Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

B. Maurey

Théorèmes de factorisation dans les espaces L^p

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A3_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDicis 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

THEOREMES DE FACTORISATION DANS LES ESPACES L^p

par B. MAUREY

Exposé n° III

11 Octobre 1972

En 1956, A. Grothendieck a démontré le théorème suivant ([2], voir aussi [5]) : tout opérateur linéaire continu d'un espace $L^\infty(X,\mu)$ dans $L^1(Y,\nu)$ admet la factorisation :

$$L^\infty(X,\mu) \longrightarrow L^2(Y,\nu) \xrightarrow{T_g} L^1(Y,\nu) \ ,$$

où T_g est l'opérateur de multiplication par une fonction $g \in L^2(Y,\nu)$. Le but de l'exposé est de démontrer des théorèmes analogues pour des opérateurs de $L^q(X,\mu)$ dans $L^p(Y,\nu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, et d'établir le lien entre l'existence de tels théorèmes et les théorèmes connus de la théorie des applications p-sommantes.

Pour commencer, nous donnerons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur $u \in L(E,L^p(\Omega,\mu))$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$ et la multiplication par une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$.

Cela revient à chercher une fonction $g \in L^r(\Omega,\mu)$ telle que :

$$\forall\, x \in E, \qquad \left(\int \left|\frac{u(x)}{g}\right|^q d\mu\right)^{1/q} \leq C\, \|x\|$$

Il s'agit donc d'un problème de "division", que nous allons résoudre sous une forme un peu plus générale. Le théorème suivant généralise un théorème de H. P. Rosenthal [8].

Théorème 1 : Soient (Ω,μ) un espace mesuré, I un ensemble d'indices, $(f_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\forall\, (\alpha_i) \in \mathbb{R}^{(I)} \qquad \left(\int (\Sigma |\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq (\Sigma |\alpha_i|^q)^{1/q}$

b) Il existe g telle que $\int |g|^r d\mu \leq 1$, et :

$$\forall\, i \in I, \qquad \int \left|\frac{f_i}{g}\right|^q d\mu \leq 1$$

La démonstration utilisera le lemme suivant :

Lemme : Soient K un convexe compact d'un elcs, $\mathcal{H}$ un ensemble convexe de fonctions scs, ne prenant pas la valeur $+\infty$. On suppose que :

a) Chaque fonction $f \in \mathcal{H}$ est concave

b) $\forall\, f \in \mathcal{H}$, $\exists\, x \in K$, $f(x) \geq 0$

Il existe alors un point $x_o \in K$ tel que $f(x_o) \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{H}$.

Ce lemme étant admis, démontrons le théorème 1.
Le cas $p = q$ est trivial, le cas $q = \infty$ résulte du fait bien connu qu'une famille filtrante croissante dans $L^p(\Omega,\mu)$ admet une borne supérieure si et seulement si elle est bornée en norme. Supposons donc $0 < p < q < +\infty$, et posons $s = \frac{q}{p}$ (d'où $s' = \frac{r}{p}$). Désignons par K l'ensemble des fonctions $g \geq 0$ sur Ω telles que $\int g^{s'} d\mu \leq 1$. L'ensemble K est convexe et compact pour la topologie $\sigma(L^{s'},L^{s})$. Pour chaque $\alpha \in \mathbb{R}^{(I)}$, considérons la fonction F_α sur K définie par :

$$F_\alpha(g) = \Sigma|\alpha_i|^q - \int \Sigma \frac{|\alpha_i f_i|^q}{g^s} d\mu$$

L'ensemble des F_α est convexe, chaque fonction F_α est concave, et scs (d'après le lemme de Fatou). De plus posons :

$$g_\alpha = \frac{(\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{\frac{1}{ss'}}}{C} \quad , \quad \text{avec } C = \left(\int (\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu\right)^{1/s'}$$

On vérifie que $\int g_\alpha^{s'} d\mu = 1$, c'est-à-dire $g_\alpha \in K$, et :

$$F_\alpha(g_\alpha) = \Sigma|\alpha_i|^q - C^s \int (\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{1/s} d\mu$$

$$= \Sigma|\alpha_i|^q - \left(\int (\Sigma|\alpha_i f_i|^q)^{p/q} d\mu\right)^{q/p} \geq 0$$

D'après le lemme, il existe $g_o \in K$ telle que :

$$\forall\, i \in I \quad \int \frac{|f_i|^q}{g_o^s} d\mu \leq 1, \text{ d'où le résultat avec } g_1 = g_o^{1/p}.$$

Notons finalement que b) $\Rightarrow$ a) est une application facile de l'inégalité de Hölder.

