

# SÉMINAIRE DUBREIL.

## ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ARTIBANO MICALI

**Sur les  $n$ -normes**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 26 (1972-1973), exp. n° 3, p. 1-3

<[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1972-1973\\_\\_26\\_\\_A3\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A3_0)>

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

SUR LES  $n$ -FORMES

par Artibano MICALI

On résumera ici les principaux résultats obtenus dans la théorie des  $n$ -formes (pour  $n = 2$  . ce sont des formes quadratiques).

Dans la suite, A désignera un anneau commutatif à élément unité, et tout A-module est unitaire. Si M est un A-module et  $n > 1$  un entier, on note  $M^n = M \times \dots \times M$  (n fois) et  $S_n$  le groupe symétrique d'un ensemble à n objets.

Soient M et N deux A-modules, et  $f : M \rightarrow N$  une application. On dira que  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application si les conditions suivantes sont vérifiées :

(n-A<sub>1</sub>) Pour tout  $(a, x) \in A \times M$ ,  $f(ax) = a^n f(x)$  ;

(n-A<sub>2</sub>) L'application  $\varphi : M^n \rightarrow N$ , définie par

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{i_1+i_2+\dots+i_p} f(x_{i_1} + \dots + x_{i_p}) \text{ pour tout } (x_1, \dots, x_n) \in M^n,$$

est  $n$ -linéaire, nécessairement symétrique, i. e.

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) = \varphi(x_1, \dots, x_n)$$

pour tout  $\sigma \in S_n$ . On dira que  $\varphi$  est l'application  $n$ -linéaire symétrique associée à f.

On remarque que si  $n = 2$ , on retrouve la notion habituelle de forme quadratique et que si  $n = 1$ ,  $\varphi = f$ .

On considère la catégorie  $n - \underline{\text{App}}(A)$ , dont les objets sont les triplets  $(M, f, N)$ , où  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application et où les morphismes sont les couples d'applications A-linéaires  $(g, h) : (M, f, N) \rightarrow (M', f', N')$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow g & & \downarrow f' \\ N & \xrightarrow{h} & N'. \end{array}$$

Si  $f : M \rightarrow N$  est une  $n$ -application et  $\varphi : M^n \rightarrow N$  l'application  $n$ -linéaire symétrique associée à f, on a  $\varphi(x, \dots, x) = n!f(x)$  pour tout  $x \in M$ . Ainsi, si  $n!$  est inversible dans A,  $\varphi$  est déterminée par f.

Dans la catégorie  $n - \underline{\text{For}}(A)$  des  $n$ -formes  $f : M \rightarrow A$ , on peut définir une somme orthogonale analogue à celle des formes quadratiques. Dès lors,  $n - \underline{\text{For}}(A)$  est une catégorie monoïdale, et on peut parler de son groupe de Grothendieck. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter [1].

Soient M un A-module,  $A^{(M)}$  le A-module libre de base M et  $(e_x)_{x \in M}$  sa base canonique. On note  $R_n(M)$  le sous-A-module de  $A^{(M)} \times M^{\otimes n}$ , engendré par les

éléments de la forme

$$(e_{ax} - a^n e_x, 0) \text{ et } (\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n} (-1)^{n-p} e_{x_{i_1} + \dots + x_{i_p}}, -x_1 \otimes \dots \otimes x_n),$$

pour  $a$  parcourant  $A$  et  $x, x_1, \dots, x_n$  parcourant  $M$ , et soit

$$\Gamma_n(M) = A^{(M)} \times \mathbb{A}^n / R_n(M)$$

le  $A$ -module quotient. L'application évidente composée  $\gamma_n : M \rightarrow A^{(M)} \times M^{\otimes n} \rightarrow \Gamma_n^{(M)}$  est une  $n$ -application. De plus, pour tout  $n$ -application  $f : M \rightarrow N$ , il existe une unique application  $A$ -linéaire  $\tilde{f} : \Gamma_n(M) \rightarrow N$  rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\quad f \quad} & N \\ \downarrow \gamma_n & & \downarrow \tilde{f} \\ \Gamma_n(M) & & \end{array}$$

Pour tout  $A$ -module  $M$ , il existe des isomorphismes de  $A$ -modules  $\Gamma_0(M) \approx A$  et  $\Gamma_1(M) \approx M$ . De plus, pour tout entier  $n \geq 0$ , il existe un isomorphisme de  $A$ -modules  $\Gamma_n(A) \approx A$ . Le facteur  $\Gamma_n$  commute aux limites inductives. Si  $S_n(M)$  désigne le sous- $A$ -module des éléments homogènes de degré  $n$  de l'algèbre symétrique  $S_A(M)$ , il existe, pour chaque entier  $n$ , des applications  $A$ -linéaires

$$f_n : \Gamma_n(M) \rightarrow S_n(M) \text{ et } g_n : S_n(M) \rightarrow \Gamma_n(M)$$

vérifiant

$$f_n \circ g_n = n! \text{id}_{S_n(M)} \text{ et } g_n \circ f_n = n! \text{id}_{\Gamma_n(M)}.$$

Ainsi, si  $n!$  est inversible dans  $A$ ,  $f_n : \Gamma_n(M) \rightarrow S_n(M)$  est un isomorphisme de  $A$ -modules. Dès lors, le rapport entre les puissances divisées (cf. [2]) est évident.

Une autre notion importante est celle de  $n$ -forme non dégénérée. On dira qu'une  $n$ -forme  $f : M \rightarrow N$  est non dégénérée si l'application  $A$ -linéaire  $M \rightarrow \text{Hom}_A(M, N)$ , définie par  $x \mapsto (y \mapsto \varphi(x, \dots, x, y))$ , est un isomorphisme de  $A$ -modules. Si  $M$  et  $N$  sont projectifs de type fini, ceci entraîne que nécessairement  $N \in \text{Pic}(A)$ . La catégorie des  $n$ -formes non dégénérées  $f : M \rightarrow N$ , où  $M$  et  $N$  sont projectifs de type fini et  $N \in \text{Pic}(A)$ , nous conduit à la construction du groupe de Witt-Grothendieck  $WG_n(N)$  (Cf. [1]).

Finalement, on remarque que, à chaque  $n$ -forme  $f : M \rightarrow N$ , on peut associer une algèbre de Clifford. Plus précisément, l'algèbre de Clifford de  $(M, f)$ , notée  $C(M, f)$ , est le quotient de l'algèbre tensorielle  $T(M)$  par l'idéal bilatère de  $T(M)$  engendré par les éléments de la forme  $x^{\otimes n} - f(x) \cdot 1$ , pour  $x$  parcourant  $M$ . C'est une  $A$ -algèbre graduée sur  $\mathbb{Z}/(n)$ . Les propriétés fonctorielles de l'algèbre de Clifford sont faciles à établir (Cf. [1] ; voir aussi [3]).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] MICALI (A.). - Sur les n-formes (à paraître).
- [2] ROBY (N.). - Lois polynômes et lois formelles en théorie des modules, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., t. 80, 1963, p. 213-348 (Thèse Sc. math., Paris 1963).
- [3] ROBY (N.). - Algèbres de Clifford des formes polynômes, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 268, 1969, p. 484-486.

Artibano MICALI  
Université du Languedoc  
Mathématiques  
Place Eugène Bataillon  
34060 MONTPELLIER CEDEX 1

---