G. Métivier

Valeurs propres de systèmes elliptiques définis sur des sous espaces

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1975-1976), exp. n° 8, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976____A9_0>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISEAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

SEMINAIRE GOULAOUIC-SCHWARTZ 1975-1976

VALEURS PROPRES DE SYSTEMES ELLIPTIQUES DEFINIS SUR DES SOUS ESPACES

G. METIVIER

Exposé n° VIII

6 Janvier 1976

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. On donne ici une formule asymptotique pour les valeurs propres de problèmes du type :

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} &Au = \lambda u + B^* p \\ &Bu = 0 \end{aligned}\right\} \text{ sur } \Omega \\ \text{Conditions aux limites sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

où A et B sont des matrices d'opérateurs différentiels d'ordre respectif $N \times N$ et $J \times N$, et avec $u \in \{L^2(\Omega)\}^N$ et $p \in \{\mathcal{D}'(\Omega)\}^J$.

En fait nous supposerons que notre problème provient d'un problème variationnel (explicité ci-dessous).

Une première idée serait de se ramener à un véritable système elliptique (cas $J = 0$) ce qui semblerait possible si Ω était une variété compacte sans bord, mais ce qui parait poser des problèmes non uniquement techniques du fait de la conjonction des conditions $Bu = 0$ et des conditions aux limites.

Nous allons donc aborder le problème de manière directe, ce qui nous permet en outre de ne faire que peu d'hypothèses de régularité sur les coefficients des opérateurs A et B.

§ 1. NOTATIONS - RESULTAT

Soit Ω un ouvert borné lipschitzien de $\mathbb{R}^n$. On note $H^k(\Omega)$ l'espace de Sobolev usuel d'ordre k sur Ω.

On se donne des entiers $N > J \geq 1$, $m \geq 1$ et $0 \leq m_j \leq m$ pour $j = 1,\dots,J$. On définit les espaces :

$$L(\Omega) = \{L^2(\Omega)\}^N \; ; \; W(\Omega) = \{H^m(\Omega)\}^N \; ; \; X(\Omega) = \prod_{j=1}^{J} H^{m_j}(\Omega)$$

On note $W_o(\Omega)$ [resp $X_o(\Omega)$] l'adhérence de $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^N$ [resp $\{\mathcal{D}(\Omega)\}^J$] dans $W(\Omega)$ [resp $X(\Omega)$].

Soit B l'opérateur de $W(\Omega)$ dans $X(\Omega)$ défini par :

$$B(u_1,\dots,u_N) = \Big(\sum_{p=1}^{N}\ \sum_{|\alpha|\le m-m_j} b^{\alpha}_{j,p}(x).D^{\alpha}u_p\Big)_{j=1,\dots,J}$$

où $b^{\alpha}_{j,p}(x)$ est de classe $C^{m_j}(\bar\Omega)$. On note $B'(x,\xi)$ la matrice de coefficients :

$$\sum_{|\alpha|=m-m_j} b^{\alpha}_{j,p}(x).\xi^{\alpha} \qquad j=1,\dots,J\ ;\ p=1,\dots,N.$$

Soit a la forme hermitienne continue sur $W(\Omega)$ définie par :

$$a((u_1,\dots,u_N),(v_1,\dots,v_N)) = \sum_{1\le p,q\le N}\ \sum_{\substack{|\alpha|\le m\\|\beta|\le m}} \int_{\Omega} a^{\alpha,\beta}_{p,q}(x).D^{\alpha}u_p(x).\overline{D^{\beta}v_q(x)}.dx$$

où $a^{\alpha,\beta}_{p,q} = \overline{a^{\beta,\alpha}_{q,p}}$ est dans $L^{\infty}(\Omega)$ et dans $C^{o}(\bar\Omega)$ si $|\alpha| = |\beta| = m$. On note $A'(x,\xi)$ la matrice de coefficients :

$$\sum_{|\alpha|=|\beta|=m} a^{\alpha,\beta}_{p,q}(x).\xi^{\alpha+\beta} \qquad p,q=1,\dots,N.$$

Soit enfin W_1 un sous espace fermé de $W(\Omega)$, contenant $W_o(\Omega)$ et l'on définit $V_1 = \{u\in W_1 / Bu = 0\}$.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

(H.1) $\forall(x,\xi)\in\bar\Omega\times(\mathbb{R}^n\setminus 0)$ rang $B'(x,\xi) = J$

