

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

S. ALINHAC

**Une caractérisation des fonctions harmoniques dans un ouvert
borné par « certaines propriétés de moyenne »**

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1971-1972), exp. n° 30,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1971-1972____A30_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

CENTRE DE MATHÉMATIQUES

17, RUE DESCARTES - PARIS V

Téléphone : MÉDiciS 11-77
(633)

S E M I N A I R E G O U L A O U I C - S C H W A R T Z 1 9 7 1 - 1 9 7 2

UNE CARACTÉRISATION DES FONCTIONS HARMONIQUES DANS UN OUVERT

BORNE PAR "CERTAINES PROPRIÉTÉS DE MOYENNE",

par S. ALINHAC

Exposé N° XXX

31 Mai 1972

INTRODUCTION

Cet exposé fait suite à celui de M. Brunel [6]. Il présente quelques résultats sur les propriétés de moyenne des fonctions harmoniques analogues à ceux de [5], que M. Brunel avait expliqués, mais obtenus par des méthodes d'analyse classique et d'équations aux dérivées partielles (un peu dans l'esprit de [1]), très différentes des méthodes de théorie ergodique employées dans [2], [3], [4], [5].

L'essentiel consiste en l'introduction d'une "fonction moyenne" de la fonction f donnée ; cette fonction est solution d'une équation hyperbolique singulière dans un ouvert D de R^{n+1} "au-dessus" de l'ouvert Ω de R^n où f est définie, et ses valeurs sur tout le bord de l'ouvert D sont connues. Une estimation intégrale met en évidence la "surdétermination" du problème et permet de conclure à l'harmonicité de f .

§ I. L'ESTIMATION INTEGRALE

Soient Ω un ouvert borné de R^n , de classe C^1 , $r \in C^1(\bar{\Omega})$ une fonction positive sur Ω , nulle sur $\partial\Omega$.

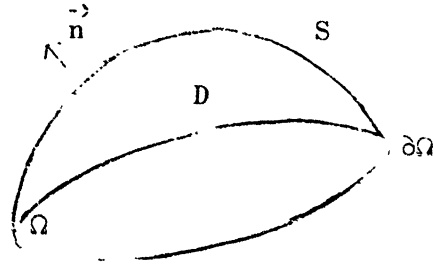
On désigne par D le domaine de R^{n+1} ((x, t) sont les coordonnées d'un point de R^{n+1})

$$D = \{(x, t), 0 < t < r(x), x \in \Omega\}.$$

et par S l'ensemble $\{(x, t), x \in \Omega, t = r(x)\}$.

On considère une fonction $u \in C^2(\bar{D})$, vérifiant

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}.$$



On pose $\tilde{u}(x) = u(x, r(x))$, $x \in \Omega$.
 $P_\alpha(u) = -\Delta_x u + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{t} \frac{\partial u}{\partial t}$.

Proposition 1 : Avec les hypothèses et les notations précédentes, on a

$$2 \int_D \frac{\partial u}{\partial t} P_\alpha(u) dx dt = 2\alpha \int_D \frac{1}{t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt + \int_\Omega \{ |\text{grad } \tilde{u}|^2 - |\text{grad } f|^2 \} dx + \\ + \int_\Omega (1 - |\text{grad } r|^2) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, r(x)) \right]^2 dx$$

Preuve : en posant $p_i = -2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t}$, $q = |\text{grad } u|^2$, on a en effet

$$2 \frac{\partial u}{\partial t} P_\alpha(u) = 2 \frac{\alpha}{t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \text{div}(p_i, q), \text{ et } \int_D \text{div}(p_i, q) dx dt = \int_\Omega -q dx + \int_S (p_i, q) \vec{n} d\sigma$$

l'intégrale sur S, ramenée à une intégrale sur Ω par la carte

$$\begin{cases} R : \Omega \rightarrow S \\ x \mapsto (x, r(x)) \end{cases}$$

vaut

$$\int_\Omega |\text{grad } \tilde{u}|^2 dx + \int_\Omega (1 - |\text{grad } r|^2) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x, r(x)) \right]^2 dx. \text{ qed.}$$

Corollaire 1 : Si $|\text{grad } r| \leq 1$, $\alpha > 0$, u à valeurs réelles, $P_\alpha(u) = 0$ dans D et $\tilde{u}(x) = f(x)$ dans Ω , alors $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ dans D et f est harmonique dans Ω .

