Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

M. S. Baouendi
J. Sjöstrand

Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. nº 7, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A6_0>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E   G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

REGULARITE ANALYTIQUE POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES SINGULIERS EN UN POINT

par

M. S. BAOUENDI et J. SJÖSTRAND

Exposé n° VII   18 Décembre 1974

On considère un opérateur différentiel dans $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 2)$ de la forme

(1) $$P(x,D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$$

où a_α est un <u>polynôme</u> de n variables <u>homogène de degré $|\alpha|$</u> à coefficients complexes. On suppose que P est <u>elliptique en dehors de 0 dans $\mathbb{R}^n$</u>.

Le cas particulier suivant

$$L_{\lambda,\mu} = r^2 \Delta + \mu r \frac{\partial}{\partial r} + \lambda$$

où $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $r^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ et $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$, a été étudié dans [1] ; il a été démontré que pour tous $(\lambda,\mu) \in \mathbb{C}^2$, $L_{\lambda,\mu}$ n'est pas hypoelliptique dans $\mathbb{R}^n$, mais que pour tout Ω ouvert de $\mathbb{R}^n$, si $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $L_{\lambda,\mu} u$ est analytique dans Ω, u est aussi analytique dans Ω.

On se propose ici de généraliser ces résultats à l'opérateur (1). Des opérateurs plus généraux que (1) (coefficients non nécessairement polynomiaux) sont aussi traités dans [2], auquel on renvoie aussi pour des démonstrations plus détaillées des résultats ci-dessous.

On désigne par S_{n-1} la sphère unité de $\mathbb{R}^r$. On a un difféomorphisme naturel

(2) $$S_{n-1} \times \mathbb{R}_+ \simeq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

correspondant à prendre des coordonnées polaires. Il résulte de (2) le difféomorphisme

(3) $$T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R} \simeq T^*(\mathbb{R}^n) \Big|_{S_{n-1}}$$

Soit $p(x,\xi)$ le symbole principal de P défini sur $T^*(\mathbb{R}^n)$, et pour $((\theta,\eta),\zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R}$, soit $q(\theta,\eta,\zeta)$ la composition de p avec le difféomorphisme (3). La fonction $q(\theta,\eta,\zeta)$ est un polynôme homogène de degré m en les variables (η,ζ).

On note

$$(4) \qquad \Gamma = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists\, (\theta,\eta) \in T^*(S_{n-1}) \setminus 0 \ , \ q(\theta,\eta, -iz) = 0\}$$

$$\Gamma_+ = \Gamma \cap \{z \in \mathbb{C} \ , \ \Re e\, z > 0\} \ .$$

L'ellipticité de P en dehors de l'origine, entraîne que Γ et Γ_+ sont des cônes fermés dans $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ne rencontrant pas l'axe imaginaire.

On introduit l'hypothèse (H) suivante :

Il existe des nombres $\theta_o, \theta_1, \ldots, \theta_\ell$ satisfaisant

$$(H) \quad \begin{cases} -\frac{\pi}{2} < \theta_o < \theta_1 < \ldots < \theta_\ell < \frac{\pi}{2} \\ \theta_{j+1} - \theta_j < \frac{\pi}{n-1} \quad \text{pour } j = 0, \ldots, \ell-1 \\ \Gamma_+ \subset \bigcup_{j=o}^{\ell-1} \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_j < \arg z < \theta_{j+1}\} \ . \end{cases}$$

On note que (H) est toujours vérifiée pour n = 2.

On a les résultats :

Théorème 1 : On suppose (H) vérifiée. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telle que Pu soit analytique dans Ω, alors u est aussi analytique dans Ω.

Théorème 2 : Sous l'hypothèse (H) ; l'opérateur P est non hypoelliptique dans $\mathbb{R}^n$; plus précisément il existe une distribution T définie dans $\mathbb{R}^n$, non $\mathcal{C}^\infty$ et vérifiant PT = 0.

On note que la condition (H) n'est pas invariante sous des changements linéaires de coordonnées. On ignore si les conclusions des théorèmes 1 et 2 restent encore valables sans la condition restrictive (H)

On signale que les théorèmes 1 et 2 s'appliquent en particulier si on suppose que m est pair et que l'on a la factorisation

$$\sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) D^\alpha = q(x)(A(D))^{m/2}$$

où A(D) est un opérateur elliptique homogène d'ordre 2 à coefficents constants et à symbole réel. En effet, après un changement linéaire de variables, on peut supposer $A(D) = \Delta$, dans ce cas, on a $\Gamma_+ = \mathbb{R}_+$ et (H) est alors satisfaite.

