D(\tilde{A})$ et posons $f = \tilde{A}u + \lambda u$. Soit $u^* \in D(A)$ l'unique solution de

$$f = Au^* + \lambda u^* .$$

On a par conséquent $\tilde{A}(u - u^*) + \lambda(u - u^*) = 0$ et il suffit de montrer que $\tilde{A} + \lambda I$ est injectif. Appliquant le lemme 2 on obtient

$$-\Delta|u| - V^-|u| + \lambda|u| \leq 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'.$$

On conclut alors à l'aide du

Lemme 3 : On fait les hypothèses (1), (2) et (3) . Soit $u \in L^2$ tel que $V^-u \in L^1_{\text{loc}}$ et

$$-\Delta u - V^-u + \lambda u \leq 0 \quad \text{au sens de } \mathcal{D}' \text{ avec } \lambda > \lambda_0 .$$

Alors $u \leq 0$ p.p.

Remarque 3 : La conclusion du lemme 3 tombe en défaut si l'on ne fait pas l'hypothèse (3) : Ancona [1] a construit des exemples de fonctions $u \in L^2$ dans $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$, et de fonctions $V^- \in L^{n/2}$ telles que $V^-u \in L^1_{\text{loc}}$,

$$-\Delta u - V^-u + \lambda u = 0$$

et néanmoins $u \not\equiv 0$.

Pour établir le lemme 3 on étudie les propriétés de la solution du problème adjoint :

Théorème 2 : Soit $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. On fait l'hypothèse (2). Soit $g \in L^2 \cap L^\infty$ et soit $\psi \in H^1_0$ l'unique solution de

$$(11) \quad -\Delta \psi - V^- \psi + \lambda \psi = g, \quad \lambda > \lambda_0$$

Alors

- i) $g \geq 0 \Rightarrow \psi \geq 0$
- ii) $\psi \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} L^p$

Principe de la démonstration

i) Multipliant (11) par $-\psi^-$ on a

$$\int |\text{grad } \psi^-|^2 + \lambda \int |\psi^-|^2 \leq \int V^- |\psi^-|^2$$

D'où il résulte que $\psi^- = 0$.

ii) Supposons $g \geq 0$, de sorte que $\psi \geq 0$. Multipliant (11) par ψ^{p-1} ($p \geq 2$) on obtient

$$(12) \quad (p-1) \int \psi^{p-2} |\text{grad } \psi|^2 \leq \int g \psi^{p-1} + \int V^- \psi^p$$

[cette opération qui n'est pas licite puisque $\psi^{p-1} \notin H_0^1$ peut être justifiée par des troncatures].

On déduit de (12) que

$$\frac{4(p-1)}{p^2} \int |\text{grad } \psi^{p/2}|^2 \leq \|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \varepsilon \|\psi\|_{L^{\frac{2^*}{2}p}}^p + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^p}^p$$

Par conséquent

$$\frac{C(p-1)}{p^2} \|\psi\|_{L^{\frac{2^*}{2}p}}^p \leq \|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \varepsilon \|\psi\|_{L^{\frac{2^*}{2}p}}^p + C_\varepsilon \|\psi\|_{L^p}^p$$

et choisissant ε assez petit (dépendant de p) on voit que

$$\begin{aligned} \|\psi\|_{L^{\frac{2^*}{2}p}}^p &\leq C_p (\|g\|_{L^p} \|\psi\|_{L^p}^{p-1} + \|\psi\|_{L^p}^p) \\ &\leq C'_p (\|g\|_{L^p}^p + \|\psi\|_{L^p}^p) . \end{aligned}$$

Ce procédé réitéré permet ainsi de montrer que $\psi \in \bigcap_{2 \leq p < \infty} L^p$.

Démonstration du lemme 3 : On a

$$(13) \quad \int |u| (-\Delta \varphi - V^- \varphi + \lambda \varphi) \leq 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}_+$$

Utilisant un procédé de régularisation par convolution on voit aisément que (13) a encore lieu pour $\varphi \in H^2 \cap L^\infty$ avec $\text{Supp } \varphi$ compact, $\varphi \geq 0$.

