

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. J. DUISTERMAAT

I. M. SINGER

Isomorphismes entre algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1974-1975), exp. n° 24,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1974-1975____A22_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1974-1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHÉMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - L I O N S - S C H W A R T Z
1 9 7 4 - 1 9 7 5

ISOMORPHISMES ENTRE ALGÈBRES D'OPÉRATEURS

PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

par J. J. DUISTERMAAT et I. M. SINGER

Soit $L^m(X)$ l'espace des opérateurs pseudo-différentiels P d'ordre $m \in \mathbb{Z}$ sur une variété $C^\infty X$ tels que

i) la projection du support du noyau $K_P \in \mathcal{D}'(X \times X)$ de P sur la première variable est une application propre ;

ii) le symbole total de P (dans des cartes locales) a un développement asymptotique en termes homogènes d'ordre entier.

Alors $L^\infty(X) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} L^m(X)$ est une algèbre sur $\mathbb{C}$, graduée par l'ordre.

Je veux esquisser la démonstration du théorème suivant (un article plus détaillé est à paraître aux Comm. Pure Appl. Math):

Théorème : Soient X, Y des variétés C^∞ , $H^1(T^*X \setminus 0, \mathbb{C}) = 0$. Alors tout isomorphisme $i: L^\infty(X) \rightarrow L^\infty(Y)$ d'algèbres conservant l'ordre est de la forme

$$i(P) = A^{-1} P A$$

où A est un opérateur intégral de Fourier : $C^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ inversible, elliptique et proprement supporté.

Singer m'a communiqué l'été dernier au cours d'un colloque de géométrie riemannienne à Durham, qu'il pensait que ce théorème était vrai, et il m'en a convaincu au cours d'une excursion devant des murs romains entre l'Angleterre et l'Ecosse.

Le premier lemme montre que la situation est moins bonne quand on travaille modulo $L^{-\infty}$ (espace des opérateurs régularisants).

Lemme 1 : Soient X, Y connexes ; $H^1(T^*X \setminus 0, \mathbb{C}) = 0$. Alors tout isomorphisme $i: L^\infty(X)/L^{-\infty}(X) \rightarrow L^\infty(Y)/L^{-\infty}(Y)$ d'algèbres conservant l'ordre est donné par la conjugaison par un opérateur intégral de Fourier elliptique ou par une telle conjugaison précédée de l'automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ qui envoie le symbole

$$\sum_j p_j(x, \xi) \quad \text{sur} \quad \sum_j (-1)^j p_j(x, -\xi)$$

Ici p_j est le terme homogène d'ordre j dans le développement asymptotique du symbole complet.

Démonstration : i définit un isomorphisme $i_0 : L^0(X)/L^{-1}(X) \rightarrow L^0(Y)/L^{-1}(Y)$.
 $L^0(X)/L^{-1}(X)$ s'identifie avec l'algèbre des fonctions C^∞ homogènes d'ordre 0 sur $T^*X \setminus 0$ et avec l'algèbre $C^\infty(S^*X)$ où $\pi_S : T^*X \setminus 0 \rightarrow S^*X$ est la fibration de fibre : $\{(x, \tau\xi), \tau > 0\}$.

Les ensembles

$$m_\alpha : \{p \in C^\infty(S^*X) \text{ , } p(\alpha) = 0\} \text{ , } \alpha \in S^*X$$

sont les idéaux maximaux (de codimension 1) de $C^\infty(S^*X)$. Il existe donc une bijection $C : S^*X \rightarrow S^*Y$ telle que :

$$i(m_\alpha) = m_{C(\alpha)}$$

pour tout $\alpha \in S^*X$, et il est facile de démontrer que C est un difféomorphisme en regardant X et Y comme sous variétés d'un espace $\mathbb{R}^N$.

