SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

JACQUES SAKAROVITCH

Un cadre algébrique pour l'étude des monoïdes syntactiques

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 28, nº 1 (1974-1975), exp. nº 14, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1974-1975__28_1_A9_0>

Séminaire P. DUBREIL
(Algèbre)
28e année, 1974/75, n° 14, 10 p.

17 mars 1975

UN CADRE ALGÉBRIQUE POUR L'ÉTUDE DES MONOÏDES SYNTACTIQUES

par Jacques SAKAROVITCH

La théorie des minoïdes syntactiques, née en 1955 des travaux de M. P. SCHÜTZENBERGER [12], s'est développée principalement "à l'ombre" du théorème de Kleene qui assure qu'un langage est rationnel si, et seulement si, son monoïde syntactique est fini.

La considération des monoïdes syntactiques (infinis) de langages non rationnels, et en particulier des langages "context-free" qui jouissent de propriétés combinatoires remarquables [2], est beaucoup plus récente [8], [11].

Pour préciser l'importance de l'hypothèse de la finitude du monoïde syntactique, nous avons été conduits à considérer non plus seulement le monoïde syntactique, mais le couple formé par le monoïde syntactique et l'image du langage dans son monoïde syntactique ; puis, plus généralement, les couples formés par un monoïde et une partie de ce monoïde.

C'est le point de vue que nous développons ici. Nous retrouvons d'abord, de façon formelle, les résultats élémentaires de la théorie, puis nous donnons une nouvelle conséquence de la finitude du monoïde syntactique. Nous plaçant alors sous cette hypothèse de finitude nous donnons une interprétation du théorème des variétés d'Eilenberg. On trouvera dans l'exposé de J.-F. PERROT à ce séminaire [9], une présentation plus classique de ce théorème, assortie d'exemples et de résultats importants, et précédée d'un rappel des définitions des notions usuelles de la théorie. Rappel que nous ne ferons donc pas, et auquel nous renvoyons éventuellement le lecteur.

Nous terminons en présentant certains résultats et problèmes dans le cas des monoïdes syntactiques infinis.

Les démonstrations, et une discussion plus complète de tous ces résultats, seront données en [11].

1. Définitions et relations élémentaires.

Définition. - On appelle P-monoïde un couple (M , P) , noté M_P dans la suite, où M est un monoïde finiment engendré (appelé support de M_P) et où P est une partie quelconque de M

Un homomorphisme de P-monoïdes $\varphi : M_P \dashrightarrow N_Q$ est un homomorphisme de monoïdes $\varphi : M \dashrightarrow N$ tel que $\varphi^{-1}(Q) = P$.

Les P-monoïdes et leurs homomorphismes ainsi définis forment une catégorie munie du foncteur "oubli de la partie" qui l'envoie sur la catégorie des monoïdes. Par un <u>abus de langage</u>, nous confondrons deux homomorphismes de P-monoïdes qui ont la même image par ce foncteur.

Nous notons $\overline{P}$ le complémentaire de la partie P d'un ensemble E quand la référence à E est superflue ; les relations de Morgan s'écrivent alors :

$$\varphi : M_P \dashrightarrow N_Q \implies \varphi : M_{\overline{P}} \dashrightarrow N_{\overline{Q}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\varphi : M_{P_1} \dashrightarrow N_{Q_1} \\ \varphi : M_{P_2} \dashrightarrow N_{Q_2}\end{array}\right\} \implies \varphi : M_{P_1 \cup P_2} \dashrightarrow N_{Q_1 \cup Q_2}$$

Si $\varphi : A \longrightarrow M$ et $\psi : A \longrightarrow N$ sont deux homomorphismes (de monoïdes), on note $\varphi \times \psi : A \longrightarrow M \times N$ l'homomorphisme défini par $\varphi \times \psi(a) = (\varphi(a) , \psi(a))$.

