

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL PAUGAM

**Condition  $G_q$  d'Ischebeck-Auslander et condition  $S_q$  de Serre**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 26 (1972-1973), exp. n° 14, p. 1-12

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1972-1973\\_\\_26\\_\\_A13\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A13_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1972-1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

CONDITION  $G_q$  D'ISCHEBECK-AUSLANDER  
ET CONDITION  $S_q$  DE SERRE

par Michel PAUGAM

Le but de cet exposé est de montrer brièvement que la condition  $G_q$ , définie dans [12] et [1] pour les anneaux, peut également être définie pour les schémas localement noethériens et pour les modules. De plus, elle possède les mêmes propriétés que la condition  $S_q$  de Serre.

Tous les anneaux considérés sont commutatifs unitaires et noethériens. Tous les modules sont unitaires.

## 0. Preliminaires.

0.1. Définition ([2], § 2). - Soient  $A$  un anneau, et  $M$  un  $A$ -module de type fini. Une suite  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'éléments de  $A$  est appelée une  $M$ -suite si  $xM \neq M$  et si  $x_i$  n'est pas diviseur de zéro dans  $M/(x_0, x_1, \dots, x_{i-1})M$  pour  $1 \leq i \leq n$ , où  $x_0 = 0$ .

0.2. Définition ([2], 2-10). - Soient  $A$  un anneau,  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules de type fini, et  $\mathfrak{U} = \text{ann } M$ . Supposons  $\mathfrak{U}.N \neq N$ . Alors toutes les  $N$ -suites maximales contenues dans  $\mathfrak{U}$  ont le même nombre d'éléments que l'on appelle le  $N$ -grade de  $M$ , et que l'on note  $\text{grade}_N M$ .

0.3. Définition [22]. - Soit  $A$  un anneau local. On dit qu'un  $A$ -module de type fini non nul  $M$  est un module de Gorenstein si  $\text{prof}_A M = \dim_A M = \text{di}_A M$ . On a alors

$$\text{di}_A M = \text{prof } A = \dim A.$$

$\text{prof}_A M$  désigne la profondeur du  $A$ -module  $M$  ([9], 16-4),  $\text{di}_A M$  désigne la dimension injective de  $M$ .

Pour  $M = A$ , on retrouve la définition des anneaux de Gorenstein ([2], 4-1).

0.4. Définition ([2], § 2). - Soient  $A$  un anneau et  $M$  un  $A$ -module ; on appelle résolution injective minimale de  $M$  une suite exacte

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0(M) \rightarrow \dots \rightarrow E_i(M) \xrightarrow{\text{di}} E_{i+1}(M) \rightarrow \dots$$

telle que, pour tout  $i \geq 0$ ,  $E_i(M)$  est une enveloppe injective de  $\ker \text{di}$ .

Si  $M$  est de type fini, on montre que

$$E_i(M) = \bigoplus_{p \in \text{Spec}(A)} \mu_i(p, M) E_A(A/p),$$

où  $\mu E$  désigne une somme directe de  $\mu$  copies de  $E$  et  $E_A(A/p)$  est l'anneau

injective de  $A/p$  (voir [2], 2-4, 2-6 et 2-7 pour les propriétés des  $\mu_i$ ).

Pour les modules de Cohen-Macaulay ([9], 16-5), on connaît la proposition suivante :

0.5. PROPOSITION ([10], 6.3.3, p. 139) et ([13], 1.24). - Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux locaux d'idéaux maximaux respectifs  $m$ ,  $n$ , Soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme local tel que  $B$  soit  $A$ -plat, et  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul ; pour que  $M \otimes B$  soit un  $B$ -module de Cohen-Macaulay, il faut et il suffit que  $M$  soit un  $A$ -module de Cohen-Macaulay et que  $B \otimes_A k$  soit un anneau de Macaulay.

De plus, si  $\dim M = m$  et si  $\dim B \otimes k = n$ , alors

$$\mu_{m+n}^B(n, M \otimes B) = \mu_m^A(m, M) \cdot \mu_n^{B \otimes k}(n/mB, B \otimes_A k).$$

### 1. Résultats.

Nous allons établir un résultat similaire à celui de (0.5) pour les modules de Gorenstein. Démontrons d'abord deux lemmes.