On choisit alors $\varphi = \zeta_k(x) \psi_n(x)$ où $\zeta_k(x) = \zeta_0(\frac{x}{k})$ avec $\zeta_0 \in \mathcal{D}_+$, $\zeta_0(x) = 1$ pour $|x| \leq 1$ et ψ_n est la solution de

$$\psi_n \in H_0^1$$

$$(14) \quad -\Delta \psi_n - V_n^- \psi_n + \lambda \psi_n = g \in \mathcal{D}_+$$

De sorte que $\psi_n \in H^2 \cap L_{loc}^\infty$ et $\psi_n \geq 0$. On a

$$\begin{aligned} -\Delta \varphi - V^- \varphi + \lambda \varphi &= -(\Delta \zeta_k) \psi_n - 2 \operatorname{grad} \zeta_k \operatorname{grad} \psi_n \\ &- \zeta_k [\lambda \psi_n - V_n^- \psi_n - g] - V^- \zeta_k \psi_n + \lambda \zeta_k \psi_n \end{aligned}$$

Reportant $\varphi = \zeta_k \psi_n$ dans (13) on a

$$\begin{aligned} \int g |u| \zeta_k &\leq \frac{C}{k^2} \int |u| \psi_n + \frac{C}{k} \int |u| |\operatorname{grad} \psi_n| + \int |u| \zeta_k \psi_n (V^- - V_n^-) \\ &\leq \frac{C}{k^2} + \frac{C}{k} + \int |u| \zeta_k \psi_n (V^- - V_n^-) \end{aligned}$$

On fixe d'abord k et on fait $n \rightarrow \infty$. Dans $\mathbf{R}^3$ et $\mathbf{R}^4$, l'hypothèse (3), jointe au théorème 2 garantit que $\|\psi_n\|_{L_{loc}^\infty}$ reste borné. On conclut alors

à l'aide de Lebesgue que

$$\int g |u| \zeta_k \leq \frac{C}{k^2} + \frac{C}{k}$$

et puis que $\int g |u| \leq 0$ en faisant $k \rightarrow \infty$. Pour $\mathbf{R}^n$, $n \geq 5$, on sait que $V_n^- - V^- \rightarrow 0$ dans $L^{n/2}$ et que $\|\psi_n\|_{L^p}$ reste borné pour tout $2 \leq p < \infty$.

On en déduit que $\int |u| \zeta_k \psi_n (V^- - V_n^-) \rightarrow 0$ et puis que $\int g |u| \leq 0$ en faisant $k \rightarrow \infty$.

§ 2 LE CAS DES POTENTIELS COMPLEXES

Soient $q, q' \in L_{loc}^1$ des fonctions à valeurs réelles. On pose

$$V = q + iq'$$

On fait les hypothèses

$$(15) \quad q' \in L_{loc}^{1+\varepsilon} \quad \underline{\text{ou bien}} \quad q^- \in L_{loc}^{\frac{n}{2}+\varepsilon} \quad \text{avec } \varepsilon > 0$$

$$(16) \quad q^- \in L^\infty + L^{n/2}$$

Les résultats principaux sont les suivants

Théorème 3 : On fait les hypothèses (15) et (16). On pose

$$A_0 u = -\Delta u + Vu \text{ avec}$$

$$D(A_0) = \{u \in H_0^1; Vu \in L_{loc}^1, -\Delta u + Vu \in L^2\}$$

Alors A_0 est fermable dans L^2 et il existe λ_0 tel que $\bar{A}_0 + \lambda_0$ soit m-accrétif.

Théorème 3' : On suppose que $\Omega = \mathbb{R}^n$. On fait les hypothèses (15), (16) et $q^- \in L_{loc}^{n/2+\varepsilon}$ lorsque $n=3$ ou $n=4$. On définit $A_1 u = -\Delta u + Vu$ avec

$$D(A_1) = \{u \in L^2; Vu \in L_{loc}^1 \text{ et } -\Delta u + Vu \in L^2\}.$$

Alors A_1 est fermable et $\bar{A}_1 = \bar{A}_0$.

Les théorèmes 3 et 3' généralisent des résultats antérieurs de Nelson [6] et Kato [5]. Les démonstrations sont très voisines de celles indiquées précédemment ; on trouvera les détails dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Ancona : A paraître.
- [2] H. Brézis, T. Kato : A paraître.
- [3] T. Kato : Schrödinger operators with singular potentials, Israel J. Math. 13 (1972) p.135-148.
- [4] T. Kato : A second look at selfadjointness of the Schrödinger operator, Physical Reality and Math. Description, D. Reidel Publ. Co. 1974 p.193-201.
- [5] T. Kato : On some Schrödinger operators with singular complex potentials, à paraître.
- [6] E. Nelson : Feynman integrals and the Schrödinger equation, J. Math. Phys. 5 (1964) p.332-343.
- [7] B. Simon : Essential selfadjointness of Schrödinger operators with positive potentials, Math. Ann. 201 (1973) p.211-220.