Soient $\varphi : A_E \longrightarrow M_P$ et $\psi : A_F \longrightarrow N_Q$ deux homomorphismes (de P-monoïdes). On a

$$\varphi \times \psi : A_{E \cup F} \dashrightarrow M \times N_{E \times N \cup M \times F}$$

$$\varphi \times \psi : A_{E \cap F} \dashrightarrow M \times N_{E \times F} \text{ .}$$

M_P est un sous-P-monoïde de N_Q si M est un sous-monoïde de N et si $P = Q \cap M$ (i. e. l'injection canonique de M dans N est un morphisme de P-monoïdes) ; M_P divise N_Q si M_P est une image homomorphe d'un sous-P-monoïde de N_Q .

Une congruence σ du P-monoïde M_P est une congruence du support M qui sature P . Les congruences de M_P forment un sous-treillis complet du treillis complet des congruences du monoïde M .

Le monoïde syntactique de M_P (noté $\mathfrak{M}(M_P)$), est le quotient de M_P par sa congruence la plus grossière. On dira que M_P est syntactique, ou que P est <u>disjonctive</u> dans M , si $\mathfrak{M}(M_P) = M_P$ c'est-à-dire si la seule congruence de M_P est l'identité.

Le premier théorème d'isomorphie, appliqué à la structure de P-monoïde, dit alors que si $\varphi : M_P \longmapsto N_Q$ est un homomorphisme surjectif, et si

$$\psi : M_P \longmapsto \mathfrak{M}(M_P)$$

est l'homomorphisme syntactique de M_P , il existe $\theta : N_Q \longmapsto \mathfrak{M}(M_P)$ unique tel que $\psi = \theta \circ \varphi$, c'est-à-dire tel que le diagramme 1 soit commutatif :

$$\begin{tikzcd} M_P \arrow[r, mapsto, "\varphi"] \arrow[d, "\psi"'] & N_Q \arrow[dl, "\theta"] \\ \mathfrak{M}(M_P) & \end{tikzcd}$$

diagramme 1

La définition et la relation suivantes seront utilisées aux §3 et 4.

<u>Définition</u>. - Soient P et A deux parties d'un monoïde M . Le <u>quotient à</u>

droite (resp. *à gauche*) de P par A est l'ensemble :

$$P \mathbin{\dot{.}} A = \{m \in M \; ; \quad \exists\, a \in A \;,\; ma \in P\}$$

$$(\text{resp. } A \mathbin{\dot{.}} P = \{m \in M \; ; \quad \exists\, a \in A \;,\; am \in P\}) \;.$$

Soit $\varphi : M_P \longrightarrow N_Q$ un homomorphisme de P-monoïdes ; et soit A une partie de M . Alors

$$\varphi : M_{P \dot{.} A} \longrightarrow N_{Q \dot{.} \varphi(A)}$$

est un homomorphisme de P-monoïdes.

2. *Langages et P-monoïdes syntactiques.*

Définition. - On appelle *langage* un P-monoïde dont le support est libre.

Notre but est de caractériser les langages à partir de leurs P-monoïdes syntactiques.

Définition. - On dira que deux P-monoïdes M_P et N_Q *s'échangent par homomorphisme* s'il existe μ et ν tels que

$$\mu : M_P \longrightarrow N_Q \quad \text{et} \quad \nu : N_Q \longrightarrow M_P \;.$$

PROPOSITION 1. - *Deux langages s'échangent par homomorphisme si, et seulement si, leurs P-monoïdes syntactiques se divisent l'un l'autre.*

En particulier, deux langages ayant même P-monoïde syntactique s'échangent par homomorphisme.

Remarquant que, si M_P divise N_Q , on a $|M| \leqslant |N|$ (et $|P| \leqslant |Q|$), il vient le résultat suivant.

COROLLAIRE 1. - *Deux langages rationnels s'échangent par homomorphismes si, et seulement si, leurs P-monoïdes syntactiques sont isomorphes.*

La condition nécessaire de la proposition 1 est une conséquence du premier théorème d'homomorphie. La condition suffisante repose sur le lemme suivant.