On en déduit que :

$$i_0(p) = p \circ C^{-1}$$

En effet, $p - p(\alpha) \cdot 1 \in m_\alpha$; $i_0(p) - p(\alpha) \cdot 1 \in m_{C(\alpha)}$ et donc :

$$i_0(p)(C(\alpha)) = p(\alpha) \text{ .}$$

Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, i donne un isomorphisme i_m de $L^m(X)/L^{m-1}(X) \cong S^m(T^*X \setminus 0)$ = espace des fonctions C^∞ homogènes d'ordre m sur $L^m(Y)/L^{m-1}(Y) \cong S^m(T^*Y \setminus 0)$. Pour $\varepsilon \in S^1(T^*X \setminus 0)$, $q \in S^0(T^*X \setminus 0)$ on obtient :

$$i_m(\varepsilon^m \cdot q) = (i_1(\varepsilon))^m \cdot q \circ C^{-1} \text{ .}$$

i_m est déterminée par la donnée de $\eta = i_1(\varepsilon)$ lorsque ε est inversible.

$L^1(X)/L^0(X)$ est une algèbre de Lie munie du crochet $[A, B] = A \circ B - B \circ A$.

En associant à un élément de $L^1(X)/L^0(X)$ son symbole principal, on définit un isomorphisme d'algèbre de Lie de $L^1(X)/L^0(X)$ sur $S^1(T^*X \setminus 0)$ munie du crochet $\{a, b\} = \frac{1}{i}\{a, b\}$ où $\{a, b\}$ désigne le crochet de Poisson de a et b .

On a :

$$\{\eta \cdot a \circ C^{-1}, \eta \cdot b \circ C^{-1}\} = \eta(\varepsilon^{-1}\{\varepsilon \cdot a, \varepsilon \cdot b\}) \circ C^{-1}$$

pour $a, b \in S^0$, d'où

$$\{\eta, b \circ C^{-1}\} = \{\varepsilon, b\} \circ C^{-1} \quad \text{pour } b \in S^0 \text{ (en prenant } a = 1).$$

η est réel si on choisit ε réel et il existe un unique difféomorphisme noté encore C :

$$\begin{array}{ccc} T^*X \setminus 0 & \xrightarrow{C} & T^*Y \setminus 0 \\ \downarrow \pi_S & & \downarrow \pi_S \\ S^*X & \xrightarrow{C} & S^*Y \end{array}$$

tel que $\eta = \pm \varepsilon \circ C^{-1}$. Alors $\{a \circ C^{-1}, b \circ C^{-1}\} = \pm \{a, b\} \circ C^{-1}$ pour tous $a, b \in S^1(T^*X \setminus 0)$.

Lorsque le signe est $+$, C est une transformation canonique homogène. Lorsque le signe est $-$, C est la transformation antipodale $(x, \xi) \rightarrow (x, -\xi)$ composée avec une transformation canonique.

L'automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ indiqué dans le lemme 1, induit la transformation antipodale, de sorte que nous pouvons nous ramener au cas d'une transformation canonique C .

Considérons un opérateur intégral de Fourier elliptique A défini par C , alors $j : P \rightarrow A \cdot i(P) \cdot A^{-1}$ est un automorphisme de $L^\infty(X)/L^{-\infty}(X)$ conservant les symboles principaux. On doit maintenant démontrer qu'un tel automorphisme est égal à la conjugaison par un opérateur pseudo-différentiel elliptique d'un ordre quelconque s . Pour $k \geq 1$, supposons que $j(P) - F \in L^{m-k}(X)$ pour tout $P \in L^m(X)$. L'image dans $L^{m-k}(X)/L^{m-k-1}(X) \cong S^{m-k}(T^*X \setminus 0)$ ne dépend que du symbole principal de P , et on définit ainsi une application $\beta_m : S^m(T^*X \setminus 0) \rightarrow S^{m-k}(T^*X \setminus 0)$.