Proposition 2 : Si r est supposée seulement lipschitzienne de rapport inférieur ou égal à un, l'estimation de la proposition 1 et son corollaire restent valables.

Preuve : Soit $\tilde{r}$ le prolongement de r par 0 hors de $\bar{\Omega}$; on "régularise" $\tilde{r}$ en posant

$$r_\varepsilon = \tilde{r} * \varphi_\varepsilon$$

(où $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} \varphi(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, $\varphi \geq 0$, $\int \varphi dx = 1$, $\varphi \in D(\mathbb{R}^n)$, et $\varphi = 1$ pour $|x| \leq 1$).

On vérifie aisément que $r_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $|\text{grad } r_\varepsilon| \leq 1$, r_ε converge uniformément vers $\tilde{r}$, et si $\tilde{r}$ est différentiable en x (ce qui a lieu pour presque tout x), $(\text{grad } r_\varepsilon)(x) \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{>0} (\text{grad } \tilde{r})(x)$.

On réalise alors une intégration par parties comme dans la proposition 1, mais cette fois dans le domaine D_ε .

$$D_\varepsilon = \{(x, t), 0 < t < r_\varepsilon(x), x \in \Omega\},$$

limité par Ω ,

$$S_\varepsilon = \{(x, t), t = r_\varepsilon(x), x \in \Omega\}$$

et une bande latérale

$$L_\varepsilon = \{(x, t), x \in \partial\Omega, 0 \leq t \leq r_\varepsilon(x)\}.$$

En passant à la limite dans les intégrales lorsque $\varepsilon \searrow 0$ grâce au théorème de convergence dominée de Lebesgue, on obtient l'estimation voulue.

§ 1. LES MOYENNES A POIDS

La fonction $u(x, t)$, "moyenne en volume" de f , définie par $t > 0$,

$$u(x, t) = \text{moy}_{B(x, t)} f,$$

peut s'écrire aussi

$$u(x, t) = \frac{1}{\omega_n t^n} \int_{B(0, t)} f(x-y) dy = (f * N_t)(x),$$

où $N_t = \frac{1}{\omega_n t^n} \chi_{B(0, t)}$ est un "noyau", distribution de $\mathbb{R}^n$ à support compact (ω_n = volume de la boule unité de $\mathbb{R}^n$).

On sait que N_t , en tant que distribution dépendant du paramètre $t > 0$, vérifie $P_{n+1}(N_t) = 0$, avec les conditions de bord

$$\begin{cases} N_t \xrightarrow{t \rightarrow 0} \delta \\ \frac{\partial N_t}{\partial t} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{cases}$$

D'une façon plus générale, en cherchant des "noyaux de moyenne" possédant des propriétés analogues, on est conduit à poser

$$N_{t, \beta} = \frac{1}{\sigma_n C_{n, \beta}} \frac{1}{t^n} \begin{cases} \left(1 - \frac{r^2}{t^2}\right)^\beta & \text{si } r = |x| < t \\ 0 & \text{si } r \geq t. \end{cases}$$

On définit ainsi, pour $\operatorname{Re} \beta > -1$, une distribution intégrable sur R^n , dépendant du paramètre $t > 0$ (σ_n = aire de la sphère unité dans R^n , $C_{n,\beta} = \int_0^1 r^{n-1} (1-r^2)^\beta dr$).

1) Pour $\operatorname{Re} \beta > +1$, on vérifie, par des calculs élémentaires, que

$$\left\{ \begin{array}{l} -\Delta_x N_{t,\beta} + \frac{\partial^2 N_{t,\beta}}{\partial t^2} + \frac{2\beta+n+1}{t} \frac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} = 0 \\ N_{t,\beta} \rightarrow \delta \quad \text{quand } t \searrow 0 \\ \frac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} \rightarrow 0 \quad \text{quand } t \searrow 0. \end{array} \right.$$

L'égalité et les convergences écrites prises au sens de $D'(R^n)$.