(H.2) $\forall(x,\xi)\in\partial\Omega\times(\mathbb{C}^n\setminus 0)$ rang $B'(x,\xi) = J$

(H.3) $\exists\, c_o > 0,\ \exists\lambda_o,\ \exists\tau_o : \forall u\in W_1$

$$c_o\|u\|^2_{W(\Omega)} \le a(u,u) + \tau_o\|Bu\|^2_{X(\Omega)} + \lambda_o\|u\|^2_{L(\Omega)} .$$

(H.3) implique la coercivité de a sur V_1 ; elle équivaut à cette coercivité si BW_1 est un sous espace fermé de $X(\Omega)$.

On déduit de (H.3), comme pour l'inégalité de Gårding, (cf.[4] [1]), que l'on a en notant $B'^{*}(x,\xi)$ la matrice adjointe de $B'(x,\xi)$:

Lemme 1 : Il existe $\tau_1 \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times S^{n-1}$ la matrice hermitienne $A'(x,\xi) + \tau_1 B'^*(x,\xi).B'(x,\xi)$ est définie positive.

Pour $(x,\xi) \in \overline{\Omega} \times (\mathbb{R}^n \setminus 0)$, soit $P(x,\xi)$ le projecteur orthogonal dans $\mathbb{C}^N$ sur $\mathrm{Ker}\, B'(x,\xi)$:

$$P(x,\xi) = \mathrm{Id} - (B'^*.(B'.B'^*)^{-1}.B')(x,\xi)$$

La matrice $(P\,A'\,P)(x,\xi)$ a alors $N-J$ valeurs propres non nulles, qui sont strictement positives :

$$0 < \lambda_1(x,\xi) \leq \lambda_2(x,\xi) \leq \ldots \leq \lambda_{N-J}(x,\xi).$$

On vérifie que les fonctions $(x,\xi) \mapsto \lambda_k(x,\xi)$ sont continues et homogènes en ξ de degré $2m$. Notant $\nu(x,\xi) = \sum_{\lambda_k(x,\xi) \leq 1} 1$, on a :

Lemme 2 : La fonction $x \mapsto \rho(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \nu(x,\xi)\, d\xi$ est continue de $\overline{\Omega}$ dans $]0,\infty[$.

Revenant au problème variationnel $(V_1, L(\Omega), a)$ on lui associe un opérateur autoadjoint semi-borné dans L_1, l'adhérence de V_1 dans $L(\Omega)$. Son spectre est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j (répétées selon leur multiplicités) réelles et tendant vers $+\infty$.

Théorème : Sous les hypothèses précédentes on a :

$$N(\lambda) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1 \sim \lambda^{n/2m}.\, \{(2\pi)^{-n} \int_{T^*\Omega} \nu(x,\xi)\, dx.d\xi\}$$

l'intégrale étant finie et non nulle grâce au lemme 2.

§ 2. LE SYSTEME B

Nous aurons besoin du résultat suivant.

Proposition 1 : Sous les hypothèses (H.1) et (H.2), $B W_o(\Omega)$ est de codimension finie dans $X_o(\Omega)$.

On obtient cette proposition par transposition ; on introduit les espaces

$$W'(\Omega) = \{H^{-m}(\Omega)\}^N \; ; \; X'(\Omega) = \prod_{j=1}^{J} H^{-m_j}(\Omega) \; ; \; Z'(\Omega) = \prod_{j=1}^{J} H^{-m_j-1}(\Omega).$$

L'opérateur C de $X'(\Omega)$ dans $W'(\Omega)$ transposé de B, est :

$$C(f_1,\ldots,f_J) = \Big(\sum_{j=1}^{J} \sum_{|\alpha|\le m-m_j} D^\alpha b^\alpha_{j,p} f_j\Big)_{p=1,\ldots,N} .$$

Notons $C'_{p,j} = \displaystyle\sum_{|\alpha|=m-m_j} D^\alpha(b^\alpha_{j,p}\,.)$ pour $p = 1,\ldots,N$; $j = 1,\ldots,J$.

