

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ARTIBANO MICALI

**Sur les  $n$ -normes**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 26 (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-3

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1972-1973\\_\\_26\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A3_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).  
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# Sur les $n$ -formes

par Artobano MICALI

On résumera ici les principaux résultats obtenus dans la théorie des  $n$ -formes (pour  $n = 2$  ce sont des formes quadratiques).

Dans la suite,  $A$  désignera un anneau commutatif à élément unité, et tout  $A$ -module est unitaire. Si  $M$  est un  $A$ -module et  $n > 1$  un entier, on note  $M^n = M \times \dots \times M$  ( $n$  fois) et  $S_n$  le groupe symétrique d'un ensemble à  $n$  objets.

Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules, et  $f : M \rightarrow N$  une application. On dira que  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application si les conditions suivantes sont vérifiées :

(n-A<sub>1</sub>) Pour tout  $(a, x) \in A \times M$ ,  $f(ax) = a^n f(x)$  ;

(n-A<sub>2</sub>) L'application  $\varphi : M^n \rightarrow N$ , définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} f(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in M^n,$$

est  $n$ -linéaire, nécessairement symétrique, i. e.

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout  $\sigma \in S_n$ . On dira que  $\varphi$  est l'application  $n$ -linéaire symétrique associée à  $f$ .

On remarque que si  $n = 2$ , on retrouve la notion habituelle de forme quadratique et que si  $n = 1$ ,  $\varphi = f$ .

On considère la catégorie  $n\text{-App}(A)$ , dont les objets sont les triplets  $(M, f, N)$ , où  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application et où les morphismes sont les couples d'applications  $A$ -linéaires  $(g, h) : (M, f, N) \rightarrow (M', f', N')$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow g & & \downarrow h \\ N & \xrightarrow{f'} & N' \end{array}$$

Si  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application et  $\varphi : M^n \rightarrow N$  l'application  $n$ -linéaire symétrique associée à  $f$ , on a  $\varphi(x, \dots, x) = n!f(x)$  pour tout  $x \in M$ . Ainsi, si  $n!$  est inversible dans  $A$ ,  $f$  est déterminée par  $\varphi$ .

Dans la catégorie  $n\text{-For}(A)$  des  $n$ -formes  $f : M \rightarrow A$ , on peut définir une somme orthogonale analogue à celle des formes quadratiques. Dès lors,  $n\text{-For}(A)$  est une catégorie monoïdale, et on peut parler de son groupe de Grothendieck. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1].

Soient  $M$  un  $A$ -module,  $A^{(M)}$  le  $A$ -module libre de base  $M$  et  $(e_x)_{x \in M}$  sa base canonique. On note  $R_n(M)$  le sous- $A$ -module de  $A^{(M)} \times M^{\otimes n}$ , engendré par les

éléments de la forme

$$(e_{ax} - a^n e_x, 0) \text{ et } (\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} e_{x_{i_1} + \dots + x_{i_p}}, -x_1 \otimes \dots \otimes x_n),$$

pour  $a$  parcourant  $A$  et  $x, x_1, \dots, x_n$  parcourant  $M$ , et soit

$$\Gamma_n(M) = A^{(M)} \times \mathbb{Z}^n / R_n(M)$$

le  $A$ -module quotient. L'application évidente composée  $\gamma_n : M \rightarrow A^{(M)} \times M^{\otimes n} \rightarrow \Gamma_n(M)$  est une  $n$ -application. De plus, pour toute  $n$ -application  $f : M \rightarrow N$ , il existe une unique application  $A$ -linéaire  $\tilde{f} : \Gamma_n(M) \rightarrow N$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\gamma_n} & \Gamma_n(M) \\ \downarrow f & \searrow \tilde{f} & \downarrow \\ N & & N \end{array}$$

Pour tout  $A$ -module  $M$ , il existe des isomorphismes de  $A$ -modules  $\Gamma_0(M) \approx A$  et  $\Gamma_1(M) \approx M$ . De plus, pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un isomorphisme de  $A$ -modules  $\Gamma_n(A) \approx A$ . Le foncteur  $\Gamma_n$  commute aux limites inductives. Si  $S_n(M)$  désigne le sous- $A$ -module des éléments homogènes de degré  $n$  de l'algèbre symétrique  $S(A)$ , il existe, pour chaque entier  $n$ , des applications  $A$ -linéaires

$$f_n : \Gamma_n(M) \rightarrow S_n(M) \text{ et } g_n : S_n(M) \rightarrow \Gamma_n(M)$$

vérifiant

$$f_n \circ g_n = n! \text{id}_{S_n(M)} \text{ et } g_n \circ f_n = n! \text{id}_{\Gamma_n(M)}.$$

Ainsi, si  $n!$  est inversible dans  $A$ ,  $f_n : \Gamma_n(M) \rightarrow S_n(M)$  est un isomorphisme de  $A$ -modules. Dès lors, le rapport entre les puissances divisées (Cf. [2]) est évident.

Une autre notion importante est celle de  $n$ -forme non dégénérée. On dira qu'une  $n$ -forme  $f : M \rightarrow A$  est non dégénérée si l'application  $A$ -linéaire  $M \rightarrow \text{Hom}_A(M, A)$  définie par  $x \mapsto (y \mapsto f(x, \dots, x, y))$ , est un isomorphisme de  $A$ -modules. Si  $M$  et  $N$  sont projectifs de type fini, ceci entraîne que nécessairement  $N \in \text{Pic}(A)$ . La catégorie des  $n$ -formes non dégénérées  $f : M \rightarrow N$ , où  $M$  et  $N$  sont projectifs de type fini et  $N \in \text{Pic}(A)$ , nous conduit à la construction du groupe de Witt-Grothendieck  $WG_n(N)$  (Cf. [1]).

Finalement, on remarque que, à chaque  $n$ -forme  $f : M \rightarrow A$ , on peut associer une algèbre de Clifford. Plus précisément, l'algèbre de Clifford de  $(M, f)$ , notée  $C(M, f)$ , est le quotient de l'algèbre tensorielle  $T(M)$  par l'idéal bilatère de  $T(M)$  engendré par les éléments de la forme  $x^{\otimes n} - f(x).1$ , pour  $x$  parcourant  $M$ . C'est une  $A$ -algèbre graduée sur  $\mathbb{Z}/(n)$ . Les propriétés fonctorielles de l'algèbre de Clifford sont faciles à établir (Cf. [1]; voir aussi [3]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MICALI (A.). - Sur les  $n$ -formes (à paraître).
- [2] ROBY (N.). - Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 80, 1967, p. 213-348 (Thèse Sc. math., Paris 1963).
- [3] ROBY (N.). - Algèbres de Clifford des formes polynômes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 484-486.

Artibano MICALI  
Université du Languedoc  
Mathématiques  
Place Eugène Bataillon  
34060 MONTPELLIER CEDEX

---