2) Pour $\operatorname{Re} \beta > 0$, on obtient, en intégrant par parties,

$$(2\beta + n) C_{n,\beta} = 2\beta C_{n,\beta-1}.$$

Au cours des calculs qui permettent d'établir 1), on remarque que pour $\operatorname{Re} \beta > 0$,

$$2\beta \chi_{t,\beta-1} = 2\beta \chi_{t,\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} \chi_{t,\beta}$$

(on note $\chi_{t,\beta} = \sigma_n C_{n,\beta} N_{t,\beta}$).

Cette relation, jointe à celle sur les $C_{n,\beta}$, fournit

$$(2\beta + n) N_{t,\beta-1} = 2\beta N_{t,\beta} - \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} N_{t,\beta}.$$

$N_{t,\beta}$ se prolonge donc, pour $t > 0$ fixé, en une distribution méromorphe

de β , ayant des pôles simples aux points

$$\beta = -\frac{n}{2} - 1 - q, \quad q \text{ entier } \geq 0.$$

De plus, si β n'est pas un pôle, $N_{t,\beta}$ est deux fois continuellement dérivable en t et ses dérivées prolongent celles calculées en 1).

On a ainsi prouvé le

Théorème 1 : pour $\beta \in \mathbb{C}$, $\beta \neq -\frac{n}{2} - 1 - q$, q entier ≥ 0 , la distribution $N_{t,\beta}$ vérifie

$$\left. \begin{aligned} P_{2\beta+n+1}(N_{t,\beta}) &= 0 \\ N_{t,\beta} &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} \delta \\ \frac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} &\xrightarrow[t \rightarrow 0]{} 0 \end{aligned} \right\} \text{ dans } D'(\mathbb{R}^n).$$

Remarques : 1) $\beta = 0$ correspond au noyau de la moyenne en volume (noté N_t au début du paragraphe).

$\beta = -1$ à celui de la moyenne en surface. Les noyaux correspondant à $\beta = -p$, p entier ≥ 1 , s'ils existent, sont des distributions portées par la sphère de rayon t .

2) Si β est réel, $N_{t,\beta}$ l'est.

3) Si β est un pôle, $\beta = -\frac{n}{2} - 1 - q$, $2\beta + n + 1$, coefficient de $\frac{1}{t}$ dans l'équation $P_{2\beta+n+1}(u) = 0$, est un entier impair négatif.

En intégrant la distribution $N_{t,\beta}$ le long d'un petit contour fermé simple entourant le pôle, on obtient pour les distributions

$$R_{t,q} = \text{rés}_{-n/2-1-q} N_{t,\beta} \text{ la propriété}$$

$$\left. \begin{aligned} P_{-2q-1}(R_{t,q}) &= 0 \\ R_{t,q} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \\ \frac{\partial R_{t,q}}{\partial t} &\xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \end{aligned} \right\} \quad q \text{ entier } \geq 0.$$

§ III. APPLIICATION AU PROBLEME POSE: RESULTATS

Les notations sont celles de I; les hypothèses sur r celles du corollaire 1.

f étant donné dans Ω , déjà assez régulière, et $\tilde{f}$ en étant un prolongement régulier, on pose

$$u_t = \tilde{f} * N_{t,\beta}, \quad \beta \text{ n'éant pas un pôle.}$$

On définit ainsi une distribution de R^n dépendant continuellement de t , $t > 0$. Si la distribution de $R^n \times R_+$ qu'elle définit, notée u , a une trace sur S , on dira que f a la propriété de β -moyenne sur les boules de rayons r si

$$u|_S \circ R = f, \text{ ou } R \text{ est la carte de } \Omega \text{ sur } R$$

définie en I.