La proposition équivaut à l'estimation suivante :

$$(1) \quad \forall f \in X'(\Omega) \quad : \quad \|f\|_{X'(\Omega)} \le \gamma\{\|C f\|_{W'(\Omega)} + \|f\|_{Z'(\Omega)}\}$$

Par partition de l'unité et figeage des coefficients, cette estimation résulte des deux lemmes :

Lemme 3 : Si $B'(x,\xi)$ est constant en x, et si (H.1) a lieu alors pour tout compact K inclus dans Ω il existe une constante γ, telle que (1) ait lieu pour tout f de $X'(\Omega)$ à support dans K.

Lemme 4 : Si $B'(x,\xi)$ est constant en x (H.2) équivaut à (1).

Démonstration du lemme 3 : Par transformation de Fourier, on déduit de (H.1) que :

$$\forall f \in X'(\mathbb{R}^n) \quad \|f\|_{X'(\mathbb{R}^n)} \le \gamma\{\|Cf\|_{W'(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{Z'(\mathbb{R}^n)}\}$$

Il suffit alors de remarquer que, pour f de $H^{-k}(\Omega)$ à support dans K, $\tilde{f}$ le prolongement de f par 0 en dehors de Ω est dans $H^{-k}(\mathbb{R}^n)$ et que les normes $\|f\|_{H^{-k}(\Omega)}$ et $\|\tilde{f}\|_{H^{-k}(\mathbb{R}^n)}$ sont équivalentes.

Démonstration du lemme 4 : Si (1) a lieu, en l'appliquant aux fonctions $f.e^{i\rho x.\xi}$ ($f \in \mathbb{C}^J$, $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus 0$, $\rho \in \mathbb{R}$), on obtient (H.2) en faisant tendre ρ vers $+\infty$.

Inversement, comme en [1], [6], [7], on déduit de (H.2) par le Nullstellensatz de Hilbert, qu'il existe un entier $\nu \geq 0$, et des opérateurs différentiels $R^{\alpha}_{j,p}$ pour $j = 1,\dots,J$, $p = 1,\dots,N$, $\alpha \in \mathbb{N}^n$ et $|\alpha| = \nu$, d'ordre $\nu - m + m_j$, tels que :

$$\forall f = (f_1,\dots,f_J) \in X'(\Omega) : \sum_{p=1}^{N} \sum_{k=1}^{J} R^{\alpha}_{j,p}(D_x).C'_{p,k}(D_x).f_k = D^{\alpha} f_j$$

et par suite :

$$\|D^{\alpha} f_j\|_{H^{-\nu-m_j}(\Omega)} \leq \gamma \sum_{p=1}^{N} \Big\| \sum_{k=1}^{J} C'_{p,k} f_k \Big\|_{H^{-m}(\Omega)} .$$

Le lemme 4 résulte alors du résultat suivant démontré en [6] (on pourrait poursuivre comme en [1] [7] en utilisant la représentation de Sobolev).

Lemme 5 : Si Ω est un ouvert borné lipschitzien pour tous entiers $\nu \geq 0$ et k, il existe une constante γ telle que :

$$\forall\, f \in H^{-k}(\Omega) : \|f\|_{H^{-k}(\Omega)} \leq \gamma \Big\{ \sum_{|\alpha|=\nu} \|D^{\alpha} f\|_{H^{-k-\nu}(\Omega)} + \|f\|_{H^{-k-\nu}(\Omega)} \Big\} .$$

Remarques 1 : La condition (H.1) est nécessaire pour obtenir (1).

2 : On peut démontrer de manière similaire que (H.1) est nécessaire et suffisante pour que $BW(\Omega)$ soit de codimension finie dans $X(\Omega)$.

§ 3. VALEURS PROPRES DE PROBLEMES VARIATIONNELS

Etant donnés deux espaces de Hilbert V et H, V s'injectant avec injection compacte dans H, on sait associer à toute forme a, hermitienne continue et coercive sur V, un opérateur autoadjoint semi-borné dans $\bar{V}$, adhérence de V dans H ; le spectre de cet opérateur est constitué d'une suite de valeurs propres λ_j $(j = 1, \ldots)$ réelles et tendant vers $+\infty$ (chaque valeur propre est répétée selon sa multiplicité). On note alors :

$$N(\lambda; V, H, a) = \sum_{\lambda_j \leq \lambda} 1.$$

D'autre part, dans la même situation, posant t réel $S_{a+t} = \{u \in V \ / \ a(u,u) + t\|u\|_H^2 \leq 1\}$ et notant $\lambda_n(S_{a+t})$ $(n = 0, 1, \ldots)$ le n-ième diamètre au sens de Kolmogorov ([2]) de S_{a+t} dans H, on sait ([2],[3]) que pour t assez grand, on a :

$$(2) \qquad \forall\, j = 0, 1, \ldots \qquad \lambda_{j+1} = \{d_j(S_{a+t})\}^{-2} - t$$