1.1. LEMME. - Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux locaux artiniens : soient  $k$  le corps résiduel de  $A$ , et  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme local tel que  $B$  soit un  $A$ -module plat. Soit  $I$  un  $A$ -module de type fini non nul. Si  $I$  est un module injectif et si  $B \otimes_A k$  est un anneau de Gorenstein, alors  $I \otimes_A B$  est un  $B$ -module injectif.

Preuve. - Comme  $\dim A = \dim B = 0$ ,  $A$  et  $B$  sont des anneaux de Cohen-Macaulay (D'après (0.5),  $I \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Cohen-Macaulay). Montrons que  $I \otimes_A B$  est  $B$ -injectif. Soit  $\ell$  le corps résiduel de  $B$ . Soit  $E_A(k)$  (resp.  $E_B(\ell)$ ) l'enveloppe injective du  $A$ -module  $k$  (resp. du  $B$ -module  $\ell$ ). Si  $m$  désigne l'idéal maximal de  $A$ , on a :

$$\mu_i(m, I) = 0 \text{ pour } i \neq 0 \quad ([22], 3.11 (ii)).$$

et  $E_A(I) = I = \mu_0(m, I) E_A(k)$ . Mais l'on a par ailleurs  $E_A(k) \otimes_A B \simeq E_B(\ell)$ , car  $B$  est  $A$ -plat ([13], 6.15, page 80). On en déduit :

$$I \otimes_A B \simeq \mu_0^A(m, I) E_A(k) \otimes_A B \simeq \mu_0^A(m, I) E_B(\ell)$$

et  $I \otimes B$  est un  $B$ -module injectif puisque somme directe de  $F$ -modules injectifs.

1.2. LEMME. - Soient  $A$  un anneau local de profondeur  $\geq 1$ ,  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul. Soit  $x$  un élément du radical de  $A$ , non diviseur de zéro dans  $M$  ni dans  $A$ . Alors  $M$  est de Gorenstein sur  $A$  si, et seulement si,  $M/xM$  est un  $(A/xA)$ -module de Gorenstein.

Preuve. - Sous les hypothèses faites ci-dessus sur  $x$ , on sait que les foncteurs  $\text{Ext}_A^r(\cdot, M)$  et  $\text{Ext}_{A/xA}^{r-1}(\cdot, M/xM)$  définis sur la catégorie des  $(A/xA)$ -modules de type fini sont isomorphes pour  $r \geq 1$  [19].

D'autre part, on sait que :

$$\text{prof } A/xA = \text{prof } A - 1 \quad \text{et} \quad \text{prof } M/xM = \text{prof } M - 1 \quad [9],$$

et l'on a toujours :  $\text{prof } A \leq \dim A$  et  $\text{prof } M \leq \dim M \leq \dim A$ . De plus, si  $\dim A/xA < +\infty$  (resp.  $\dim_{A/xA} M/xM < +\infty$ ) alors

$$\dim_{A/xA} M = \text{prof } A \quad (\text{resp.} \quad \dim_{A/xA} M/xM = \text{prof } A/xA).$$

1° Si  $M$  est un  $A$ -module de Gorenstein, on a, puisque  $\dim A \geq 1$ ,

$$\text{Ext}_{A/xA}^{r-1}(\cdot, M/xM) = 0 \quad \text{pour} \quad r > \dim A;$$

par suite

$$\dim_{A/xA} M/xM \leq \dim A - 1.$$

Or  $\dim A - 1 = \text{prof } A - 1 = \text{prof } A/xA$ , donc

$$\dim_{A/xA} M/xM = \dim A/xA = \text{prof } A/xA \quad (\text{car} \quad \dim A/xA \leq \dim A - 1).$$

Enfin,

$\text{prof } M/xM = \text{prof } M - 1 = \dim_{A/xA} M/xM$  et  $\text{prof } M/xM \leq \dim M/xM \leq \dim A/xA$  entraînent :

$$\text{prof } M/xM = \dim M/xM.$$

2° Inversement, si  $M/xM$  est un  $(A/xA)$ -module de Gorenstein, alors :

$$\text{prof } M = \text{prof } M/xM + 1 = \text{prof } A/xA + 1 = \text{prof } A$$

$$\text{prof } M = \dim M/xM + 1$$

et comme  $\dim M/xM \leq \dim M \leq \dim M/xM + 1 = \text{prof } M \leq \dim M$ , on a

$$\text{prof } M = \dim M.$$

De même, on a :  $\dim A/xA \leq \dim A \leq \dim A/xA + 1 = \text{prof } A$ , et par suite

$$\dim A = \text{prof } A.$$

Reste à prouver que  $M$  est de dimension injective finie sur  $A$ . On utilise la suite spectrale ([5], p. 348, Cas 3) :

$$\text{Ext}_{A/xA}^p(\text{Tor}_q^A(A/xA, N), M/xM) \xrightarrow{q} \text{Ext}_A^n(N, M/xM)$$

qui dégénère (puisque la dimension projective de  $A/xA$  est 1) et on a la suite exacte :

