Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

C. Baiocchi
M. S. Baouendi

Équations d'évolution à coefficients singuliers

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1972-1973), exp. n° 28, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1972-1973____A29_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ECOLE POLYTECHNIQUE
CENTRE DE MATHEMATIQUES
17, rue Descartes
75230 Paris Cedex 05

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 2 - 1 9 7 3

EQUATIONS D'EVOLUTION A COEFFICIENTS SINGULIERS

par C. BAIOCCHI et M. S. BAOUENDI

Exposé N°XXVIII

23 Mai 1973

§ 0. INTRODUCTION

Nous exposons ici un travail sur une classe de problèmes d'évolution avec coefficients pouvant devenir singuliers à l'origine. L'exemple typique est l'opérateur de la chaleur perturbé de la manière suivante :

$$Qu = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\lambda(t,x)}{t} u - \beta(t)\Delta_x u$$

où λ est une fonction bornée et β une fonction > 0 sur $]0,T[$, pouvant s'annuler ou devenir infinie quand t tend vers 0.

La théorie est développée dans le cadre hilbertien abstrait introduit dans [3]. En suivant une démarche introduite dans [2] pour l'étude de problèmes de Cauchy locaux, nous avons trouvé plus commode d'étudier au lieu de Q, l'opérateur $P = tQ$ qui est fuchsien dans la variable t.

Signalons aussi, que des problèmes singuliers analogues, mais relatifs à des opérateurs hyperboliques, viennent d'être traités indépendamment dans [1].

Nous exposons d'abord des résultats d'existence et d'unicité dans des espaces L^2 avec poids ; ensuite nous donnons des résultats de régularité en x et t ; des corollaires dans le cas des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ précisent quand et où les données du type Cauchy sont permises pour $t = 0$, ainsi que les conditions de compatibilité nécessaires.

Les démonstrations détaillées des résultats ainsi que d'autres applications paraîtront prochainement. Nous renvoyons aussi à ce travail pour une bibliographie plus complète.

§ 1. NOTATIONS ET HYPOTHESES

Les hypothèses que nous allons introduire dans ce paragraphe seront supposées satisfaites dans toute la suite.

Nous considérons le célèbre triplet d'espaces de Hilbert.

$$V \subset H \subset V' ,$$

V étant dense dans H.

Nous désignons par $\| \ \|$, $| \ |$ respectivement les normes dans V et H. Le produit scalaire dans H ou la dualité entre V et V' est notée $(\ , \ )$.

Soit $T \in \mathbf{R}_+$; pour $t \in]0,T[$, nous nous donnons $A(t) \in \mathcal{L}(V, V')$ vérifiant

(1) $t \mapsto (A(t)u,v)$ est mesurable pour tout $u, v \in V$.

Nous nous donnons aussi une fonction mesurable

(2) $$\alpha :]0,T[\to \mathbf{R}_+$$

telle que α et α^{-1} soient bornées sur tout compact de $]0,T]$.

Nous supposons : Il existe $M > 0$ tel que, pour tout $u, v \in V$ et $t \in]0,T[$

(3) $$|A(t)u,v)| \leq M(\alpha(t))^2 \|u\| \ \|v\| .$$

(4) $$\mathrm{Re}(A(t)u,u) \geq (\alpha(t))^2 \ \|u\|^2 .$$

Enfin, pour tout $t \in]0,T[$, soit $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(H,H)$ vérifiant :

(5) $\begin{cases} t \mapsto (\Lambda(t)u,v) \text{ est mesurable pour tout } u,\ v \in H. \text{ Il existe } N > 0 \text{ tel} \\ \text{que, pour tout } u,\ v \in H \text{ et } t \in]0,T[\ : \ |(\Lambda(t),u,v)| \leq N|u|\ |v|. \end{cases}$

Nous allons étudier dans la suite l'opérateur différentiel :

(6) $$Pu = tu' + \Lambda(t)u + A(t)u \text{ sur }]0,T[\ .$$

Nous avons besoin d'introduire un nombre $\mu_o \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Nous posons pour $t \in]0,T[$,