On introduit la notation suivante : pour s > 0 on définit les "nombres" de $[0, \infty]$:

$$N_s^+(V,H,a) = \limsup_{\lambda \to +\infty} \lambda^{-s}.N(\lambda; V, H, a)$$

$$N_s^-(V,H,a) = \liminf_{\lambda \to +\infty} .\lambda^{-s}.N(\lambda; V, H, a).$$

Si a est le produit scalaire de V, on notera simplement $N_s^{\pm}(V,H)$.

On déduit aisément de (2) la :

Proposition 2 : Soient a et a_1 deux formes hermitiennes continues et coercives sur V, telles que pour $\varepsilon < 1$ et t réel, on ait :

$$\forall u \in V \quad : \quad |a(u,u) - a_1(u,u)| \leq \varepsilon . a(u,u) + t\|u\|_H^2$$

Alors pour tout s > 0 on a :

$$(1-\varepsilon)^s N_s^{\pm}(V,H,a_1) \leq N_s^{\pm}(V,H,a) \leq (1+\varepsilon)^s N_s^{\pm}(V,H,a_1) .$$

Considérons maintenant la situation suivante : soient $W \hookrightarrow H$ deux espaces de Hilbert, l'injection de W dans H étant compacte. Soit a une forme hermitienne continue et coercive sur W : on suppose que pour des constantes γ_1, γ_2, t_1 et t_2 on a pour tous u et v de W :

$$\begin{cases} |a(u,v)| \leq \gamma_1(\|u\|_W^2 + t_1\|u\|_H^2)^{1/2}(\|v\|_W^2 + t_1\|v\|_H^2)^{1/2} \\ \|u\|_W^2 \leq \gamma_2(a(u,u) + t_2\|u\|_H^2). \end{cases}$$

On se donne d'autre part un opérateur continu B de W dans un espace de Hilbert X. On note $V = \{u \in W / Bu = 0\}$. Soit V_1 un sous espace de W, tel que pour des constantes ε et τ on ait :

$$\forall u \in V_1 \;:\; \|Bu\|_X \leq \varepsilon(\|u\|_W^2 + \tau\|u\|_H^2)^{1/2}$$

On suppose de plus qu'il existe un opérateur R défini sur un sous-espace X_1 de X à valeurs dans W et des constantes γ_0 et t_0, tels que :

$$\begin{cases} BV_1 \subset X_1 \quad ; \quad B \circ R = Id_{X_1} \\ \forall f \in X_1 \quad \|Rf\|_W \leq \gamma_0\|f\|_X + t_0\|Rf\|_H. \end{cases}$$

Nous avons alors :

<u>Proposition 3</u> : Sous les hypothèses précédentes, il existe ε_0 et γ ne dépendant que de γ_0, γ_1 et γ_2. tels que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ on a pour tout $s > 0$:

$$N_s^{\pm}(V_1,H,a) \leq (1+\gamma\sqrt{\varepsilon})^s N_s^{\pm}(V,H,a) + (\gamma\,\varepsilon)^s N_s^{+}(W,H).$$

<u>Démonstration</u> : Soit $\delta > 0$, assez petit. Il existe un sous-espace E de codimension $N(\delta^{-2};W,H)$ dans W tel que :

$$\forall u \in E\setminus 0 \;:\; \|u\|_H < \delta\|u\|_W .$$

Soit $\lambda > 0$. il existe un sous-espace F de codimension $N(\lambda;V,H,a)$ dans V, tel que :

$$\forall\ v \in F \setminus 0 \qquad \|v\|_H^2 < \lambda^{-1}\ a(v,v)$$

On déduit alors des différentes hypothèses que si $u \in V_1$ est tel que : $RBu \in E$, $u - RBu \in F$, alors :

$$\lambda_1 \|u\|_H^2 < a(u,u) + \tau_1 \|u\|_H^2$$

avec $\lambda_1 = \lambda\{\sqrt{1 + 9\gamma_o \gamma_1 \gamma_2 \varepsilon} + 2\gamma_o \sqrt{\gamma_2} . \varepsilon\ \delta\sqrt{\lambda}\}^{-2}$.

