

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

THÉRÈSE MERLIER

Quelques propriétés des anneaux dont un sous-demi-groupe multiplicatif est un O -demi-groupe

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 27, n° 2 (1973-1974), exp. n° 14, p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1973-1974__27_2_A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1973-1974, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES PROPRIÉTÉS DES ANNEAUX
DONT UN SOUS-DEMI-GROUPE MULTIPLICATIF EST UN 0-DEMI-GROUPE

par Thérèse MERLIER

Rappelons qu'un 0-demi-groupe S est un demi-groupe S sur lequel peut être définie une relation d'ordre total isotone :

$$(a \leq b) \implies (ca \leq cb, ac \leq bc \text{ pour tout } (a, b, c) \text{ de } S^3).$$

1. Anneaux dont le demi-groupe est un 0-demi-groupe.

THÉOREME 1. - Si R est un anneau dont le demi-groupe multiplicatif est un 0-demi-groupe, alors R vérifie la condition $\forall a \in R, \forall b \in R, 2ab = 0$.

En effet, si $(R, .)$ est un 0-demi-groupe, pour une certaine relation d'ordre total $\leq$, a et $-a$ sont comparables. Si $a \leq -a$, par isotonie, on a $a^2 \leq -a^2$ et $-a^2 \leq a^2$ en multipliant par a , puis $-a$. D'où $a^2 = -a^2$, soit $2a^2 = 0$, et ceci pour tout a de R . Soient alors deux éléments a et b : $2a^2 = 2b^2 = 0$. Si $a \leq b$, on a, par isotonie,

$$2a^2 \leq 2ab \text{ et } a(2b) = 2ab \leq 2b^2.$$

D'où $2ab = 0$.

Remarques. - Un anneau peut vérifier la condition précédente sans être un zéro-anneau ou vérifier $2a = 0$ pour tout a . Considérons par exemple

$$A = \{(2x, y), x \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}\},$$

et munissons A des deux lois

$$(2x, y) + (2x', y') = (2x + 2x', y + y')$$

$$(2x, y)(2x', y') = (4xx', 2x'y).$$

On obtient ainsi un anneau non commutatif, dans lequel $2(2x, y) = (0, 2y)$ n'est pas toujours nul et qui n'est pas un zéro-anneau : $(2x, y)(2x', y') = (0, 2x'y)$ est non nul si $x' = y = 1$ par exemple.

A vérifie la formule du théorème 1, mais $(A, .)$ ne peut être totalement ordonné. En effet,

$$(2, 2)(2, 2) = (0, 0) = (0, 1)(0, 1) \text{ et } (0, 1)(2, 2) = (0, 2) \neq (0, 0),$$

donc l'isotonie ne peut être satisfaite pour aucune relation d'ordre.

On peut aussi construire un demi-groupe infini en remplaçant $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ par un anneau quelconque de caractéristique 4, par exemple l'anneau des suites sur $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.

2. Cas d'un anneau dont l'ensemble des idempotents peut être un demi-groupe totalement ordonné.

Désignons par E l'ensemble des idempotents d'un anneau R .

LEMME 1. - Si E est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, si e et f appartiennent à E , $(ef = 0) \Rightarrow (e \text{ ou } f = 0)$.

En effet, si $\leq$ ordonne totalement le demi-groupe E :

$$(0 \leq e < f) \Rightarrow (0 \leq e \leq ef) .$$

D'où $e = 0$.

De même, si $0 \leq f \leq e$ ou si e et f sont inférieurs à 0 , e ou $f = 0$.

Si $e \leq 0 \leq f$, alors $ef = fe = 0$; donc $e + f$ est aussi un idempotent, d'où $e+f \leq 0$ ou $e+f \geq 0$; dans le premier cas, $e+f \leq 0 \leq f$, d'où $(e+f)f = 0 = f$. Il en est de même dans le cas contraire.

Donc, si l'ensemble E des idempotents d'un anneau est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, c'est un demi-groupe sans diviseurs de zéro, dont zéro est le plus grand ou le plus petit élément.

LEMME 2. - Si l'anneau R est unitaire, et si E est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, E est réduit à $\{1, 0\}$.

Soit $e \in E$, $e \neq 0$; $1 - e \in E$. Mais $e(1 - e) = 0$, donc $e = 1$ d'après le lemme 1.

LEMME 3. - Si E est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe, et si e et f appartiennent à E , $e \neq 0$, $f \neq 0$, $e \neq f$, alors $e = ef$ et $f = fe$ (ou $e = fe$ et $f = ef$).

On sait que $efe = ef$ ou fe , et ceci dans tout $\mathcal{O}$ -demi-groupe idempotent.

Si $ef = fe$, alors $efe = fe = fef = ef$, et $e - ef$ est un idempotent. Comme $(e - ef)f = 0$, on en déduit $e = ef$, de même $f = fe$ et $e = f$, ce qui n'est pas.

Donc $ef \neq fe$: si $ef = efe$, alors $fe = fef$, et

$$(e - ef)^2 = e + ef - ef - efe = e - ef .$$

D'où $e - ef = 0$ et $e = ef$, de même, $f = fe$.