L'idée (qui pourrait paraître naturelle), de démontrer au moins en partie, le théorème 1 par l'utilisation d'un développement de Taylor à l'origine, échoue. On peut en effet trouver un opérateur P de la forme (1) avec $n = 2$ et $m = 1$, une fonction analytique f au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tels qu'il existe une série formelle u, unique à l'addition d'une constante près, vérifiant $Pu = f$, et qui soit divergente.

§ 1. INDICATIONS SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME 1

Si $u \in \mathcal{C}^\infty(B)$ où B est la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$ centrée à l'origine, on écrit le développement de Taylor de u à l'origine en utilisant les coordonnées polaires, sous la forme

$$u \sim \sum_{k=o}^{\infty} r^k u_k(\theta) \tag{5}$$

($\theta \in S_{n-1}$, $r \in \mathbb{R}_+$, $u_k \in V_k$, espace des restrictions à S_{n-1} des polynômes homogènes de degré k).

La transformée de Mellin de u dans la direction radiale est donnée par

$$\tilde{u}(z,\theta) = \int_0^1 u(r\theta)\, r^{-z-1} dr . \tag{6}$$

La fonction $\tilde{u}$ est une fonction méromorphe en z à valeurs dans $\mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$. Ses seuls pôles sont les entiers ≥ 0, le résidu de $\tilde{u}$ au point $z = k \in \mathbb{N}$ est $-u_k(\theta)$. On a aussi pour tout $N \in \mathbb{N}$

(7) $$\tilde{u}(z,\theta) = \sum_{k=o}^{N} \frac{u_k(\theta)}{k-z} + \tilde{u}_N(z,\theta)$$

où, pour tout $s \in \mathbb{R}$ la fonction $z \mapsto \|\tilde{u}_N(z,\theta)\|_{H^s(S_{n-1})}$ est uniformément bornée dans $\{\Re e\, z \leq N + \frac{1}{2}\}$.

On vérifie aussi que l'on a, pour tout $N \in \mathbb{N}$

(8) $$\widetilde{(r\frac{\partial}{\partial r})^N u}\,(z,\theta) = z^N \tilde{u}(z,\theta) + \sum_{j=o}^{N-1} C_j(\theta) z^j$$

où les $C_j \in \mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$ et font intervenir les traces de u jusqu'à l'ordre $N-1$ sur la sphère $r = 1$.

On note aussi que si $\tilde{u}(z,\theta)$ est un polynôme en z, on a $u \equiv 0$.

L'analyticité de u implique l'existence de $M > 0$ tel que, pour tout $s \in \mathbb{R}$, il existe $C_s > 0$ vérifiant, pour tout $k \in \mathbb{N}$:

(9) $$\|u_k\|_{H^s(S_{n-1})} \leq C_s M^k .$$

On montre par un raisonnement sur les polynômes homogènes $P_k(x) = r^k u_k(\theta)$, que (9), pour $s = 0$, implique que la série de Taylor de u à l'origine est convergente.

Si u est analytique et si $M < 1$ dans (9) on a

(10) $$\tilde{u}(z,\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{u_k(\theta)}{k-z} .$$

Le théorème 1 résulte des lemmes 1 et 2 ci-dessous.

<u>Lemme 1</u> : Sous l'hypothèses (H) si $u \in \mathcal{C}^\infty(B)$, plate à l'origine (i.e. $D^\alpha u(0) = 0$ pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$) et $Pu \equiv 0$. alors $u \equiv 0$.

<u>Démonstration</u> Il suffira de démontrer que $\tilde{u}(z,\theta)$ est un polynôme en z.

En coordonnées polaires, P s'écrit sous la forme

(11) $$P = \sum_{j=o}^{m} A_j(\theta, D_\theta)(r\frac{\partial}{\partial r})^{m-j}$$

où A_j est un opérateur différentiel sur S_{n-1} d'ordre $\leq$ j. Si $a_j(\theta,\eta)$ est le symbole principal d'ordre j de A_j, on a, pour $((\theta,\eta),\zeta) \in T^*(S_{n-1}) \times \mathbb{R}$

(12) $$q(\theta,\eta,\zeta) = \sum_{j=o}^{m} a_j(\theta,\eta)(i\,\zeta)^{m-1} .$$

En utilisant (8), on obtient, à partir de Pu = 0 et (11)

(13) $$\sum_{j=o}^{m} A_j(\theta, D_\theta) z^{m-j}\tilde{u}(z,\theta) = \sum_{j=o}^{m-1} c_j(\theta) z^j \quad .$$

L'ellipticité de P en dehors de l'origine entraîne que $A_o(\theta) \neq 0$ sur S_{n-1}. En posant

$$B_j = - A_o^{-1}A_j \qquad \text{et} \qquad \hat{c}_j = c_j A_o^{-1}$$

l'équation (13) devient

(14) $$(z^m - B_1(\theta,D_\theta)z^{m-1} - \ldots - B_m(\theta,D_\theta))\tilde{u}(z,\theta) = \sum_{j=o}^{m-1} \hat{c}_j(\theta) z^j \quad .$$