Remarque : Supposons que la famille $(f_i)_{i\in I}$ vérifie l'hypothèse :

$$\Sigma|\alpha_i|^q < +\infty \quad \Rightarrow \quad \int (\Sigma|\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega) < +\infty$$

On a alors une application linéaire:

$$(\alpha_i) \longrightarrow (\alpha_i f_i(\omega)) \text{ de } l^q(I) \text{ dans } L^p(\Omega,\mu, l^q(I)) ,$$

qui est continue par le théorème du graphe fermé. Il existe donc une constante C telle que :

$$\left(\int(\Sigma|\alpha_i f_i(\omega)|^q)^{p/q} d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C(\Sigma|\alpha_i|^q)^{1/q},$$

et l'on peut maintenant appliquer le théorème 1.

On déduit immédiatement du théorème 1 et de la remarque ci-dessus la condition nécessaire et suffisante de factorisation annoncée. (On prendra pour ensemble d'indices I la boule unité de E, et on posera :

$$f_x = u(x)).$$

Corollaire 1 : Soient E un espace de Banach, (Ω,μ) un espace mesuré, $u \in L(E,L^p(\Omega,\mu))$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) Pour toute suite (x_n) d'éléments de E,

$$\Sigma\|x_i\|^q < +\infty \Rightarrow \int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q} d\mu < +\infty$$

b) L'opérateur u admet la factorisation :

$$E \longrightarrow L^q(\Omega,\mu) \xrightarrow{T_g} L^p(\Omega,\mu),$$

où T_g est l'opérateur de multiplication par $g \in L^r(\Omega,\mu)$.

Nous allons donner un exemple où l'application du corollaire 1 est particulièrement simple. Dans la suite, nous abrègerons l'énoncé du b) du corollaire 1 sous la forme suivante : $u \in L(E, L^p(\Omega,\mu))$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

Corollaire 2 : Soient (X,ν) et (Ω,μ) deux espaces mesurés, u un opérateur positif de $L^q(X,\nu)$ dans $L^p(\Omega,\mu)$, $0 < p \leq q \leq +\infty$, et $q \geq 1$. L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

Démonstration : Soient $(x_1,\dots,x_n) \in L^q(X,\nu)$. On a :

$$(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/q} = \sup\{\Sigma \alpha_i u(x_i) \mid \Sigma|\alpha_i|^{q'} \le 1\}$$

$$\le u(\sup\{\Sigma\alpha_i x_i \mid \Sigma|\alpha_i|^{q'} \le 1\}) = u((\Sigma|x_i|^q)^{1/q}),$$

puisque u est positif. Donc :

$$(\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q}d\mu)^{1/q} = \|(\Sigma|u(x_i)|^q)^{1/q}\|_{L^p(\Omega,\mu)}$$

$$\le \|u\| \|(\Sigma|x_i|^q)^{1/q}\|_{L^q(X,\nu)} = \|u\| (\Sigma\|x_i\|^q)^{1/q},$$

d'où le résultat.

Avant de poursuivre, rappelons quelques définitions : Nous dirons qu'un espace vectoriel F est quasi-normé s'il est muni d'une application $x \to \|x\|$ de F dans $\mathbb{R}_+$ telle que :

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \; ; \quad \|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \text{ et :}$$

$$\exists\, q \in]0,1], \; \forall\, x,y \in F, \; \|x+y\|^q \le \|x\|^q + \|y\|^q.$$

Soient E un espace de Banach, F un espace quasi-normé, et $u \in L(E,F)$. Nous dirons que u est p-sommante, $0 < p \le +\infty$, s'il existe une constante C telle que pour toute suite finie $(x_1,\dots,x_n)$ d'éléments de E, on ait :

$$(\Sigma\|u(x_i)\|^p)^{1/p} \le C \sup_{\|\xi\|_{E'} \le 1} (\Sigma|\langle x_i,\xi\rangle|^p)^{1/p}$$

Donnons un exemple élémentaire mais fondamental d'application p-sommante : (cf. [9])

Proposition : Soit $\alpha \in l^p$, $0 < p \le +\infty$. L'opérateur diagonal de multiplication défini par α $((c_n) \to (\alpha_n c_n))$ est p-sommant de l^∞ dans l^p.