Si $ef = fef$, alors on a $e = fe$ et $f = ef$ puisque $e - fe$, et $f - ef$ sont idempotents.

PROPOSITION 1. - Si l'ensemble E des idempotents d'un anneau R est un $\mathcal{O}$ -demi-groupe de cardinal supérieur ou égal à 3, alors E est un zéro-demi-groupe à gauche, ou à droite, infini.

Supposons que e et f soient deux idempotents distincts, non nuls. Alors, d'après le lemme 3, on a par exemple $e = ef$ et $f = fe$. Soit g un autre idempotent :

(α) si $e < g < f$: $e \leq eg \leq ef = e$, d'où $eg = e$, et alors $ge = g$ nécessairement d'après le lemme 3,

$$f = fe \leq fg \leq f, \text{ d'où } fg = f, \quad gf = g.$$

(β) si $e < f < g$: $ge \geq fe = f$. Comme $ge = e$ ou g , on a $ge = g$, donc $eg = e$. Dans ce cas, d'après (α), $fg = f$, $gf = g$.

(γ) si $g < e < f$: $gf \leq ef = e$. Donc $gf = g$, $fg = f$. Donc, d'après (α), $eg = e$, $ge = g$. Dans ce cas E est un zéro-demi-groupe à gauche.

Il existe alors une infinité d'idempotents, ceux de la forme $e + n(e f - f e)$, $n \in \mathbb{Z}$.

PROPOSITION 2. - Si l'ensemble E des idempotents d'un anneau R est un 0-demi-groupe, l'ensemble des éléments réguliers de R est un demi-groupe sans diviseurs de zéros ou est réduit à $\{0\}$.

1° Si E est de cardinal 1, l'ensemble des éléments réguliers est réduit à $\{0\}$.

2° Si E contient un idempotent, et un seul, e non nul : si $a \neq 0$ est régulier,

$$a = axa \text{ avec } ax = xa = e, \quad a = ae = ea.$$

Donc les éléments réguliers sont les éléments inversibles par rapport à e , qui forment bien un demi-groupe sans diviseurs de zéro, le groupe multiplicatif ayant e comme élément neutre.

3° Enfin, si E contient au moins trois éléments : d'après la proposition 1, E est un zéro-demi-groupe à gauche par exemple. D'où, si $a = axa$ et $b = byb$,

$$ab = axyb = abyx$$

puisque by et xa sont des idempotents non nuls, d'où ab est régulier. De plus, ab est non nul, car $a = axa = axaby$, donc $ab = 0$ implique $a = 0$.

COROLLAIRE. - Un demi-groupe S régulier, demi-groupe multiplicatif d'un anneau, dont l'ensemble des idempotents est un 0-demi-groupe, est un groupe avec zéro.

3. Propriétés nouvelles des idempotents d'un anneau.

Le paragraphe précédent nous a incités à considérer de plus près les propriétés des idempotents d'un anneau, dans un cadre plus général.

Pour les démonstrations des propriétés suivantes nous renvoyons à notre Note aux Comptes Rendus [1].

A désigne dans la suite un anneau, E l'ensemble de ses idempotents, et E^* l'ensemble des idempotents non nuls.

THÉOREME 2. - Si, dans un anneau A, il existe un idempotent e non nul tel que $\{x \in A ; e + x \text{ est un idempotent non nul}\}$ est un idéal, alors l'ensemble E des idempotents de A est un demi-groupe intègre vérifiant :

$$\forall (f, h) \in E^2, \quad \forall g \neq 0 \in E, \quad fgh = fh.$$

THÉOREME 3. - Soit e un idempotent non nul d'un anneau A. Il y a équivalence entre les assertions suivantes :

- (a) Pour tout f, $f \in E^*$, $ef = e$;
- (b) $I = \{x \in A ; e + x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A, contenu dans Ae ;
- (c) $I = \{x \in A ; e + x \in E^*\}$ est un idéal bilatère de A, contenu dans l'anneau à droite de Ae ($0 \cdot Ae$) ;
- (d) L'ensemble E^* des idempotents non nuls de A est un zéro-demi-groupe à gauche ($\forall f \in E^*, \forall g \in E^*, fg = f$) .

Exemple. - Soit R un anneau unitaire intègre, d'élément unité 1, et soit $A = R \times R$ l'ensemble des couples (x, y) , $x \in R$, $y \in R$, muni des deux opérations

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$$

$$(x, y)(x', y') = (xx', yx').$$

Alors A est un anneau dont les idempotents non nuls sont de la forme $(1, x)$, $x \in R$ et, comme $(1, x)(1, x') = (1, x)$ ces idempotents, forment bien un zéro-demi-groupe à gauche, et satisfont aux conditions du théorème 3.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] MERLIER (T.). - Quelques propriétés des idempotents d'un anneau, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 279, 1974, Série A, p.49-51.

(Texte reçu le 14 avril 1975)

Thérèse MERLIER
Résidence Gascogne
105 rue Boucicaut
92260 FONTENAY AUX ROSES