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow \text{Ext}_{A/xA}^r\left(\frac{N}{xN}, \frac{M}{xM}\right) &\rightarrow \text{Ext}_A^r\left(N, \frac{M}{xM}\right) \rightarrow \text{Ext}_{A/xA}^{r-1}\left(\text{Tor}_1^A\left(\frac{A}{xA}, N\right), \frac{M}{xM}\right) \\ &\rightarrow \text{Ext}_{A/xA}^{r+1}\left(\frac{N}{xN}, \frac{M}{xM}\right) \rightarrow \text{Ext}_A^{r+1}\left(N, \frac{M}{xM}\right) \rightarrow \text{Ext}_{A/xA}^r\left(\text{Tor}_1^A\left(\frac{A}{xA}, N\right), \frac{M}{xM}\right) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Si  $\dim_{A/xA} M/xM = p$ , on en déduit que

$$\text{Ext}_A^r(N, M/xM) = 0$$

pour  $r > p + 1$  et pour tout  $A$ -module de type fini  $N$ . De la suite exacte

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{x} M \rightarrow M/xM \rightarrow 0$$

on obtient alors une suite exacte

$$\text{Ext}_A^{r-1}(N, \frac{M}{xM}) \rightarrow \text{Ext}_A^r(N, M) \xrightarrow{x} \text{Ext}_A^r(N, M) \rightarrow \text{Ext}_A^r(N, \frac{M}{xM})$$

qui montre que  $\text{Ext}_A^r(N, M) = 0$  pour  $r$  assez grand et pour tout  $A$ -module de type fini  $N$ , donc  $\text{di}_A M < +\infty$ , et  $\text{di}_A M = \text{prof } A$ .

1.3. THÉOREME. - Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux locaux,  $k$  le corps résiduel de  $A$ ,  $\varphi: A \rightarrow B$  un homomorphisme local tel que  $B$  soit un  $A$ -module plat. Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul.

(i) Si  $M$  est de Gorenstein et si  $B \otimes_A k$  est un anneau de Gorenstein, alors  $M \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Gorenstein, et l'on a

$$\text{di}_B M \otimes B = \text{di}_A M + \text{di}_{B \otimes k} B \otimes k.$$

(ii) Si  $M \otimes B$  est un  $B$ -module de Gorenstein,  $M$  est un  $A$ -module de Gorenstein.

Démonstration.

(i)  $M$  étant un  $A$ -module de Gorenstein,  $A$  est un anneau de Macaulay d'après (0.3). En vertu de (0.5) on peut donc supposer que  $A$  et  $B$  sont des anneaux de Macaulay et que  $M \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Macaulay. Soit  $\underline{x}$  une  $A$ -suite et une  $M$ -suite maximale. Comme  $B$  est  $A$ -plat,  $\underline{x}$  est aussi une  $B$ -suite. Posons

$$A' = A/\underline{x}A, \quad B' = B/\underline{x}B, \quad M' = M/\underline{x}M.$$

Soit  $\underline{y}$  une  $(B' \otimes_A k)$ -suite maximale, alors  $\underline{y}$  est aussi une  $B'$ -suite ([13], 1.23), et si l'on pose  $B'' = B'/\underline{y}B'$ ,  $B''$  est  $A'$ -plat ([13], 1.23), et l'on a :

$$B'' \otimes_{A'} k = \frac{B' \otimes_A k}{\underline{y}(B' \otimes_A k)}.$$

Il en résulte que  $\underline{y}$  est une  $B'$ -suite maximale puisque

$$\dim B'' = \dim A' + \dim B'' \otimes_{A'} k = 0 \quad ([10], 6.1.2).$$

Mais alors  $B'' \otimes_{A'} k$  est un anneau de Gorenstein de dimension nulle (puisque  $B' \otimes_A k = B \otimes_A k$  est un anneau de Gorenstein).