LEMME 1. - Soient X^*_L un langage, M_P et A_E deux P-monoïdes. Soient φ un homomorphisme, $\varphi : X^*_L \longrightarrow M_P$ et ψ un homomorphisme surjectif, $\psi : A_E \longmapsto M_P$. Il existe alors θ , $\theta : X^*_L \longrightarrow A_E$ tel que $\psi \circ \theta = \varphi$; c'est-à-dire tel que le diagramme 2 soit commutatif.

$$\begin{tikzcd} & X^*_L \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[d, "\varphi"] \\ A_E \arrow[r, mapsto, "\psi"] & M_P \end{tikzcd}$$

diagramme 2

Le lemme 1 énonce une propriété des monoïdes libres de *projectivité restreinte* aux morphismes surjectifs (dont on sait qu'ils ne coïncident pas avec les épimorphismes dans la catégorie des monoïdes). Y. GIVE'ON a démontré en [4] (où on trouve l'équivalent de la proposition 1 et du corollaire 1) que cette propriété est caractéristique des monoïdes libres ; on en déduit que la proposition 1 serait fausse pour des P-monoïdes qui ne sont pas des langages.

Nous allons voir maintenant que la proposition 1 est, en un certain sens, la propriété la plus forte que l'on puisse énoncer en général sur deux langages non rationnels qui s'échangent par homomorphisme.

Définition. - Soient $\theta : X_L^* \longrightarrow X_L^*$ un endomorphisme de X_L^*, et φ le morphisme syntactique de X_L^*. On dira que φ commute à θ si

$$\forall\ p\ ,\ q \in X^*\ , \qquad \varphi(p) = \varphi(q) \Longleftrightarrow \varphi(\theta(p)) = \varphi(\theta(q))\ .$$

Question. - Le morphisme syntactique d'un langage commute-t-il toujours aux endomorphismes de ce langage ?

Remarquons tout d'abord que le corollaire 1 entraîne une réponse positive pour les langages rationnels. La question ne se pose donc que pour les langages non rationnels, ou se ramène éventuellement à la détermination d'une sur-classe stricte des langages rationnels sur laquelle la réponse serait positive. L'exemple suivant montre qu'en fait la réponse est totalement négative.

Contre-exemple. - Soient $X = \{x\ ,\ y\ ,\ z\}$, et $\theta : X^* \longmapsto X^*$ l'homomorphisme défini par $\theta(x) = xz$, $\theta(y) = y$, $\theta(z) = z$. Soient

$$L_1 = \{(xz^*)^n\ yz^n\ ;\ \ n \geqslant 0\}\ ,$$

$$L_2 = \{yxz^n\ xz^m\ yz^*\ ;\ \ m \ngtr n \ngtr 0\} \quad \text{et}$$

$$L = L_1 \cup L_2\ .$$

On vérifie que θ est un endomorphisme du langage X_L^* alors que l'on a :

$$xyz \not\equiv x^2\ yz^2\ \ [\sigma_L] \quad \text{et} \quad xzyz \not\equiv xzxzyz^2\ \ [\sigma_L]\ .$$

Le langage L est "context-free", linéaire, déterministe à un compteur ; c'est dire s'il occupe la place "la plus proche possible" des langages rationnels dans la hiérarchie de Chowsky et dans ses raffinements classiques (cf. par exemple [2]).

3. Cylindres et théorème des variétés.

Le théorème dit "des variétés" d'EILENBERG [3] donne un cadre général dans lequel se placent les résultats principaux de la théorie des monoïdes syntactiques des langages rationnels. Il met en place une correspondance biunivoque entre les variétés de monoïdes et certaines familles de langages rationnels (appelées variétés de langages) définies de façon idoine. On trouvera une présentation complète de ce théorème, assortie d'exemples, dans l'exposé de J.-F. PERROT à ce séminaire [9]. Nous donnons ici une démonstration du théorème des variétés, plus inductive que l'originale, à l'aide des P-monoïdes.

Posons d'abord la définition suivante :

Définition. - Une famille $\mathfrak{F}$ de P-monoïdes contient totalement un monoïde M si, et seulement si, pour toute partie P de M, M_P est un élément de $\mathfrak{F}$.