(7) $\begin{cases} \mu_o(t) = \text{sup.ess.}\{\mu \,|\, \mu \in \mathbb{R},\ \Re e\{(\Lambda(t)u,u) + (A(t)u,u)\} - (\mu+\frac{1}{2})|u|^2 \geq 0, \forall\, u \in V \\ \mu_o = \lim_{t \to 0}\ \text{inf. ess. } \mu_o(t) \ . \end{cases}$

Il résulte de (4) et (5) que $\mu_o \geq -N - \frac{1}{2}$. Notons aussi que $\mu_o = +\infty$ si et seulement si $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = +\infty$. D'autre part, si $\lim_{t\to 0} \alpha(t) = 0$, nous avons

$$\mu_o = \lim.\inf.\text{ess. } \nu_o(t), \text{ avec}$$

$$\nu_o(t) = \text{sup.ess.}\{\mu \,|\, \mu \in \mathbb{R},\ \Re e(\Lambda(t)u,u) - (\mu + \tfrac{1}{2})|u|^2 \geq 0,\ \forall\, u \in H\ \}$$

Si X est un espace de Hilbert et $\mu \in \mathbb{R}$, nous notons

$$L^2_\mu(X) = \{u \,|\, t^\mu u \in L^2(]0,T[,X)\}$$

$$L^2_{\mu,\alpha}(X) = \{u \,|\, t^\mu \alpha(t) u \in L^2(]0,T[,X)\}$$

$$Z_\mu = L^2_\mu(H) + L^2_{\mu,\alpha^{-1}}(V')$$

$$\mathcal{W}_\mu = \{u \,|\, u \in L^2_\mu(H) \cap L^2_{\mu,\alpha}(V),\ tu' \in Z_\mu\}.$$

Notons que les espaces Z_μ et $\mathcal{W}_\mu$ peuvent s'écrire plus simplement si $\lim.\inf.\text{ess.}\,\alpha(t) > 0$.
$t\to 0$

§ 2. EXISTENCE ET UNICITE

Il résulte de (1), (3) et (5) que l'opérateur P défini par (6) est linéaire et continu de $\mathcal{W}_\mu$ dans Z_μ pour tout $\mu \in \mathbf{R}$. Nous avons :

Théorème 1 : Pour tout $\mu \in]-\infty, \mu_o[$, l'opérateur P est un isomorphisme de $\mathcal{W}_\mu$ sur Z_μ.

En fait ce théorème résoud un problème de Cauchy puisque

(8) $\quad u \in \mathcal{W}_\mu$ implique $t^{\mu+1/2}|u(t)| \to 0$ quand $t \to 0$.

Pour montrer ce résultat, on multiplie l'équation $Pu = f$ par $(1-\eta)t^{2\mu}e^{-2\gamma t}u(t)$, avec η et γ choisis convenablement en fonction de μ et μ_o ; on obtient l'inégalité à priori

(9) $\quad \|u\|_{\mathcal{W}_\mu} \leq C_\mu \|Pu\|_{Z_\mu}$ pour tout $u \in \mathcal{W}_\mu$,

grâce à (4) et la définition de μ_o. Pour terminer la démonstration, on montre que $P(\mathcal{C}_o^\infty(]0,T],V)$ est dense dans Z_μ.

Notons J^2 l'opérateur de dualité entre V et V'. Pour $\delta \in \mathbf{R}_+$ on désigne par V_δ le domaine de J^δ dans H et $V_{-\delta} = (V_\delta)'$. Nous avons donc :

$$V_o = H \ , \quad V_1 = V \ , \quad V_{-1} = V' .$$

Nous notons $\| \ \|_\delta$ la norme dans V_δ et $V_\infty = \bigcap_{\delta \geq 0} V_\delta$.