On choisit alors δ de la forme. $\gamma\ \varepsilon^{-1/2} . \lambda^{-1/2}$, et la proposition résulte alors par passage à la limite de l'inégalité :

$$N(\lambda_1 - \tau_1\ ; V_1, H, a) \leq N(\lambda; V, H, a) + N(\delta^{-2}; W, H).$$

§ 4. DEMONSTRATION DU THEOREME

Nous nous plaçons sous les hypothèses du paragraphe 1, mais quitte à changer a en $a + \tau_o((B.,B.))_{X(\Omega)}$, ce qui ne change pas la restriction de a à V_1, nous supposons de plus que a est coercive sur W_1.

Soient Ω_i $(i = 1,\dots,k)$ des pavés inclus dans Ω. Soit ω un ouvert tel que $\overline{\Omega} \subset (\bigcup_{i=1}^{k} \Omega_i) \cup \omega$; on pose $\Omega_o = \omega \cap \Omega$; on supposera Ω_o lipschitzien. Soient $\varphi_i \in \mathcal{D}(\Omega_i)$ $(i = 1,\dots,k)$ et $\varphi_o \in \mathcal{D}(\omega)$ telles que $\sum_{i=o}^{k} \varphi_i^2(x) = 1$ sur $\overline{\Omega}$.

Pour $i = 1,\dots,k$, notons $W^i_{\#}$ [resp $X^i_{\#}$] le sous espace de $W(\Omega_i)$ [resp $X(\Omega_i)$] des fonctions périodiques. On se fixe pour $i = 1,\dots,k$, $x_i \in \Omega_i$. Soit B^i l'opérateur :

$$B^i(u_1,\dots,u_N) = \Big(\sum_{p=1}^{N} \sum_{|\alpha| = m - m_j} b^{\alpha}_{j,p}(x_i) . D^{\alpha} u_p\Big)_{j=1,\dots,J} .$$

Soit a^i la forme :

$$a^i((u_1,\dots,u_N).(v_1,\dots,v_N)) = \sum_{1 \leq p,q \leq N} \ \sum_{|\alpha| = |\beta| = m} a^{\alpha,\beta}_{p,q}(x_i) \int_{\Omega_i} D^{\alpha} u_p . D^{\beta} v_q . dx$$

En développant les fonctions en séries de Fourier, on vérifie grâce au lemme 1 que a^i est coercive sur l'espace $V^i = \{u \in W^i_\# / B^i u = 0\}$. On a de plus :

<u>Proposition 4</u> : $B^i W^i_\#$ est de codimension J dans $X^i_\#$. De plus il existe un inverse à droite R^i de B^i, défini et continu de $B^i W^i_\#$ dans $W^i_\#$, et dont la norme est majorée par une constante γ_o, indépendante du choix des Ω_i et des x_i. Enfin, on a l'estimation :

$$N(\lambda; V^i, L(\Omega_i), a^i) \sim \lambda^{n/2m} \,.\, \rho(x_i).\mathrm{mes}\,\Omega_i \,.$$

Nous "recollons" maintenant les estimations de la proposition 4 grâce à la partition de l'unité φ_i de la manière suivante : on définit d'abord les espaces :

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{i=o}^{k} L(\Omega_i) \;:$$

$$\mathcal{W} = \{ \bigoplus_{i=o}^{k} F^i \in \mathcal{L} / F^i \in W^i_\# \text{ pour } i = 1,\ldots,k, \text{ et } \widetilde{F^o} \in W(\Omega)\}$$

$$\mathcal{W}_1 = \{ \bigoplus_{i=0}^{k} F^i \in \mathcal{W} / \widetilde{F^o} \in W_1\} \quad ,$$

où $\widetilde{F}^o$ désigne le prolongement de F^o par 0 sur $\Omega \backslash \Omega_o$.

Soient T et S les opérateurs de $L(\Omega)$ dans $\mathcal{L}$ et de $\mathcal{L}$ dans $L(\Omega)$:

$$Tu = \bigoplus_{i=0}^{k} \varphi_i u \quad ; \quad S(\bigoplus_{i=0}^{k} F^i) = \sum_{i=o}^{k} \widetilde{\varphi_i F^i}$$

où $\widetilde{\varphi_i F^i}$ désigne le prolongement de $\varphi_i F^i$ par 0 sur $\Omega \backslash \Omega_i$.