La correspondance biunivoque du théorème des variétés se réduit au couplage de chaque variété de monoïdes avec la famille de P-monoïdes qui la contient totalement. Le lieu final avec le théorème d'Eilenberg est obtenu en ne retenant de ces familles de P-monoïdes que les langages qu'elles contiennent. Et le rôle important joué par les monoïdes syntactiques dans ce couplage est exprimé tout entier dans le lemme "de densité".

Définition. - Nous appellerons variété de monoïdes toute famille de monoïdes finis fermée par :

(i) passage à un sous-monoïde,

(ii) image homomorphe,

(iii) produit direct (fini).

Remarquons que la définition ci-dessus ne coïncide pas avec la définition classique en algèbre universelle où les variétés, familles de monoïdes finis ou infinis, fermées par produit direct fini ou infini, coïncident avec les familles définies par des équations (théorème de Birkhoff). Nous ne considèrerons ici que les familles de monoïdes finis ; suivant EILENBERG, nous nous dispenserons du préfixe disgracieux "pseudo" pour désigner nos variétés.

Définition. - Un cylindre est une famille de P-monoïdes fermée par :

(i) image homomorphe,

(ii) image homomorphe inverse.

La fermeture par homomorphisme inverse est une opération très forte pour les supports (tout monoïde M, fini ou infini, apparaît comme support de M_M ou de $M_\emptyset$ dans tout cylindre), mais non sur les P-monoïdes eux-mêmes.

Un cylindre est ainsi défini qu'il contient tout P-monoïde dont le P-monoïde syntactique divise un P-monoïde quelconque contenu dans ce cylindre ; donc en particulier il contient tous les P-monoïdes qui ont le même P-monoïde syntactique.

On cherche ensuite les opérations de fermeture supplémentaires qu'il faut imposer à un cycindre pour qu'il contienne tous les P-monoïdes syntactiques de même support. La réponse est donnée pour les supports finis par le lemme suivant :

LEMME 2 : Atomisation des P-monoïdes syntactiques finis. - Soit M_P un P-monoïde syntactique fini. Tout élément m de M peut s'écrire :

$$\{m\} = \{\bigcap \{u \,.^{\cdot}\, P \,^{\cdot}.\, v \;;\; umv \in P\}\} \cap \{\bigcap \{u \,.^{\cdot}\, \overline{P} \,^{\cdot}.\, v \;;\; umv \in \overline{P}\}\} \;.$$

Ce lemme 2 est une reformulation de la caractérisation par les contextes de la congruence la plus grossière qui sature la partie P du monoïde M [13]. Les définitions et propositions suivantes s'enchaînent simplement.

<u>Définition</u>. – Un cylindre est <u>rationnel</u> si, et seulement si, tous les P-monoïdes syntactiques qu'il contient sont <u>finis</u>.

<u>Définition</u>. – Un cylindre est <u>complet</u> si, et seulement si, il est fermé pour :

(i) les opérations booléennes,

(ii) les quotients par un élément du support.

<u>Définition</u>. – Si $\mathfrak{F}$ est une famille de monoïdes, on note $\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{F})$ le plus petit cylindre qui contient totalement $\mathfrak{F}$.

PROPOSITION 2. – Si $\mathfrak{M}$ est une variété de monoïdes, $\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M})$ est un cylindre rationnel complet dont tous les P-monoïdes syntactiques ont leur support dans $\mathfrak{M}$.

<u>Définition</u>. – Si $\mathfrak{F}$ est une famille de P-monoïdes, on note $\hat{\mathfrak{M}}(\mathfrak{F})$ la famille des monoïdes complètement contenus dans $\mathfrak{F}$.

PROPOSITION 3. – Si $\mathcal{C}$ est un cylindre rationnel complet, $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$ est une variété de monoïdes.

Nous possédons maintenant les éléments pour énoncer le théorème.

THÉORÈME 1. – <u>Les applications</u> $\hat{\mathfrak{M}}$ <u>et</u> $\hat{\mathcal{C}}$ <u>sont deux applications réciproques entre la classe des variétés de monoïdes et la classe des cylindres rationnels complets</u>, i. e.

$$\hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})) = \mathcal{C} \quad \text{et} \quad \hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M} \;.$$

La preuve du théorème 1 repose sur le lemme suivant.

