

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

K. WATANABE

## Sur l'unicité des solutions du problème de Cauchy pour quelques équations paraboliques

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1975-1976), exp. n° 11,  
p. 1-6

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1975-1976\\_\\_\\_A12\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1975-1976___A12_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1975-1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

PLATEAU DE PALAISBAU - 91120 PALAISEAU

Téléphone : 941.81.60 - Poste N°

Télex : ECOLEX 69 15 96 F

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - S C H W A R T Z   1 9 7 5 - 1 9 7 6

SUR L'UNICITE DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE CAUCHY  
-----  
POUR QUELQUES EQUATIONS PARABOLIQUES  
=====

K. WATANABE

Exposé n° XI

27 Janvier 1976



§ 1. RESULTATS

On va étudier l'unicité des solutions de classe  $C_t^1 \cap C_x^m$  du problème suivant :

$$(*) \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + P(t, x; D_x)u = 0 & \text{dans } ]-T, T[ \times U \dots (1) \\ (\partial / \partial x_1)^j u = 0 & j = 0, 1, \dots, m-1 \quad \text{sur } x_1 = 0 \dots (2) \end{cases}$$

où  $P(t, x; D_x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(t, x) D_x^\alpha$  est un opérateur elliptique d'ordre  $m$  dans un voisinage  $U$  de l'origine dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) et les coefficients  $a_\alpha(t, x)$  sont définis dans  $]-T, T[ \times U$ .

On s'intéresse aux cas où le symbole principal  $p(t, x; \xi)$  de  $P$  peut être écrit sous la forme suivante :

$$p(t, x; \xi) = q(t, x; \xi)^j \quad j = 1 \text{ ou } 2 \text{ ou } 3$$

où  $q(t, x; \xi)$  est un polynôme homogène elliptique d'ordre  $r$  à coefficients dans  $C^\infty$ , qui satisfait à la condition suivante :  $[H, j]$ . Toutes les racines de l'équation en  $Z$  :

$$q(0, 0; (Z, \xi')) + \omega s = 0$$

sont non réelles, simples pour tous vecteurs  $(\xi', s) = (\xi_2, \dots, \xi_n, s)$  réels, non nuls, où  $\omega = i$  si  $j = 1$ ,  $e^{\pm i\pi/4}$  si  $j = 2$ ,  $i$  et  $e^{-i\pi/6}$  si  $j = 3$ .

Remarque 1 : Si  $q$  est d'ordre 2 et à valeur réelles, les  $[H, j]$  sont toujours vérifiées.

On a alors

Théorème 1 : Soit  $j = 1$  ou  $2$ . Supposons l'hypothèse  $[H, j]$  et que  $P(t, x; D_x) = Q(t, x; D_x)^j + \text{terme d'ordre } \leq m-1$  à coeffs dans  $L^\infty$ . Alors, chaque solution du problème (\*) s'annule dans un voisinage de l'origine dans  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

Théorème 2 : Supposons l'hypothèse [H,3] et que

$$P = Q(t, x; D_x)^3 + R(t, x; D_x) + \text{terme d'ordre} \leq m-2 \text{ à coeffs. dans } L^\infty,$$

où R est un opérateur d'ordre  $m-1$  à coeffs lipschitziens. Alors on a la même conclusion que celle du théorème 1.

Le théorème 1 est essentiellement dû à Mizohata [4], qui ne l'a démontré que dans le cas où P est d'ordre 2 et les coeffs. de la partie principale sont à valeurs réelles. Mais il semble que sa méthode soit encore valable même sous les hypothèses du théorème 1.

D'après l'argument topologique usuel et la remarque 1, on a donc :

Corollaire : La continuation par unicité dans la direction de l'espace c'est-à-dire, la propagation des zéros d'une solution de l'équation :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + P(t, x; D_x)u = 0$$

jusqu'à la composante horizontale d'un ouvert donné, où P est l'un des types donnés dans les théorèmes 1 et 2. Elle est vérifiée si q est d'ordre 2 et à valeurs réelles.

## § 2 LES ESTIMATIONS DU TYPE DE CARLEMAN

Les démonstrations des théorèmes seront analogues à celles de l'unicité des solutions des équations elliptiques (voir [1,2,3,6]). On donnera ici seulement une esquisse de la démonstration du théorème 2. D'abord, avec le changement des coordonnées par la transformation de Holmgren, on suppose qu'au lieu de la condition (2),

$$u(t, x) = 0 \quad \text{dans} \quad x_1 < |x'|^2 \quad x = (x_1, x').$$

Ensuite on démontrera les estimations du type de Carleman, lesquelles peuvent entraîner l'unicité en question.