T est une isométrie de $L(\Omega)$ dans $\mathcal{L}$, $P = T \circ S$ est le projecteur orthogonal de $\mathcal{L}$ sur $TL(\Omega)$ et $\delta \circ T = Id_{L(\Omega)}$. De plus T [resp S] est continu de $W(\Omega)$ dans $\mathcal{W}$ et de W_1 dans $\mathcal{W}_1$ [resp de $\mathcal{W}$ dans $W(\Omega)$ et de $\mathcal{W}_1$ dans W_1].

On définit sur $\mathcal{W}$ les formes :

$. \ \tilde{a}(\overset{k}{\underset{i=0}{\oplus}} F^i, \overset{k}{\underset{i=0}{\oplus}} G^i) = a(\tilde{F}^o,\tilde{G}^o) + \sum_{i=1}^{k} a^i(F^i,G^i)$

$\tilde{a}_1(F,G) = a(SF,SG) + \tilde{a}((1-P)F,(1-P)G).$

de sorte que l'on a :

(3) $$N(\lambda;V_1,L(\Omega),a) = N(\lambda;TV_1,\mathcal{L},\tilde{a}_1).$$

On a les estimations suivantes :

- $|\tilde{a}(F,G)| \leq \gamma_1 \|F\|_{\mathcal{W}} \cdot \|G\|_{\mathcal{W}}$.
- $|\tilde{a}(F,F) - \tilde{a}_1(F,F)| \leq \gamma_2 \varepsilon \|F\|^2_{\mathcal{W}} + t_2 \|F\|^2_{\mathcal{L}}$
- $\forall F \in \mathcal{W}_1 \qquad \|F\|^2_{\mathcal{W}} \leq \gamma_3 \tilde{a}(F,F) + t_3 \|F\|^2_{\mathcal{L}}$

où les γ_i désignent ici, et il en sera de même par la suite, des constantes indépendantes du choix des Ω_i et des x_i et où ε est un majorant de l'oscillation sur les pavés ω_i $(i=1,\dots,k)$ des $a^{\alpha,\beta}_{p,q}$ pour $|\alpha| = |\beta| = m$ et des $b^{\alpha}_{j,p}$ pour $|\alpha| = m - m_j$.

Par la proposition 2, on en déduit que pour ε assez petit :

$$N^+_s(V_1,L(\Omega),a) \leq (1-\gamma_2\gamma_3\varepsilon)^{-s} N^+_s(TV_1,\mathcal{L},\tilde{a}).$$

Soit maintenant $\mathcal{B}$ l'opérateur de $\mathcal{W}$ dans $\mathcal{X} = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} X^i_{\#}$:

$$\mathcal{B}(\overset{k}{\underset{i=o}{\oplus}} F^i) = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} B^iF^i .$$

Notons $\mathcal{V}_1 = \{F \in \mathcal{W} / \mathcal{B}F = 0\}$. Par la proposition 4 $\mathcal{B}\mathcal{W}$ est de codimension finie, et il existe un inverse à droite de $\mathcal{B}$, $\mathcal{R} = \overset{k}{\underset{i=1}{\oplus}} R^i$, continu de $\mathcal{B}\mathcal{W}$ dans $\mathcal{W}_1$. On a :

$$\begin{cases} - \ \|\mathcal{R}\mathcal{B}F\|_{\mathcal{W}} \leq \gamma_o \|\mathcal{B}F\|_{\mathcal{X}} \\ - \ \forall u \in V_1 : \|\mathcal{B}Tu\|_{\mathcal{X}} \leq \gamma_4 \varepsilon \|Tu\|_{\mathcal{W}} + t_4 \|Tu\|_{\mathcal{L}} \end{cases}$$

Ces estimations nous permettent d'appliquer la proposition 3 pour obtenir :

$$N_s^+(TV_1,\mathcal{L},\tilde{a}) \le (1+\sqrt{\gamma_5\varepsilon})^s N_s^+(\mathcal{V}_1,\mathcal{L},\tilde{a}) + (\gamma_5\varepsilon)^s N_s^+(\mathcal{W}_1^-,\mathcal{L}).$$