LEMME 3 : <u>Densité des P-monoïdes syntactiques</u>. – Soit $\mathcal{C}$ un cylindre rationnel complet. $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$ est engendrée (en tant que variété de monoïdes) par les supports de P-monoïdes syntactiques contenus dans $\mathcal{C}$.

<u>Démonstration</u>.

1° $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$, la variété des monoïdes, totalement contenus dans $\mathcal{C}$, contient (c'est la conséquence immédiate du lemme d'atomisation des P-monoïdes syntactiques) la famille $\mathcal{S}$ des supports des P-monoïdes syntactiques de $\mathcal{C}$; elle contient $\langle \mathcal{S} \rangle$, la variété engendrée par $\mathcal{S}$; montrons qu'elle lui est égale.

2° Soit $M \in \hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$. Puisque M est totalement contenu dans $\mathcal{C}$, $\forall\, m \in M$, $M_{\{m\}} \in \mathcal{C}$. Le P-monoïde syntactique de $M_{\{m\}}$, $\mathfrak{M}(M_{\{m\}})$ appartient à $\mathcal{C}$, et $\overline{M}_m$

le support de $\mathfrak{M}(M_{\{m\}})$ appartient à $\mathbb{S}$. Le morphisme syntactique, φ_m , de $M_{\{m\}}$ sur $\mathfrak{M}(M_{\{m\}})$ est un homomorphisme de M sur $\overline{M}_m$ tel que $\varphi_m(m') \neq \varphi_m(m)$, $\forall\ m' \neq m$, puisque $\varphi_m^{-1}(\varphi_m(m)) = m$.

3° Soient $\overline{M} = \prod_{m\in M} \overline{M}_m$ le produit direct de tous les $\overline{M}_m$, et

$$\varphi = \prod_{m\in M} \varphi_m \ : \ M \longrightarrow \overline{M}$$

k produit direct des homomorphismes φ_m . φ est <u>injectif</u> puisque, si $m' \neq m''$, on a $\varphi_{m'}(m') \neq \varphi_{m'}(m'')$, donc aussi $\varphi(m') \neq \varphi(m'')$. M est un sous-monoïde du produit direct d'éléments appartenant tous à $\mathbb{S}$. M appartient à $\langle\mathbb{S}\rangle$.

C. Q. F. D.

<u>Démonstration du théorème</u> 1.

1° Soit $\mathcal{C}$ un cylindre rationnel complet. $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$ est la variété des monoïdes contenus complètement dans $\mathcal{C}$. $\hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}))$ est le plus petit cylindre contenant complètement $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$ donc $\hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{C}$.

D'autre part, quel que soit $M_P \in \mathcal{C}$, le P-monoïde syntactique de M_P appartient à $\mathcal{C}$, et son support appartient à $\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})$. M_P est une image homomorphe inverse d'un certain P-monoïde construit sur ce support, donc $M_P \in \hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}))$. Ainsi $\mathcal{C} \subset \hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C}))$, et on a $\hat{\mathcal{C}}(\hat{\mathfrak{M}}(\mathcal{C})) = \mathcal{C}$.

2° Soient $\mathfrak{M}$ une variété de monoïdes, et $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$ le plus petit cylindre la contenant totalement. $\mathfrak{M}(\mathcal{C}(\mathfrak{M}))$ est la variété des monoïdes contenus totalement dans $\mathcal{C}(\mathfrak{M})$, donc sûrement $\mathfrak{M} \subset \hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M}))$.

Les supports des P-monoïdes syntactiques de $\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M})$ appartiennent à $\mathfrak{M}$ (proposition 2). D'après le lemme 3, $\hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M}))$ est engendrée par ces supports, donc $\hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M}))$, plus petite variété contenant une sous-famille de la variété $\mathfrak{M}$, est contenue dans $\mathfrak{M}$; on a donc $\hat{\mathfrak{M}}(\hat{\mathcal{C}}(\mathfrak{M})) = \mathfrak{M}$.

<u>Exemples</u>.