Par ailleurs,  $M'$  est un  $A'$ -module de Macaulay injectif d'après [22], 3.9 ou 1.2. Le lemme (1.1) indique que  $M' \otimes_{A'} B''$  est un  $B''$ -module de Cohen-Macaulay injectif.

Si  $\underline{y} = (y_1, \dots, y_r)$ , on a la suite exacte de  $A'$ -modules

$$0 \rightarrow B' \xrightarrow{y_1} B' \rightarrow B'/y_1 B' \rightarrow 0.$$

Comme  $B'/y_1 B'$  est  $A'$ -plat, on en déduit la suite exacte

$$0 \rightarrow M' \otimes_{A'} B' \rightarrow M' \otimes_{A'} B' \rightarrow M' \otimes_{A'} (B'/y_1 B') \rightarrow 0$$

et on en conclut l'isomorphisme

$$M' \otimes_{A'} (B'/y_1 B') \simeq (M' \otimes_{A'} B') / (y_1 \cdot (M' \otimes_{A'} B'))$$

et en outre que  $y_1$  est  $(M' \otimes_A B')$ -régulier.

Par récurrence sur  $r$ , on a l'isomorphisme

$$M' \otimes_A B' \simeq (M' \otimes_A B') / (\underline{y}(M' \otimes_A B'))$$

et le lemme (1.2) implique que  $M' \otimes_A B'$  est un  $B'$ -module de Gorenstein. Mais on a aussi  $M' \otimes_A B' = (M \otimes_A B) / (\underline{x}(M \otimes_A B))$  et puisque  $\underline{x}$  est une  $A$ -suite et une  $M$ -suite, c'est aussi une  $B$ -suite et une  $(M \otimes B)$ -suite, et (1.2) indique que  $M \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Gorenstein.

D'autre part,  $\dim_B(M \otimes B) = \dim_A M + \dim B \otimes k$  ([10], 6.1.2). La dernière assertion de (i) découle alors de (0.3).

(ii) Supposons  $M \otimes_A B$  de Gorenstein. Posons  $\dim_B(M \otimes B) = p$ . Pour tout  $A$ -module de type fini  $N$ , on a

$$\text{Ext}_A^i(N, M) \otimes_A B = \text{Ext}_B^i(N \otimes_A B, M \otimes_A B) = 0 \text{ pour } i > p \text{ ([20], prop. 18, IV, 31)}.$$

Comme  $B$  est fidèlement plat, on a

$$\text{Ext}_A^i(N, M) = 0 \text{ pour } i > p$$

et par suite,

$$\dim_A M \leq p.$$

En outre,  $\dim M \otimes B = \dim B$  implique  $\dim M = \dim A$  et  $\dim M = \dim M$ . Par ailleurs, on sait que  $M$  est de Cohen-Macaulay (0.5), d'où

$$\text{prof } M = \dim M = \dim M.$$

**1.4. DÉFINITION.** Soit  $(A, \mathfrak{m})$  un anneau local de Cohen-Macaulay de dimension  $n$ . On appelle rang d'un  $A$ -module de Gorenstein  $M$  le nombre  $\mu_n^A(\mathfrak{m}, M)$ .

Cette terminologie est utilisée par REITEN [18] qui a étudié l'existence des modules de Gorenstein de rang 1 (ou modules canoniques de [13] ; voir aussi [23]).

**1.5. THÉORÈME.** - Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux locaux de Cohen-Macaulay,  $k$  le corps résiduel de  $A$ , et  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme local tel que  $B$  soit  $A$ -plat. Soit  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul. Alors pour que  $M \otimes_A B$  soit un  $B$ -module de Gorenstein de rang 1, il faut et il suffit que  $M$  soit un  $A$ -module de Gorenstein de rang 1 et que  $B \otimes_A k$  soit un anneau de Gorenstein.

**Démonstration.** - Si  $M$  est un  $A$ -module de Gorenstein, et si  $B \otimes_A k$  est un anneau de Gorenstein, alors  $M \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Gorenstein d'après (1.3), et de rang 1 d'après la dernière assertion de (0.5). Établissons la réciproque.