On utilise enfin la proposition 4 et le lemme suivant : ([5], [1]

<u>Lemme 6</u> : Il existe une constante C(m) telle que pour tout ouvert borné lipschitzien U, on a pour $s = n/2m$:

$$N_s^{\pm}(H^m(U),\ L^2(U)) = C(m).\mathrm{mes}\ U$$

pour obtenir si $s = n/2m$:

$$N_s^+(V_1,L(\Omega),a) \le (1+\gamma_6\sqrt{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{k} \rho(x_i).\mathrm{mes}\,\Omega_i + \gamma_7\ \mathrm{mes}\ \Omega_o. \tag{4}$$

Soit d'autre part $\tilde{\mathcal{V}}_1 = \{F \in \mathcal{W}_1^- \ /\ BSF = 0\}$. On a clairement $\tilde{\mathcal{V}}_1 = TV_1 \oplus (1-P)\mathcal{W}_1^-$, et avec (3) :

$$N(\lambda;\tilde{\mathcal{V}}_1,\mathcal{L},\tilde{a}_1) = N(\lambda;V_1,L(\Omega),a) + N(\lambda;(1-P)\mathcal{W}_1^-,\mathcal{L},\tilde{a}).$$

Par la proposition 1, il existe un opérateur R_o de $BW_o(\Omega)$ dans $W_o(\Omega)$ tel que : $BR_o = \mathrm{Id}$. On a de plus :

$$\forall f \in BW_o(\Omega) : \|TR_o\rho\|_{\mathcal{W}_1} \le \gamma_8\|f\|_{X(\Omega)} + t_8\|TR_of\|_{\mathcal{L}} .$$

Soit $\mathcal{V}_o = \{\bigoplus_{i=o}^{k} F^i \in \mathcal{V}_1 / F^o = 0\}$. Pour $F \in V_o$ on a $SF \in W_o(\Omega)$ et :

$$\|BSF\|_{X(\Omega)} \le \gamma_9.\varepsilon\|F\|_{\mathcal{W}} + t_9\|F\|_{\mathcal{L}}$$

On applique alors les propositions 2, 3 et 4 et lemme 6 pour obtenir pour $s = n/2m$:

$$N_s^-(V_1,L(\Omega),a) \ge (1-\gamma_{10}\sqrt{\varepsilon}) \sum_{i=1}^{k} \rho(x_i).\mathrm{mes}\,\Omega_i - \gamma_{11}\ \mathrm{mes}\ \Omega_o - N_s^+((1-P)\mathcal{W}_1^-,\mathcal{L}) \tag{5}$$

On remarque enfin que pour $F = \bigoplus_{i=o}^{k} F^i \in (1-P)\mathcal{W}_1^-$:

$$\operatorname{supp} F^{i} \subset \overline{\Omega_{i} \cap \left(\bigcup_{j \neq i} \Omega_{j} \right)}$$

et par suite, avec le lemme 6 :

(6) $$N_{s}^{+}((1-P)\mathcal{U}_{1}.\mathcal{L}) \leq \gamma_{12} \sum_{i \neq j} \operatorname{mes}(\Omega_{i} \cap \Omega_{j}) .$$

On obtient alors le théorème en considérant des recouvrements de Ω de sorte que :

$$\begin{cases} \operatorname{mes} \Omega_{o} \mapsto 0. \\ \sum_{i \neq j} \operatorname{mes} (\Omega_{i} \cap \Omega_{j}) \mapsto 0 . \end{cases}$$

BIBLIOGRAPHIE

[1] Agmon : Lectures on elliptic boundary value problems ; Van Nostrand.

[2] Boutet de Monvel, Grisvard : Le comportement asymptotique des valeurs propres d'un operateur ; C. R. Acad. Sc. Paris, t.272 (1971).

[3] Courant Hilbert : Methods of Mathematical Physics ; New York Interscience.

[4] De Figueiredo : The coerciveness problem for forms over vector valued functions ; Comm. Pure Appl. Math. 16 (1963).

[5] Fleckinger-Métivier : Théorie spectrale des opérateurs uniformément elliptiques sur quelques ouverts irréguliers ; C. R. Acad. Sc. t. 276 (1973).

[6] Necas : Sur les normes équivalentes .... Séminaire Montréal, 1965.

[7] Smith : Inequalities for formally positive integrodifferential forms ; Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961).