On va maintenant écrire (14) sous forme d'un système du premier ordre. On pose

$$U(z,\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{u}(z,\theta) \\ z\ \Lambda^{-1}\tilde{u}(z.\theta) \\ \\ z^{m-1}\Lambda^{-(m-1)}\tilde{u}(z,\theta) \end{pmatrix}$$

avec $\Lambda = (I - \Delta_\theta)^{1/2}$, Δ_θ étant le laplacien sur la sphère S_{n-1} ,

$$C_j(\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \Lambda^{-(m-1)}\,c_j(\theta) \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & \vdots \\ \vdots & & & \Lambda \\ \Lambda^{-(m-1)}B_m & \cdots\cdots & & \Lambda^{-(m-1)}B_1\Lambda^{m-1} \end{pmatrix}$$

On obtient alors

$$(15) \qquad (z - \mathcal{A}(\theta.D_\theta))U(z.\theta) = \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta) z^j$$

L'opérateur $\mathcal{A}$ est un pseudo-différentiel d'ordre 1; **si** $a(\theta,\eta)$ désigne son symbole principal d'ordre 1, on obtient par un calcul simple, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$(16) \qquad \det(z - a(\theta,\eta)) = q(\theta,\eta, - iz).$$

On voit alors que $\mathcal{A}$ est elliptique et même que a n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire. Pour z dans la résolvante de $\mathcal{A}$, l'équation (5) s'écrit:

$$(17) \qquad U(z,\theta) = (z - \mathcal{A})^{-1}\left(\sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta) z^j\right).$$

On montre maintenant que la fonction entière $U(z,\theta)$ satisfait l'inégalité

$$(18) \qquad \|U(z,\theta)\|_{L^2(S_{n-1})} \leq C(1 + |z|)^{m-1} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Pour cela on applique le théorème de Phragmén-Lindelöf à la fonction U, écrite sous la forme (17), sur les angles $\theta_j \leq \arg z \leq \theta_{j+1}$, $j = o,\ldots,\ell-1$, en utilisant les deux estimations suivantes sur la résolvante de $\mathcal{A}$:

1) D'après [4] il existe C > 0 tel que l'on ait pour $|z|$ assez grand et $\arg z = \theta_j$ $j = 0,\ldots,\ell$

$$(19) \qquad \|(z - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq \frac{C}{|z|}$$

2) En utilisant des résultats de [3] sur des opérateurs de classe C_p ainsi que des résultats classiques [5] sur les fonctions entières exponentielles de type p, on montre qu'il existe une suite de cercles $(\mathcal{C}_j)$ centrés à l'origine et de rayons tendant vers l'infini, tels que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $C_\varepsilon > 0$ vérifiant

$$(20) \qquad \|(z-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{n-1}))} \leq C_\varepsilon e^{|z|^{n-1+\varepsilon}} \quad \text{pour } z \in \bigcup_j \mathcal{C}_j .$$

L'inégalité (18) montre alors que U est un polynôme et donc u est identiquement nulle.

Lemme 2 : Sous l'hypothèse (H), si $u \in \mathcal{C}^\infty(B)$ et Pu est analytique, le développement de Taylor de u à l'origine est une série convergente.

Démonstration : On pose Pu = v. On écrit la série de Taylor de v sous la forme (5)

$$v(r,\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} r^k v_k(\theta) ,$$

les fonctions v_k vérifient (9) (avec v_k au lieu de u_k). Comme l'opérateur P est invariant par homothétie, on peut supposer que la constante M, figurant dans (9) pour les v_k, est < 1 . On a alors

$$\tilde{v}(z,\theta) = \sum_{k=o}^{\infty} \frac{v_k(\theta)}{k-z} .$$

Comme dans la réduction de la démonstration du lemme 1, on réduit l'équation $Pu = v$ au système du premier ordre:

$$(21) \qquad (z - \mathcal{A}(\theta,D_\theta))\, U(z,\theta) = V(z,\theta) + \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta) z^j$$

avec U, $\mathcal{A}$, C_j comme dans le lemme 1 et

$$V(z,\theta) = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \Lambda^{-(m-1)} A_0^{-1} \tilde{v}(z,\theta) \end{pmatrix} .$$

Pour se ramener à des fonctions entières on pose

$$\hat{U}(z,\theta) = \sin(2\pi z)\, U(z,\theta)$$

$$\hat{V}(z,\theta) = \sin(2\pi z) V(z,\theta).$$

On a alors, à partir de (21), pour z dans la résolvante de $\mathcal{A}$.