A partir de maintenant on garde toujours les hypothèses du théorème 2. On adopte les fonctions

$$\varphi_\delta(x) = (x_1 - \delta)^2 + \delta |x'|^2, \delta > 0$$

comme fonctions de poids. On a alors

**Proposition** : Il existe des constantes  $C_j > 0$  ( $1 \leq j \leq 4$ ) telles que l'inégalité

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\mathcal{U}(\delta)} \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + Q(t, x; D_x)^3 + R(t, x; D_x) \right\} u \right|^2 e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dt dx \\ \geq C_1 \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(\tau\delta)^{2(m-|\alpha|)}}{(\tau\delta^2)^3} |D_x^\alpha u|^2 e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dt dx \end{array} \right.$$

est vérifiée pour  $\forall u \in C_c^\infty(-\delta, \delta[x\mathcal{U}(\delta)])$ ,  $C_2 > \delta > 0$ ,  $\tau\delta^3 > C_3$  où  $\mathcal{U}(\delta) = \{x; |x| < \delta C_4\}$ .

On verra la démonstration du théorème 2 dans [2,6], en utilisant la proposition ci-dessus si l'on emploie les fonctions de poids  $-t^2 + \varphi_\delta(x)$  au lieu de  $\varphi_\delta$ .

L'idée de la démonstration de la proposition est que l'on considère premièrement le cas où les coeffs de Q et R sont constants. Alors on a les

**Lemme 1** (Hörmander [2]) :

$$(4) \quad \int_{\mathcal{U}(\delta)} |Q(D_x)v|^2 e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dx \geq C \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha v|^2 e^{2\tau\varphi_\delta(x)} dx$$

pour  $\forall v \in C_c^\infty(\mathcal{U}(\delta))$ ,  $\delta > 0$  assez petit,  $\tau\delta^2 > 0$  assez grand.

**Lemme 2** :

$$(5) \quad \int_{\mathcal{U}(\delta)} \left| \left\{ is + Q(D_x)^3 + R(D_x) \right\} v \right|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx \geq C \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha Q(D_x)^2 v|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx$$

pour  $\forall v \in C_c^\infty(\mathcal{U}(\delta))$ , assez petit  $\delta > 0$ , assez grand  $\tau\delta^3 > 0$  et  $s \in \mathbb{R}^1$ .

L'idée de la démonstration du lemme 2 est tout à fait analogue à celle du lemme 1 (voir [2,6]). Remarquons qu'il suffit de démontrer l'inégalité :

$$\begin{aligned} & |Q(\xi + i\tau N)^3 + is|^2 + \left| \frac{\partial}{\partial \xi_1} \{Q(\xi + i\tau N)^3\} \right|^2 |\tau N|^2 \\ & \geq Cte |\xi + i\tau N|^{2r} |Q(\xi + i\tau N)^2|^2 \end{aligned}$$

pour  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\tau > 0$ ,  $s \in \mathbb{R}^1$ ,  $N$  près de  $(-1, 0, \dots, 0)$ .

Deuxièmement, on utilise la partition de l'unité suivante : on prend une fonction  $\theta(t)$  dans  $C_c^\infty(\mathbb{R}^1)$  telle que

$$\text{supp } \theta \subset \{t : |t| < 1\}, \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \theta(t - k) = 1$$

et on pose

$$\Theta(x) = \theta(x_1) \dots \theta(x_n)$$

$$\omega(\tau, \delta) = (\tau\delta^{3/2})^{1/2}$$

$$t_k = k/\omega(\tau, \delta), \quad X_g = g/\omega(\tau, \delta), \quad Y_{k,g} = (t_k, X_g), \quad g \in \mathbb{Z}^n,$$

$$V_g(x) = V(x) \cdot \Theta(\omega(\tau, \delta)x - g), \quad Y = (t, x)$$

$$U_{k,g}(y) = U(y) \cdot \theta(\omega(\tau, \delta)t - k) \cdot \Theta(\omega(\tau, \delta)x - g).$$