Théorème 2 : Si $\beta > -1$, $f \in H^2(\Omega)$, la définition de "f a la propriété de β -moyenne sur les boules de rayons r" a un sens, et si f a cette propriété, f est harmonique dans Ω .

Preuve : $N_{t,\beta}$ est intégrable, et $\|N_{t,\beta}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} = 1$. De plus

$$\frac{\partial N_{t,\beta}}{\partial t} = -\frac{1}{t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} x_i N_{t,\beta},$$

$$\frac{\partial^2 N_{t,\beta}}{\partial t^2} = \frac{1}{t^2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} x_i x_j N_{t,\beta}$$

et les normes L^1 de $\frac{1}{t} x_i N_{t,\beta}$ et $\frac{1}{t^2} x_i x_j N_{t,\beta}$ sont bornées indépendamment de $t > 0$.

La distribution u, définie par

$$\langle u, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}_+} dt \langle u_t, \varphi(\cdot, t) \rangle, \text{ se trouve donc dans } L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+), \text{ car}$$

$$|\langle u, \varphi \rangle| \leq \int dt \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

$$\text{et } \|u_t\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq \|\tilde{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|N_{t,\beta}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

On voit semblablement que u'_t définit dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ une distribution qui coïncide avec $\frac{\partial u}{\partial t}$ (dérivée de u par rapport à t au sens des distributions) et appartient à $L^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$; de même pour u''_t .

La régularité "tangentielle" de u suit immédiatement de celle de f ; on en conclut que $u \in H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$.

Soit alors une suite (f_n) de fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$,

$$f_n \rightarrow \tilde{f} \quad \text{dans } H^2(\mathbb{R}^n),$$

et posons $u_p(x, t) = (f_p * N_{t, \beta})(x)$. La formule

$$u_p(x, t) = \frac{1}{\sigma_n C_{n, \beta}} \int_{B(0, 1)} f_p(x - tu) (1 - |u|^2)^\beta du$$

montre que

$$u_p \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \bar{\mathbb{R}}_+), \text{ avec}$$

$$\begin{cases} u_p(x, 0) = f_p(x) \\ \frac{\partial u_p}{\partial t}(x, 0) = 0 \end{cases}$$

Grâce à ce qui a été dit précédemment sur u , on voit que $u_p \rightarrow u$ dans $H^2(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+)$.

Appliquons alors à u_p l'estimation de I :

$$2(2\beta + n + 1) \int_D \frac{1}{t} \left(\frac{\partial u_p}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq \int_\Omega \{ |\text{grad } f_p|^2 - |\text{grad } \tilde{u}_p|^2 \} dx$$

où $\tilde{u}_p(x) = u_p(x, r(x))$.

Par hypothèse de moyenne, $\tilde{u}_p \rightarrow f$ dans $H^{3/2}(\Omega)$; en passant à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient

$$2(2\beta + n + 1) \int_D \frac{1}{t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 dx dt \leq 0. \quad \text{qed.}$$

On peut prouver d'une manière analogue un théorème un peu plus général, en "répartissant" la régularité entre f et $N_{t,\beta}$:

Theorème 3 : Si $-p < \beta \leq -p+1$, $p \in \mathbb{Z}$, et $f \in H^{p+1}(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, et si f a la propriété de β -moyenne, $\beta > -\frac{n+1}{2}$, alors f est harmonique.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. Delsarte, J. L. Lions : Moyennes généralisées. Commentarii Math. Helvetici 1959.
- [2] M. A. Ackoglu, R. W. Sharpe : Ergodic theorems and boundaries, Amer. Math. Soc. Vol. 132, 1968.
- [3] J. R. Baxter : Restricted mean values and harmonic functions, à paraître.
- [4] Heath : Functions possessing restricted mean value properties, à paraître.
- [5] Heath, Orey : Travail à paraître.
- [6] Brunel : Exposé au séminaire de l'Ecole Polytechnique (1972)
- [7] H. Rhee : A characteristic initial value problem for the Euler-Poisson-Darboux equation in a quadrant of $\mathbb{R}^n$; Journal of the London Math. Soc. Vol. 4, avri 1972.