β_m est une dérivation dans les deux sens suivants :

$$(*) \quad \begin{aligned} \beta_{m_1+m_2}(p \cdot q) &= \beta_{m_1}(p) \cdot q + p \cdot \beta_{m_2}(q) ; \quad p \in S^{m_1}, \quad q \in S^{m_2} \\ \beta_{m_1+m_2-1}(\{p, q\}) &= \{\beta_{m_1}(p), q\} + \{p, \beta_{m_2}(q)\} \end{aligned}$$

On en déduit que β est une transformation infinitésimale symplectique, et donc que $\beta = H_f$ pour une $f \in C^\infty(T^*X \setminus 0)$ car $H^1(T^*X \setminus 0, \mathbb{C}) = 0$.

Pour $P \in L^m(X)$ (resp. $B \in L^s(X)$) de symbole principal p (resp. b), l'opérateur $B^{-1}PB - P = B^{-1}[P, B]$ a un symbole principal d'ordre $m-1$, égal à $b^{-1}\{p, b\}/i = H_b \log b(p)$.

La remarque ci-dessus (avec $k=1$) montre que j peut être représentée par une conjugaison par β si (et seulement si) $b = e^{f/i}$ est homogène d'ordre s , ce qui signifie que :

$$\sum_j \xi_j \frac{\partial f}{\partial \xi_j} = s \cdot i = \text{Cste}$$

ce qui découle des relations (*).

Pour $k > 1$, $j(P) - P \in L^{m-k}(X)$ lorsque $P \in L^m(X)$; on peut écrire $\beta = H_f$ avec $f \in S^{1-k}(T^*X \setminus 0)$ définie par :

$$f = \frac{1}{1-k} \sum_j \xi_j \cdot \gamma_j$$

Ici on a écrit :

$$\beta = \sum_j \gamma_j \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_j \delta_j \cdot \frac{\partial}{\partial \xi_j}$$

dans un système de coordonnées locales avec :

$$\gamma_j = \beta(x_j) \in S^{-k}, \quad \delta_j = \beta(\xi_j) \in S^{1-k}$$

Par induction sur k , on obtient une suite d'opérateurs pseudo-différentiels $B_0, C_1, C_2, \dots$ tels que B_0 est elliptique d'ordre $s \in \mathbb{C}$,

$C_j \in L^{-j}(X)$ et finalement $B_k \circ j(P) \circ B_k^{-1} - P \in L^{m-k-2}(X)$ pour $P \in L^m$ en

posant :

$$B_k = (I - C_k) \circ \dots \circ (I - C_1) \circ B_0 .$$

On construit alors classiquement un opérateur $B \in L^S(X)$ tel que $B - B_k$ soit dans L^{S-k-1} pour tout k ; on obtient ainsi $B \circ j(P) \circ B^{-1} - P \in L^{-\infty}_k$ pour tout $P \in L^m$.

Le lemme ci-dessous est inspiré par les résultats de M. Edelheit [2] sur les espaces de Banach.

Lemme 2 : Soit $\mathcal{E}$ un espace de Fréchet de dimension > 2 et $\mathcal{A}$ une algèbre d'applications continues $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ telle que $\tilde{\mathcal{F}} = \{v \in \mathcal{E}' ; u \otimes v \in \mathcal{A} \text{ pour tout } u \in \mathcal{E}\}$ est dense dans $\mathcal{E}'$. Ici $u \otimes v$ est l'application continue $f \mapsto v(f) \cdot u$ de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{E}$.

Soit $\tilde{\mathcal{E}}$ un autre espace de Fréchet et $\tilde{\mathcal{A}}$ une algèbre possédant les mêmes propriétés que $\mathcal{A}$ (en remplaçant $\mathcal{E}$ par $\tilde{\mathcal{E}}$).

Alors tout isomorphisme d'algèbres $i: \mathcal{A} \rightarrow \tilde{\mathcal{A}}$ s'obtient par conjugaison par une application linéaire continue inversible $A: \tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathcal{E}$.

Cette application est unique (modulo les multiplications par les constantes non nulles).