1° Si  $\dim A = \dim B = 0$  et si  $M \otimes_A B$  est un  $B$ -module de Gorenstein de rang 1, alors  $M$  est un  $A$ -module de Gorenstein en vertu de (1.3, ii) et de rang 1 (0.5). En outre,  $B \otimes k$  est un anneau de Gorenstein d'après le théorème de Dieu-donné ([2], 2.8, p. 12).

2° Si  $\dim A > 0$ , on sait (1.3 (ii)) que  $M$  est un  $A$ -module de Gorenstein ; soit  $\underline{x}$  une  $A$ -suite et une  $M$ -suite maximale ;  $\underline{x}$  est aussi une  $B$ -suite. Posons

$$A' = A/\underline{x}A ; \quad B' = B/\underline{x}B \quad \text{et} \quad M' = M/\underline{x}M$$

Soit  $\underline{y}$  une  $(B' \otimes_A k)$ -suite maximale ; on sait que  $\underline{y}$  est aussi une  $B'$ -suite et, comme dans la preuve de (1.3) si l'on pose  $B'' = B'/\underline{y}B'$ ,  $M' \otimes_A B''$  est un  $B''$ -module de Gorenstein de rang 1, car si  $\dim M \otimes B = p$ ,

$$\mu_p^B(M \otimes_A B) = \mu_0^{B''}(M' \otimes_A B'') \quad ([2], 2.6).$$

D'après le premier cas,  $B'' \otimes_A k$  est un anneau de Gorenstein, et comme on a l'isomorphisme  $B'' \otimes_A k = (B' \otimes_A k)/(\underline{y}(B' \otimes_A k))$ ,  $B' \otimes_A k = B \otimes k$  est un anneau de Gorenstein (1.2).

**1.6. THÉORÈME.** - Soient  $A$  et  $B$  deux anneaux locaux,  $\mathfrak{m}$  l'idéal maximal de  $A$ ,  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme local tel que  $B$  soit  $A$ -plat. Alors  $B$  est un anneau de Gorenstein si, et seulement si,  $A$  et  $B/\mathfrak{m}B$  sont des anneaux de Gorenstein.

Preuve. - Prendre  $M = A$  dans (1.5).

Le théorème (1.3) généralise donc un résultat de HARTSHORNE ([11], prop. 96, page 297), WATANABE ([26], I, th. 1) et KUNZ-HERZOG ([13], 6.14).

Terminons ce paragraphe par un lemme utile pour la suite.

**1.7. LEMME.** - Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini et

$$0 \rightarrow M \rightarrow E_0 \rightarrow \dots \rightarrow E_i \rightarrow \dots$$

une résolution injective minimale de  $M$ . Alors

(a)  $p \in \text{Ass}(E_i) \Rightarrow \mu_i(p, M) > 0$ ,

(b) Si  $p \in \text{Supp } M$  et si  $\dim M_p = i$ , alors  $\mu_i(p, M) > 0$ .

Preuve.

(a) Soit  $p \in \text{Ass } E_i$ , alors il existe une suite exacte  $0 \rightarrow A/p \rightarrow E_i$ , et par suite

$$\text{Hom}_{A_p}(k(p), E_{i_p}) \neq 0, \text{ où } k(p) = A_p/pA_p.$$

Mais comme

$$\text{Ext}_{A_p}^i(k(p), M_p) \simeq \text{Hom}_{A_p}(k(p), E_{i_p}) \quad ([2], \text{preuve de 2.7}).$$

on a

$$\mu_0(p, E_i) = \mu_i(p, M) \neq 0 \text{ d'après } ([2], 2.7).$$

(b) Soit  $p \in \text{Supp } M$  tel que  $\dim M_p = i$ .

Soit  $p_i \subset \dots \subset p_1 \subset p_0 = p$  une chaîne saturée maximale de  $\text{Supp } M$ . Alors  $p_i$

est minimal dans  $\text{Supp } M$ , donc  $p_i \in \text{Ass } M$  et  $\mu_0(p_i, M) > 0$  d'après (a) ; mais on en déduit que  $\mu_i(p, M) > 0$  par ([2], 3.1).

## 2. La condition $G_q$

Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini, et  $q$  un entier. On dit que  $M$  vérifie la condition  $S_q$  de Serre si

$$\text{prof } M_p \geq \min(q, \dim M_p)$$

pour tout idéal premier  $p$  de  $A$ .

Dans tout ce qui suit,  $q$  désigne un entier non nul.