(a) L'ensemble formé des P-monoïdes M_M et $M_\emptyset$ pour tout monoïde M est le cylindre trivial. Il est rationnel et complet ; il lui correspond la variété triviale contenant le seul monoïde trivial 1 . Les langages du cylindre trivial sont les $X^*_{X^*}$ et $X^*_\emptyset$ pour tout alphabet fini X .

(b) A la variété des monoïdes finis correspond le cylindre des P-monoïdes "reconnaissables" M_P , où P est une partie saturée par une congruence d'index fini de M . Le théorème de Kleene démontre alors l'identité des parties reconnaissables et des parties rationnelles dans un monoïde <u>libre</u>.

4. <u>P-monoïdes infinis</u> : <u>cas des groupes</u>.

1° Il ne peut être question de caractériser par leur monoïdes syntactique, comme nous venons de le faire pour les langages rationnels, les familles considérées dans la théorie des langages. On peut par exemple trouver, dans tout monoïde possédant un élément d'ordre infini, des parties dont les images inverses dans tout monoïde libre sont "context-sensitive", récursivement énumérables ou non récursivement énumérables.

Il est néanmoins possible de dépasser le résultat élémentaire de la proposition 1 (deux langages ayant même P-monoïde syntactique s'échangent par homomorphisme) ; ce seront des résultats de la forme : " Un langage de telle famille, admettant tel monoïde comme monoïde syntactique, a telle propriété", ou, ce qui revient au même : "Tel monoïde n'est jamais monoïde syntactique de langage appartenant à telle famille".

Dans ce sens, J.-F. PERROT considère, en [8], deux familles de monoïdes qui ne sont jamais monoïdes syntactiques de langages context-free.

De même, on trouvera en [10] une généralisation du résultat suivant :

THÉORÈME 2. - Un langage context-free de $\hat{C}(\underline{Z}^2)$ est déterministe si, et seulement si, il appartient à $\hat{C}(\underline{Z})$.

2° On ne peut étudier les langages non rationnels sans la définition suivante :

Définition. - Un langage Y_K^* est transducté rationnel d'un autre langage X_L^* s'il est obtenu à partir de X_L^* par des opérations d'homomorphisme inverse, d'intersection avec un langage rationnel, et d'homomorphisme direct (1). Deux langages sont rationnellement équivalents s'il sont transductés rationnels l'un de l'autre.

Cette notion a été introduite par NIVAT en [7], et largement utilisée depuis.

3° Considérons maintenant la famille particulière de monoïdes que sont les groupes.

Parce que l'opération de division admet une solution unique dans un groupe, le quotient, défini au §1, est bien adapté pour traiter les P-monoïdes dont une image homomorphe est un P-groupe (2).

Ainsi, soit $\varphi : M_P \longmapsto G_e$, où e est l'élément neutre de G . L'image inverse d'un élément quelconque g de G est le quotient de P par un élément m de M tel que $\varphi(m) = g^{-1}$. C'est-à-dire

$$\forall g \in G , \quad \varphi^{-1}(g) = m \therefore P = P \because m , \qquad \forall m , \quad \varphi(m) = g^{-1} .$$

Les langages, images inverses de $G_{g'}$ et $G_{g''}$ (quels que soient g' et g'' de G), sont quotients l'un de l'autre ; ils sont donc rationnellement équivalents. On en déduit, grâce à [2], que l'image inverse de G_F , où F est une partie finie de

---

(1) Homomorphisme de monoïdes et non de P-monoïdes.

(2) P-monoïde dont le support est un groupe. L'homonymie malheureuse avec les p-groupes est élucidée par le contexte.

G , est transductée rationnelle de M_P , l'image inverse de G_e . Dans la suite, et par abus de langage, nous écrirons que G_P est context-free pour signifier que les langages, image inverse de G_P , sont context-free.

ANISIMOV [1] a entamé l'étude des groupes G tels que G_e est context-free. Nous savons maintenant que si G_e est context-free, G_F l'est aussi, pour toute partie finie F de G . Nous nous intéressons au problème de la réciproque pour obtenir, éventuellement, une classification des groupes en : groupes finiment context-free (G_F context-free), groupe non infiniment context-free (G_F non context-free et $\exists P$ infinie, G_P context-free ; $\underset{\sim}{Z}^2$ par exemple), groupes absolument pas context-free (dont nous supposons l'existence). Dans cette direction, on a le théorème suivant.