Nous allons préciser le théorème 1, en donnant des résultats de régularité dans les espace du type V_δ. Pour cela, nous notons pour $\delta \in \mathbf{R}$:

$$Z_{\mu,\delta} = L^2_\mu(V_\delta) + L^2_{\mu,\alpha^{-1}}(V_{\delta-1})$$

$$\mathcal{W}_{\mu,\delta} = \{u \,|\, u \in L^2_{\mu,\alpha}(V_{\delta+1}) \cap L^2_\mu(V_\delta), \ tu' \in Z_{\mu,\delta}\}.$$

On va supposer les hypothèses suivantes remplies pour un $\delta \geq 0$ fixé :

$(10)_\delta$ $\Lambda(t) \in \mathcal{L}(V_\delta, V_\delta)$ pour tout $t \in]0,T[$. Il existe $N_\delta > 0$ tel que, pour tout $u \in V_\delta$ et $t \in]0,T[$ $\|\Lambda(t)u\|_\delta \leq N_\delta \|u\|_\delta$.

$(11)_\delta$ $A(t) \in \mathcal{L}(V_{\delta+1}, V_{\delta-1})$ pour tout $t \in]0,T[$. Il existe $M_\delta > 0$ tel que pour tout $u \in V_{\delta+1}$ et $t \in]0,T[$ $\|A(t)u\|_{\delta-1} \leq M_\delta(\alpha(t))^2 \|u\|_{\delta+1}$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon)$ tel que pour tout $t \in]0,T[$,

$(12)_\delta$ $\|[\Lambda(t), J^\delta]u\|_0 \leq \varepsilon\|u\|_\delta + C(\varepsilon)\|u\|_{\delta-1}$ pour tout $u \in V_\delta$.

$\|[A(t), J^\delta]u\|_{-1} \leq (\alpha(t))^2(\varepsilon\|u\|_{\delta+1} + C(\varepsilon)\|u\|_\delta)$ pour tout $u \in V_{\delta+1}$.

Avec ces hypothèse, nous obtenons :

Théorème 2 : Pour tout $\mu \in]-\infty, \mu_0[$, l'opérateur P est un isomorphisme de $\mathcal{W}_{\mu,\delta}$ sur $Z_{\mu,\delta}$.

Pour $\delta = 0$, le théorème 2 coincide avec le théorème 1.

Il s'agit, dans la démonstration, d'obtenir une inégalité du type (9), qu'on obtiendra en multipliant $Pu = f$ par $(1-\eta)t^{2\mu}e^{-2\gamma t}J^{2\delta}u$, avec η et γ convenables. On termine encore par un argument de densité.

§ 3. REGULARITE EN t

Pour $\delta \geq 0$ et $k \in \mathbf{N}$ fixés, nous supposons $(10)_\delta$, $(11)_\delta$, $(12)_\delta$ et l'hypothèse suivante :

$$(13)_{k,\delta}\begin{cases}(t \mapsto A(t)) \in C^k(]0,T], \mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1}))\\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^k(]0,T], \mathcal{L}(V_\delta,V_\delta))\\ \text{Il existe } C_{k,\delta} > 0 \text{ tel que pour tout } 0 \le j \le k \text{ et tout } t \in]0,T[:\\ \|t^j A^{(j)}\|_{\mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1})} \le C_{k,\delta}(\alpha(t))^2\\ \|t^j \Lambda^{(j)}(t)\|_{\mathcal{L}(V_\delta,V_\delta)} \le C_{k,\delta} \ .\end{cases}$$

Nous avons alors :

<u>Théorème 3</u> : Pour tout $\mu \in]-\infty,\mu_o[$ l'opérateur P est un isomorphisme de l'espace

$$\{u \in \mathcal{W}_{\mu,\delta},\ u^{(j)} \in \mathcal{W}_{\mu+j,\delta}\ ,\quad 0 \le j \le k\}$$

sur l'espace

$$\{f \in Z_{\mu,\delta},\ f^{(j)} \in Z_{\mu+j,\delta},\ 0 \le j \le k\}\ .$$

La démonstration se fait par récurrence sur k avec des techniques usuelles en remarquant en plus que l'on a

$$(Pu)' = (P+1)u' + \Lambda' u + A'u,$$

et que le nombre μ_o de l'opérateur $P+1$ est donc décalé de +1 par rapport à celui de P.