(22) $$\hat{U}(z,\theta) = (z-\mathcal{A})^{-1}(\hat{V}(z,\theta) + \sum_{j=o}^{m-1} C_j(\theta) z^j \sin(2\pi z)).$$

Comme dans le lemme précédent, on peut utiliser le théorème de Phragmén-Lindelöf grâce à (19) et (20) et on obtient

(23) $$\|\hat{U}(z,\theta)\|_{L^2(S_{r-1})} \leq C_1\, e^{C_2|z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C}.$$

Comme on a $(2\pi) U_k(\theta) = \hat{U}(k,\theta)$, on déduit de (23) que (u_k) vérifie (9) pour $\varepsilon=0$ et on obtient ainsi la convergence de la série de Taylor de u.

§ 2. INDICATIONS SUR LA DEMONSTRATION DU THEOREME 2

Soit $\mathcal{A}$ l'opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 introduit dans la démonstration du lemme 1. On a

Lemme 3 : Sous l'hypothèse (H) il existe $z_o \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e\, z_o < 0$ et z_o est une valeur propre de $\mathcal{A}$.

Démonstration : On raisonne par l'absurde ; on suppose que tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathcal{R}e\, z < 0$ est dans la résolvante de $\mathcal{A}$. La fonction $(z-\mathcal{A})^{-1}$ est donc holomorphe dans $\mathcal{R}e\, z < 0$. On en déduit, par le théorème de Phragmén-Lindelöf, grâce à (19) (pour $|z|$ assez grand et $\arg z = \theta_j - \pi$) et (20), que l'on a

(24) $$\|(z-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(S_{r-1}))} \leq \frac{C}{|z|} \quad \text{pour tout } z \in \mathbb{C},\ |z| \text{ assez grand et } \mathcal{R}e\, z < 0.$$

Par un argument classique, on déduit de (24) que la mat[illegible] valeurs propres dans $\Re z < 0$, ce qui est absurde (en utilisant l'homogénéité de a). c.q.f.d.

On revient maintenant à la démonstration du théorème 2. Soit z_o donné par le lemme 3. Il existe $U \in (\mathcal{C}^\infty(S_{n-1}))^m$, $U \neq 0$, et $(z_o - \mathcal{A})U = 0$.

La forme de $\mathcal{A}$ montre que U est nécessairement de la forme

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} u_o(\theta) \\ z\,\Lambda^{-1} u_o(\theta) \\ \vdots \\ z^{m-1}\Lambda^{-(m-1)} u_o(\theta) \end{pmatrix} ,$$

avec $u_o \in \mathcal{C}^\infty(S_{n-1})$, $u_o \neq 0$ vérifiant

$$(25) \qquad (A_m(\theta, D_\theta) + A_{m-1}(\theta, D_\theta) z_o + \ldots + A_o(\theta) z_o^m) u_o(\theta) = 0 .$$

On pose avec $x = (r,\theta) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$f(x) = r^{z_o} u_o(\theta) .$$

La fonction f est $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et vérifie, grâce à (25) et (11)

$$P(x,D) f = 0 \qquad \text{dans } \mathbb{R}^n \setminus \{0\} .$$

Soit alors F une distribution dans $\mathbb{R}^n$ dont la restriction à $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est f. On a

$$(26) \qquad P(x,D) F = \sum_{|\alpha| \leq N} c_\alpha D^\alpha \delta$$

avec $c_\alpha \in \mathbb{C}$ et $N \in \mathbb{N}$.

Soit E_n l'espace de toutes les distributions de la forme $\sum_{|\alpha| \leq N} d_\alpha D^\alpha \delta$, $d_\alpha \in \mathbb{C}$; P est un opérateur linéaire de l'espace de dimension finie E_N : on distingue alors deux cas :

i) P est bijectif dans E_N; dans ce cas, on peut, grâce à (26), modifier F par addition d'un élément de E_N et on obtient une distribution T non $\mathcal{C}^\infty$ vérifiant

$$PT = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^n .$$

ii) P n'est pas bijectif; dans ce cas il existe $T \in E_N$, $T \neq 0$ vérifiant

$$PT = 0.$$

Ceci complète la démonstration du théorème 2.

BIBLIOGRAPHIE

[1] M. S. Baouendi, C. Goulaouic et L. J. Lipkin : On the operator $\Delta r^2 + \mu(\frac{\partial}{\partial r})r + \lambda$; J. Diff. Equ. 15 (1974) p.499-509.

[2] M. S. Baouendi et J. Sjöstrand : Régularité analytique pour des opérateurs elliptiques singuliers en un point (Article à paraître).

[3] N. Dunford et J. T. Schwartz : Linear operators, Part II, New York (1963).

[4] R. T. Seeley : Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure Math. A. M. S. 10 (1967) p.288-307.

[5] E. C. Titchmarsh : The theory of functions, Second edition, London (1939).