THÉORÈME 3. - Les langages, images inverses surjectives, des parties finies d'un groupe résiduellement fini sont toutes rationnellement équivalentes.

Rappelons qu'un groupe G est résiduellement fini (cf. [6] par exemple) si, pour tout élément g de G différent de l'élément neutre, il existe un sous-groupe distingué d'index fini qui ne contient pas g . Il en résulte que, dans un groupe résiduellement fini, pour toute partie finie F qui ne contient pas l'élément neutre, il existe aussi un sous-groupe distingué d'index fini dont l'intersection avec F est vide.

Tous les groupes G , tels que G_e est context-free, que l'on connaisse jusqu'à présent, sont résiduellement finis.

Exemple. - Soit Γ le groupe libre à deux générateurs x et y . On note $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les inverses de x et y , $X = \{x , \bar{x} , y , \bar{y}\}$, et $\varphi : X^* \to \Gamma$ l'homomorphisme naturel $\varphi(a) = a$ pour $a \in X$. $D = \varphi^{-1}(e)$ est le langage de DYCK qui joue un rôle central dans la théorie des langages context-free.

Si $w = a_1 a_2 a_3 \dots a_n \in \Gamma$, $\varphi^{-1}(w) = Da_1 Da_2 D \dots Da_n D$ avec $a_i \in X$.

Γ est résiduellement fini [5]. On obtient alors, directement que toute union finie d'ensembles de la forme $Da_1 Da_2 D \dots Da_n D$ est rationnellement équivalente à D .

BIBLIOGRAPHIE

[1] ANISIMOV (A. V.). - Sur les langages à groupes [en russe], Kibernetika, Kiev, 1971, n° 4, p. 18-24 ; [en anglais dans Cybernetica].

[2] BOASSON (L.). - Paires itérantes et langages algébriques, Thèse Sc. math., Univ. Paris VII, 1974.

[3] EILENBERG (S.). - Automata, Languages and Machines, vol. B (Sous presse).

[4] GIVE'ON (Y.). - On some properties of free monoïds, J. Comp. System Sciences, t. 1, 1967, p. 137-154.

[5] IRASAWA (K.). - Einige Sätze für freie Gruppen, Proc. Imp. Acad. Japan, Tokyo, t. 19, 1943, p. 272-274.

[6] MAGNUS (W.). - Residually finite groups, Bull. Amer. math. Soc., t; 75, 1969, p. 305-316.

[7] NIVAT (M.). - Transductions des langages de Chowsky, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, t. 18, 1968, p. 339-456.

[8] PERROT (J.-F.). - Monoïdes syntactiques des langages algébriques, à paraître dans les Actes de l'Ecole de Printemps sur les langages algébriques [1973. Bonascre].

[9] PERROT (J.-F.). - Monoïdes syntactiques et familles de langages rationnels, Séminaire P. Dubreil : Algèbre, 28e année, 1974/75, n° 11, 9 p.

[10] PERROT (J.-F.) et SAKAROVITCH (J.). - Langages algébriques déterministes et groupes abéliens, 2. G. I. Fachtagung über Automatentheorie und formale Sprachen [1975. Kaiserslautern] (à paraître dans les Lecture Notes in Computer Science).

[11] SAKAROVITCH (J.). - Monoïdes syntactiques et langages algébriques, Thèse 3e cycle, math., Univ. Paris VII, 1975 (à paraître).

[12] SCHÜTZENBERGER (M. P.). - Une théorie algébrique du codage, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et Théorie des nombres, 9e année, 1955/56, n° 15, 24 p.

[13] TEISSIER (M.). - Sur les équivalences régulières dans les semi-groupes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 232, 1951, p. 1987-1989.

(Texte reçu le 25 juin 1975)

Jacques SAKAROVITCH
22 rue Saint-Bernard
75011 PARIS