En remplaçant, dans l'inégalité (5),  $V(x)$  par la transformée  $\hat{U}_{k,g}(s, x)$  de Fourier par rapport à  $t$  de  $U_{k,g}(t, x)$ , il est facile de voir l'inégalité

$$\begin{aligned} (6) \quad & \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\mathcal{U}(\delta)} \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + Q(y_{k,g}; D_x) \right\}^3 + R(y_{k,g}; D_x) \right\} U_{k,g} \right|^2 e^{2\tau\varphi\delta} dt dx \\ & \geq Cte \int_{-\delta}^{\delta} \int_{\mathcal{U}(\delta)} \sum_{|\alpha| \leq r} \frac{(\tau\delta)^{2(r-|\alpha|)}}{\tau\delta^2} |D_x^\alpha Q(y_{k,g}; D_x)^2 U_{k,g}|^2 e^{2\tau\varphi\delta} dt dx \end{aligned}$$

pour  $U \in C_c^\infty([-\delta, \delta] \times \mathcal{U}(\delta))$ .

Troisièmement on calcule des erreurs  $\{Q(y_{k,g}; D_x)^3 - Q(y, D_x)^3\} U_{k,g}$  de la manière suivante :

$$X^3 - Y^3 = 3(X - Y)X^2 - 3(X - Y)^2X + (X - Y)^3 \\ + 3(X - Y)[X, Y] - 3[X, Y]X + [[X, Y], 2X - Y].$$

C'est-à-dire, en remarquant  $\text{supp } U_{k,g} \subset \{y; |y - Y_{k,g}| < \omega(\tau, \delta)^{-1}\}$ , on a

$$|\{Q(Y_{k,g}; D_x)^3 - Q(Y; D_x)^3\} U_{k,g}|^2 \\ \leq \text{Cte} \{ (\tau\delta^{3/2})^{-1} |D_x^r Q(Y_{k,g}; D_x)^2 U_{k,g}|^2 + (\tau\delta^{3/2})^{-2} |D_x^{2r} Q(Y_{k,g}; D_x) U_{k,g}|^2 \\ + (\tau\delta^{3/2})^{-3} |D_x^{3Y} U_{k,g}|^2 + (\tau\delta^{3/2})^{-1} |D_x^{3r-1} U_{k,g}|^2 \\ + |D_x^{2r-1} Q(Y_{k,g}; D_x) U_{k,g}|^2 + |D_x^{3r-2} U_{k,g}|^2 \}$$

où on utilise la notation  $|D_x^k f|^2 = \sum_{|\alpha| \leq k} |D_x^\alpha f|^2$ .

Car ces erreurs sont majorées par le deuxième nombre de (6), on a donc

$$\int_{-\delta}^{\delta} \int_{U(\delta)} \left| \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + Q(Y; D_x)^3 + R(Y; D_x) \right\} U_{k,g} \right|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dt dx \\ (7) \\ \geq \text{Cte} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{U(\delta)} \sum_{|\alpha| \leq m} \frac{(\tau\delta)^{2(m-|\alpha|)}}{(\tau\delta^2)^3} |D_x^\alpha U_{k,g}|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dt dx .$$

On verra dernièrement l'inégalité (3), si l'on regroupe chaque membre de (7) en adoptant la méthode semblable sur les estimations des erreurs et en utilisant le

Lemme 3 (Trèves [5]).  $\exists C(p, n) > 0$ ,

$$\int |a(D_x) f|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx \leq C(p, n) \int \sum_{\alpha} \tau^{|\alpha|} \delta^{|\alpha| - \alpha_1} |a^{(\alpha)}(D_x) f|^2 e^{2\tau\varphi_\delta} dx$$

pour  $\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall a \in \mathcal{P}$  un polynôme de degré  $\leq p$  à coeffs. constants où  $a^{(\alpha)}(\xi) = \partial^\alpha a(\xi) / \partial \xi^\alpha$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. P. Calderon : Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations. Amer. Journal, Vol.53 (1958) p.16-36.
- [2] L. Hörmander : On the uniqueness of the Cauchy problem II. Math. Scand. 7 (1959) p.177-190.
- [3] S. Mizohata : Unicité du prolongement des solutions des équations elliptiques du quatrième ordre. Proc. Japan Acad. 34 (1958) p.687-692.
- [4] S. Mizohata : Unicité du prolongement des solutions pour quelques opérateurs différentiels paraboliques. Memoirs of the College of Science, Univ. of Kyoto, Ser. A 31 (1958) 219-239.
- [5] F. Trèves : Relations de domination entre opérateurs différentiels Acta Math. 101 (1959) 1-139.
- [6] K. Watanabé : On the uniqueness of the Cauchy problem for certain elliptique equations with triple characteristics. Tôhoku Math. Journal 23 (1971) 473-490.
-