Nous allons donner maintenant un autre résultat de régularité en t dont les hypothèse minimales sur la régularité en V_δ sont liées à l'ordre de dérivabilité en t. Pour simplifier l'exposition, nous allons supposer, dans la suite de ce paragraphe, $(10)_\delta$, $(11)_\delta$ et $(12)_\delta$ pour tout $\delta \ge 0$, ainsi que l'hypothèse suivante :

$$(14)\qquad \begin{cases}\text{Pour tout } \delta \ge 0\\ (t \mapsto A(t)) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(V_{\delta+1},V_{\delta-1})),\\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^\infty([0,T], \mathcal{L}(V_\delta,V_\delta)).\end{cases}$$

Théorème 4 : Pour tout $\mu \in]-\infty,\mu_o[$, tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $\delta \geq 2k$, l'opérateur P est un isomorphisme de l'espace

$$\{u \in \mathcal{W}_{\mu,\delta},\ u^{(j)} \in \mathcal{W}_{\mu,\delta-2j},\quad 0 \leq j \leq k\}$$

sur l'espace

$$\{f \in Z_{\mu,\delta},\ f^{(j)} \in Z_{\mu,\delta-2j},\quad 0 \leq j \leq k\}\ .$$

La démonstration de ce théorème, qui se fait aussi par récurrence sur k, est basée sur le fait que (14) et (4) impliquent que $\alpha(t)$ est bornée sur $]0,T[$; on utilisera alors le fait suivant :

$$v \in Z_{\mu+1,\delta}\ ,\ tv' \in Z_{\mu+1,\delta-2} \Rightarrow v \in \mathcal{W}_{\mu+1,\delta-2}\ ,$$

ainsi que le théorème 2.

En remarquant que l'on a

$$C^\infty([0,T],V_\infty) = \bigcap_{\substack{k\geq 0\\ \delta\geq 0}} H^k(]0,T[,V_\delta)$$

(H^k étant l'espace de Sobolev usuel), nous obtenons à partir du théorème 4 le corollaire suivant :

Corollaire 1 : Si μ_o est strictement positif, l'opérateur P est un automorphisme de $\mathcal{C}^\infty([0,T],V_\infty)$.

Toujours avec les hypothèse du théorème 4, nous avons :

Théorème 5 : Soit $k_o \in \mathbb{N}$, les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\Lambda(0) + A(0) + k$ est un automorphisme de V_∞ pour tout entier $k \geq k_o$.

(ii) P est un automorphisme de l'espace :

$$\{u \mid u \in C^\infty([0,T],V_\infty),\ u^{(j)}(0) = 0 \text{ pour } 0 \leq j < k_o\}$$

Plus généralement, à partir de l'étude des opérateurs $\Lambda(0) + A(0) + k$, $k \in \mathbb{N}$ (on peut évidemment se borner à $k < -\mu_o$) dans V_∞, on peut caractériser le noyau et l'image de P dans $C^\infty([0,T],V_\infty)$. La

démonstration du théorème 5, ainsi que celle de la généralisation ci-dessus, repose sur le corollaire 1 et un développement de Taylor au voisinage de $t = 0$, en remarquant que

$$P(t^k v) = t^k (P + k) v .$$

§ 4. REMARQUES ET EXEMPLES

Remarque 1 : Nous remarquons que la restriction $\mu < \mu_o$, en général, ne peut pas être améliorée dans le théorème 1 par exemple. On peut le voir dans le cas suivant :

$$V = H = V' = \mathbb{C} , \quad \Lambda u = -\frac{u}{2} , \quad A(t)u = u \quad \text{donc}$$

$$\alpha(t) = 1, \quad Pu = tu' + \frac{u}{2} , \quad \mu_o = 0 .$$

Remarque 2 : Si l'on suppose $A(t)$ et $\Lambda(t)$ définis sur $[-T,T]$ et satisfaisant à :

$$(14)' \qquad \begin{cases} \text{Pour tout } \delta \geq 0 \\ (t \mapsto A(t)) \in C^\infty([-T,T], \mathcal{L}(V_{\delta+1}, V_{\delta-1})), \\ (t \mapsto \Lambda(t)) \in C^\infty([-T,T], \mathcal{L}(V_\delta, V_\delta)) \end{cases}$$

(au lieu de (14)), les autres hypothèses des théorèmes 4 et 5 étant supposées valables sur les intervalles $]-T,0[$ et $]0,T[$, les conclusions des théorèmes 4 et 5 ont lieu sur $[-T,T]$, ce qui résoud un problème bilatéral en t.