Soient E un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω,μ) un espace de probabilité et $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Soient d'autre part G un espace quasi-normé de dimension finie, et $\pi \in L(E,G)$. Il existe une uniqu

application $\varphi_{u,\pi} \in L^p(\Omega,\mu,G)$ telle que :

$$\forall\ \xi \in G' \qquad u({}^t\pi(\xi)) = \xi \circ \varphi_{u,\pi}$$

Nous dirons que u est quasi-p-décomposée s'il existe une constante C telle que pour tout espace quasi-normé de dimension finie G et toute $\pi \in L(E,G)$, on ait :

$$\left(\int \|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|_G^p \, d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq C \quad \|\pi\|$$

On trouve dans [9] un théorème voisin du théorème suivant :

Théorème 2 : Soient E un espace de Banach vérifiant l'hypothèse d'approximation métrique, F un espace quasi-normé séparé par son dual, (Ω,μ) un espace de probabilité, $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$ et v une application p-sommante de E dans F. L'application $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée. De plus, l'hypothèse d'approximation est inutile pour $p \geq 1$.

Théorème 3 : Soient p, q, $0 < p \leq q \leq +\infty$, E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation si $q < 1$), (Ω,μ) un espace de probabilité, et $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) L'opérateur u se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$

b) Pour tout espace quasi-normé F séparé par son dual et toute application q-sommante v de E dans F, $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée.

Démonstration : Montrons que a) $\Rightarrow$ b). Supposons que $u = T_g \circ u_1$, avec $u_1 \in L(E',L^q(\Omega,\mu))$ et $g \in L^r(\Omega,\mu)$. D'après le théorème 2, $u_1 \circ {}^t v$ est quasi-q-décomposée, donc il existe C telle que pour toute $\pi \in L(F,G)$, on ait :

$$\left(\int \|\varphi_{u_1,\pi}(\omega)\|^q d\mu(\omega)\right)^{1/q} \leq C\|\pi\|$$

Or il est clair que $\varphi_{u,\pi} = g\,\varphi_{u_1,\pi}$, donc :

$$\left(\int \|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \leq \|g\|_{L^r} \left(\int \|\varphi_{u_1,\pi}(\omega)\|^q d\mu(\omega)\right)^{1/q},$$

ce qui prouve que $u \circ {}^t v$ est quasi-p-décomposée.

Montrons maintenant b) ⇒ a). Soit (ξ_n) une suite d'éléments de E' telle que $\Sigma\|\xi_n\|^q < +\infty$. Elle définit un opérateur v_ξ de E dans l^q par :

$$v_\xi(x) = (\langle x, \xi_n \rangle)_{n\in\mathbb{N}}$$

On voit que v_ξ admet la factorisation :

$$E \to l^\infty \xrightarrow{\alpha} l^q, \text{ où } \alpha \text{ est diagonal,}$$

donc v_ξ est q-sommant (Proposition). Soit $n \in \mathbb{N}$; désignons par l^q_n le sous-espace de l^q formé des vecteurs dont les coordonnées d'indice $> n$ sont nulles, et par π la projection de l^q sur l^q_n. Par hypothèse, il existe C, indépendante de n, telle que :

$$\left(\int\|\varphi_{u,\pi}(\omega)\|^p d\mu(\omega)\right)^{1/p} \le C \ \|\pi\| = C$$

Mais nécessairement :

$$\varphi_{u,\pi}(\omega) = (u(\xi_k)(\omega))_{1\le k\le n}$$

Donc :

$$\left(\int\left(\sum_{k=1}^{n} |u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \le C, \quad \text{pour tout u, d'où :}$$

$$\left(\int\left(\sum_{k=1}^{\infty} |u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu\right)^{1/p} \le C.$$

Finalement, $\Sigma\|\xi_k\|^q < +\infty$ implique :

$$\int\left(\Sigma|u(\xi_k)|^q\right)^{p/q} d\mu < +\infty .$$

On conclut en appliquant le corollaire 1 du théorème 1.