Démonstration : Pour $P_1, P_2 \in \mathcal{A}$, on introduit :

$$\mathcal{A}(P_1, P_2) = \{P_2 \circ Q \circ P_1 \in \mathcal{A} ; Q \in \mathcal{A}\}$$

Alors

$$\dim_{\mathbb{C}} \text{Im } P < +\infty \Leftrightarrow \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{A}(P, P) < \infty$$

$$\text{Im } P_1 \subset \text{Im } P_2 \Leftrightarrow \mathcal{A}(P_1, P_1) \subset \mathcal{A}(P_1, P_2)$$

sous l'hypothèse que : $\dim \text{Im } P_1 < +\infty$. Enfin :

$$i(\mathcal{A}(P_1, P_2)) = \tilde{\mathcal{A}}(i(P_1), i(P_2))$$

On en déduit qu'il existe une bijection $j: \Lambda \rightarrow \tilde{\Lambda}$ telle que :

$$\text{Im } i(P) = j(\text{Im } P) \quad \text{lorsque } \text{Im } P \in \Lambda \quad \text{et}$$

$$\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}_2 \Leftrightarrow j(\mathcal{D}_1) \subset j(\mathcal{D}_2) \quad ,$$

pour tout $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \Lambda$.

Ici Λ (resp. $\tilde{\Lambda}$) désigne le lattice de tous les sous-espaces de dimension finie de $\mathcal{E}$, (resp. $\tilde{\mathcal{E}}$).

C'est un résultat élémentaire de la géométrie projective (voir [1]) qu'un tel isomorphisme est de la forme $j(\mathcal{D}) = A^{-1}(\mathcal{D})$ où A est une application linéaire (ou antilinéaire) inversible de $\tilde{\mathcal{E}}$ dans $\mathcal{E}$ et que A est unique (modulo la multiplication par les constantes).

Pour tout $u \in \mathcal{E}$, $v \in \mathfrak{F}$, $i(u \otimes v) = A^{-1}u \otimes w_{u,v}$ pour un $w_{u,v} \in \tilde{\mathcal{E}}$.

Pour tout $P \in \mathcal{A}$, on en déduit que :

$$i(P) \circ (A^{-1}u \otimes w_{u,v}) = i(Pu \otimes v) = A^{-1}.Pu \otimes w_{Pu,v}$$

d'où

$$i(P).(A^{-1}u) = A^{-1}(Pu).C_{u,P} \quad \text{pour un certain scalaire } C_{u,P}$$

On montre alors facilement que $C_{u,P} = 1$ et que A est linéaire et non antilinéaire .

Montrons maintenant que A est continu. Comme $i(u \otimes v) = (A^{-1}u) \otimes (v \circ A)$ est continue : $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \tilde{\mathcal{E}}$ pour tout $u \in \mathcal{E}$, $v \in \mathfrak{F}$, il s'ensuit que $v \circ A$ est continu : $\tilde{\mathcal{E}} \rightarrow \mathbb{C}$ pour tout $v \in \mathfrak{F}$.

Maintenant soit $\tilde{u}_j \rightarrow \tilde{u}$ dans $\tilde{\mathcal{E}}$, $A\tilde{u}_j \rightarrow u$ dans $\mathcal{E}$. Alors $v(A\tilde{u}_j) = v(A\tilde{u})$ et $v(A\tilde{u}_j) \rightarrow v(u)$, de sorte que $v(u) = v(A\tilde{u})$ pour tout v dans $\mathfrak{F}$. On en déduit que $u = A\tilde{u}$ car $\mathfrak{F}$ est dense dans $\mathcal{E}'$. On en déduit la continuité de A en utilisant le théorème du graphe fermé.

Lemme 3 : Soit $E: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ tel que pour tout $u \in C^\infty(X)$:

$$E \circ M_u = M_u \circ E + R_u \quad \text{pour un } R_u \in L^{-\infty}(X),$$

où $M_u: v \rightarrow u.v: C^\infty(X) \rightarrow C^\infty(X)$ désigne la multiplication par u . Alors il existe $a \in C^\infty(X)$, $R \in L^{-\infty}(X)$ tels que $E = M_a + R$.