Un exemple : Nous donnons ici une application concrète des résultats précédents, en nous limitant à un exemple choisi le plus simple possible.

Soit Ω une variété C^∞ compacte sans bord ; on notera x la variable dans Ω et Δ l'opérateur de Laplace-Beltrami sur Ω. On prend :

$$H = L^2(\Omega), \quad V = H^1(\Omega), \quad V' = H^{-1}(\Omega)$$

$$A(t) = t^{2\beta}(1 - \Delta) \quad \text{avec } \beta \in \mathbb{R} ,$$

$$\Lambda(t)u = \lambda(t,x)u \quad \text{avec } \lambda \in L^\infty(]0,T[\times \Omega) .$$

Nous sommes donc, dans la situation du paragraphe 1, avec $\alpha(t) = t^{\beta}$ et

$$P = t\,\frac{\partial}{\partial t} + \lambda(t,x) + t^{2\beta}(1-\Delta).$$

Nous avons :

$$\mu_o = +\infty \qquad \text{si } \beta < 0$$

$$\mu_o = \liminf_{t\to 0}\ \inf_{x\in\Omega}\ \mathrm{Re}\,\lambda(t,x) \qquad \text{si } \beta > 0$$

Pour $\beta = 0$, nous devons modifier la formule précédente en fonction de la plus petite valeur propre de $1-\Delta$.

Le théorème 1 s'applique sans autres hypothèses. Pour exploiter les résultats de régularité, nous nous bornons au cas

$$\lambda \in C^{\infty}([0,T]\times\Omega).$$

Les théorèmes 2 et 3 s'appliquent pour tout $\beta \in \mathbb{R}$; les théorèmes 4 et 5 exigent que 2β soit un entier ≥ 0.

En particulier, si 2β est un entier > 0, d'après le corollaire 1, nous obtenons :

L'opérateur P est un automorphisme de $C^{\infty}([0,T]\times\Omega)$ si et seulement si pour tout $x \in \Omega$, $\lambda(0,x)$ ne prend aucune valeur entière négative ou nulle.

Dans le cas où β est un entier ≥ 0, on peut aussi appliquer la remarque 2 ci-dessus et obtenir des résultats sur $[-T,T]\times\Omega$.

Pour illustrer la généralisation du théorème 5 indiquée, bornons nous au cas $2\beta = 1$, $\mathrm{Re}\,\lambda(0,x) > -1$. Dans ce cas, la résolubilité dans $C^{\infty}([0,T]\times\Omega)$ de $Pu = f$ se ramène, par un développement limité à l'ordre 1 au voisinage de $t = 0$, à la résolubilité dans $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ de

$$\lambda(0,x)v = g\ ,$$

appliquée au cas $g(x) = f(0,x)$, $v(x) = u(0,x)$.

Le problème de Cauchy :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\lambda(x,t)}{t} u + (1 - \Delta)u = \frac{f}{t}$$

$$u(0,x) = v(x) \qquad (\Re e\, \lambda(0,x) > -1)$$

admet donc une solution unique dans $C^\infty([0,T] \times \Omega)$, avec f dans le même espace et $v \in C^\infty(\Omega)$, si et seulement si la condition de compatibilité suivante est satisfaite :

$$\lambda(0,x)\ v(x) = f(0,x).$$

Le cas $\lambda(0,x) \equiv 0$ redonne en particulier le cas classique de l'équation de la chaleur.

BIBLIOGRAPHIE

[1] S. Alinhac : Problèmes de Cauchy hyperboliques singuliers (à paraître).

[2] M. S. Baouendi et C. Goulaouic : Cauchy problems with characteristic initial hypersurface, à paraître C. P. A. M.

[3] J. L. Lions : Equations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer Verlag (1961).