<u>Corollaire 1</u> : Soient p, q, r, $0 < p \le q \le +\infty$, $\frac{1}{p} = \frac{1}{q} + \frac{1}{r}$, E un espace de Banach (tel que E' vérifie l'hypothèse d'approximation métrique si $q < 1$). Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) Pour tout espace quasi-normé F, on a :

$$\Pi_q(E,F) = \overline{\Pi}_p(E,F) \quad , \quad (\overline{\Pi}_p(E,F) \text{ désignant}$$

l'ensemble des opérateurs p-sommants de E dans F)

b) Pour tout espace mesuré (Ω,μ), tout opérateur $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$ se factorise par $L^q(\Omega,\mu)$.

c) Toute suite scalairement l^p sur E peut s'écrire $x_n = \alpha_n y_n$, où $(\alpha_n) \in l^r$, et où (y_n) est une suite scalairement l^q sur E.

Démonstration : Démontrons que a) $\Rightarrow$ b). Si μ est une probabilité, le résultat découle de la conjonction des théorèmes 2 et 3. Supposons μ quelconque, et soit $u \in L(E',L^p(\Omega,\mu))$. Nous devons montrer que :

$$\Sigma\|x_n\|^q < +\infty \Rightarrow \int(\Sigma|u(x_n)|^q)^{p/q}\,d\mu < +\infty$$

Or on peut trouver une fonction $h \geq 0$ dans $L^1(\Omega,\mu)$ telle que : $\int h d\mu = 1$ et :

$$\forall\, n \qquad |u(x_n)|^p \mu \ll h\mu = \nu$$

Soit $A = \{g > 0\}$. Considérons l'opérateur w de $L^p(\Omega,\mu)$ dans $L^p(\Omega,\nu)$ défini par

$$f \to \frac{f\chi_A}{h^{1/p}}$$

D'après le début de la démonstration, $w \circ u$ se factorise par $L^q(\Omega,\nu)$, donc :

$$\int(\Sigma|w\circ u(x_i)|^q)^{p/q}\,d\nu < +\infty$$

Mais $u(x_n)\mu \ll h\mu$ implique :

$$\{u(x_n) > 0\} \subset \{h > 0\} \text{ donc :}$$

$$w(u(x_n)) = \frac{u(x_n)}{h^{1/p}} \quad , \text{ d'où :}$$

$\int(\Sigma|u(x_i)|^q)^{p/q}\,d\mu < +\infty$, ce qui prouve a) $\Rightarrow$ b).

Montrons que b) $\Rightarrow$ c). Soit (x_n) une suite scalairement l^p sur E. Elle définit un opérateur de E' dans l^p, par :

$$u(\xi) = (\langle \xi, x_n \rangle).$$

D'après b), appliqué à $\Omega = \mathbb{N}$ et $\mu = \Sigma \delta_n$, u admet la décomposition :

$$E' \longrightarrow l^q \xrightarrow{\alpha} l^p,$$

où α est un opérateur diagonal défini par une suite $(\alpha_n) \in l^r$.

Posons $y_n = \frac{x_n}{\alpha_n}$. On a bien :

$$\Sigma|\langle y_n, \xi\rangle|^q = \Sigma|\langle \frac{x_n}{\alpha_n}, \xi\rangle|^q < +\infty,$$

d'où le résultat.

Montrons que c) $\Rightarrow$ a). Soit $v \in \pi_q(E,F)$. Nous devons montrer que pour toute suite scalairement l^p (x_n) dans E, on a

$$\Sigma\|v(x_n)\|^p < +\infty.$$

Mais en écrivant $x_n = \alpha_n y_n$, c'est une conséquence immédiate de l'inégalité de Hölder :

$$(\Sigma\|v(x_n)\|^p)^{1/p} \leq (\Sigma|\alpha_n|^r)^{1/r}\ (\Sigma\|v(y_n)\|^q)^{1/q},$$

et $\Sigma\|v(y_n)\|^q < +\infty$ puisque v est q-sommante.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Chevet : Deux journées p-radonifiantes, exposé n° 2, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1971-72.

[2] A. Grothendieck : Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques, Boletin da Soc. Math. de Sao Paulo 8 (1956) p. 1-79.

[3] S. Kwapien : On a theorem of L. Schwartz and its applications to absolutely summing operators, Studia Math 38 (1970) p. 193-201.

[4] S. Kwapien : Operators factorizing through L^p spaces (à paraître).

[5] J. Lindenstrauss et A. Pelczynski : Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications, Studia Math. 29 (1968) p.275-326.

[6] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris (1972) t. 274, p.1825.

[7] B. Maurey : C. R. Acad. Sc. Paris (1972) t. 274, p.1939.

[8] H. P. Rosenthal : On subspaces of L^p (à paraître).

[9] Séminaire L. Schwartz, 1969-70.