Démonstration : $M_{uv} \circ E + R_{uv} = E \circ M_{uv} = E \circ M_u \circ M_v = (M_u \circ E + R_u) \circ M_v =$
 $M_u \circ (M_v \circ E + R_v) + R_u \circ M_v.$

On en déduit $R_{uv} = M_u \circ R_v + R_u \circ M_v$, pour tous u, v dans $C^\infty(X)$. En termes de noyaux distributions, on obtient, en remarquant que

$$R_{uv} = R_{vu} :$$

$$u(x) \cdot R_v(x, y) + R_u(x, y) \cdot v(y) = v(x) \cdot R_u(x, y) + R_v(x, y) \cdot u(y) \quad \text{de sorte que}$$

$$(*) \quad \frac{R_u(x, y)}{u(y) - u(x)} = \frac{R_v(x, y)}{v(y) - v(x)} \quad \text{si } u(x) \neq u(y), \quad v(x) \neq v(y)$$

Pour tout $(x, y) \in X \times X$ tels que $x \neq y$, il existe $u \in C^\infty(X)$ telle que $u(x) \neq u(y)$, de sorte que le membre de gauche de (*) définit un nombre $R(x, y)$ indépendant du choix de u , et R est une fonction C^∞ sur $\{(x, y) \in X \times X; x \neq y\}$.

$$\text{De plus, } R_u(x, y) = \frac{R_v(x, y)}{v(y) - v(x)} \cdot (u(y) - u(x)) \quad \text{si } v(x) \neq v(y)$$

montre que $R_u(x, y) = 0$ lorsque $u(x) = u(y)$, $x \neq y$. Maintenant prenons u telle que $du(x_0) \neq 0$. Alors tout (x, x) , x près de x_0 , peut être approché par des points (x, y) tels que : $u(x) = u(y)$, $x \neq y$, de sorte que $(R_u(x, y) = 0)$ lorsque $u(x) = u(y)$ est aussi vérifiée pour $x = y$, x près de x_0 .

On montre alors facilement que le second membre de (*) définit une fonction C^∞ dans un voisinage U de (x_0, x_0) ; on montre alors que R se prolonge en une fonction C^∞ sur $X \times X$.

La définition de R implique que $R_u = R \circ M_u - M_u \circ R$, d'où $E(u) = E \circ M_u(1) = M_u \circ E(1) + R(u) - M_u \circ R(1)$, ce qui montre le lemme avec $a = E(1) - R(1)$.

Démonstration du théorème : Grâce au lemme 2 avec $\mathcal{E} = C^\infty(X)$, $\mathcal{A} = L^\infty(X)$, $\mathfrak{F} = C_0^\infty(X)$, on obtient un opérateur linéaire continu inversible $A : C_0^\infty(Y) \rightarrow C^\infty(X)$ tel que $i(P) = A^{-1}P.A$ pour tout P dans $L^\infty(X)$. Du lemme 1, on déduit l'existence d'un opérateur intégral de Fourier elliptique B tel que : $i(P) \circ B - B \circ P \in C^\infty(Y \times X)$ pour tous les opérateurs différentiels P .

Alors $P \circ A \circ B - A \circ B \circ P \in L^{-\infty}(X)$ pour tous les opérateurs différentiels P (ici on utilise la continuité de A).

On déduit alors du lemme 3 que : $A \circ B = M_a + R$ avec $a \in C^\infty(X)$, $R \in L^{-\infty}(X)$. Pour un champ de vecteurs P , on a

$$P \circ M_a - M_a \circ P = M_{Pa} \in L^{-\infty}(X) .$$

Alors $Pa = 0$, et donc $a = \text{cste}$.

BIBLIOGRAPHIE

-
- [1] G. Birkhoff : Lattice theory, A. M. S. Coll. Publ. 25, Providence, Rhode Island, 1961.
- [2] M. Edelheit : On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. 9 (1940), p.97-105.
-