**2.1. PROPOSITION.** - Soit  $A$  un anneau. Les assertions suivantes sont équivalentes pour un  $A$ -module  $M$  de type fini non nul.

(i) Pour tout idéal premier  $p$  de  $A$  tel que  $\text{prof } M_p < q$ ,  $M_p$  est un  $A_p$ -module de Gorenstein.

(ii)  $M$  vérifie la condition  $S_q$  de Serre, et pour tout idéal  $p$  du support de  $M$ , tel que  $\dim M_p < q$ ,  $M_p$  est un  $A_p$ -module de Gorenstein.

(iii) Pour tout  $A$ -module de type fini  $L$ ,  $\text{grade}_M \text{Ext}_A^r(L, M) \geq \min(q, r)$ .

Démonstration. - L'équivalence de (i) et (ii) est immédiate. Montrons que (ii) entraîne (iii). Posons  $E = \text{Ext}^r(L, M)$ . Si  $\text{grade}_M E$  est infini, il n'y a rien à prouver ; sinon, soit  $p \in \text{Supp } E$ . Il suffit, d'après [1], 4.3, de prouver que  $\text{grade}_M A/p \geq \min(q, r)$ . Soit

$$0 \rightarrow M \rightarrow I_0 \rightarrow I_1 \rightarrow \dots \rightarrow I_r \xrightarrow{\bar{d}_r} I_{r+1} \rightarrow \dots$$

une résolution injective minimale de  $M$ . Considérons le complexe

$$0 \rightarrow \text{Hom}(L, M) \rightarrow \text{Hom}(L, I_0) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}(L, I_r) \xrightarrow{\bar{d}_r} \text{Hom}(L, I_{r+1}) \rightarrow \dots$$

et, pour  $r \geq 1$ , la suite exacte

$$0 \rightarrow \text{im } \bar{d}_{r-1} \rightarrow \ker \bar{d}_r \rightarrow \text{Ext}^r(L, M) \rightarrow 0.$$

D'après [3] (chap. II, prop. 16, p. 133) on a

$$\text{Supp } \text{Ext}^r(L, M) \subset \text{Supp } \ker \bar{d}_r \subset \text{Supp } \text{Hom}(L, I_r) \text{ pour } r \geq 1.$$

Il est d'autre part clair que  $\text{Supp } \text{Ext}^0(L, M) \subset \text{Supp } \text{Hom}(L, I_0)$ . Comme

$$p \in \text{Supp } E, \quad p \in \text{Supp } L \cap \text{Supp } I_r \text{ pour } r \geq 0;$$

d'après [4] (prop. 7, p. 136),  $\exists q \in \text{Ass } I_r$  tel que  $q \subset p$ .

Mais  $q \in \text{Ass } I_r$  implique  $\mu_r(q, M) > 0$  d'après (1.7.a) ; de plus  $M_q \neq 0$  en vertu de [2], 2.7, et aussi  $q.M \neq M$  (NAKAYAMA). De même, on a  $M_p \neq 0$  et  $pM \neq M$ .

Par (0.2), on sait que  $\text{grade}_M A/q$  et  $\text{grade}_M A/p$  sont finis. Comme

$$\text{grade}_M A/q = \inf\{\text{prof } M_b, b \in V(q)\} \quad ([1], 4.5)$$

on a  $\text{grade}_M A/q \leq \text{grade}_M A/p$  puisque  $V(p) \subset V(q)$ . Il suffit donc de montrer que  $\text{grade}_M A/q \geq \min(q, r)$ .

Si  $r = 0$ , il n'y a rien à prouver. Supposons  $r \geq 1$ , et soit  $b \in V(q)$ ; on sait que  $b \in \text{Supp } M$ .

Si  $\dim M_b < \min(q, r)$ , alors  $M_q$  est un  $A_q$ -module de Gorenstein, donc

$$\mu_i(q, M) = 0 \text{ pour } i \neq \dim M_q \quad ([22], 3.6)$$

et en particulier  $\dim M_q < r$  implique  $\mu_r(q, M) = 0$ , or  $q \in \text{Ass } I_r \Rightarrow \mu_r(q, M) > 0$  (1.7); on a donc nécessairement  $\dim M_b \geq \min(q, r)$  et, d'après (ii), on en déduit

$$\text{prof } M_b \geq \min(q, r)$$

et finalement

$$\text{grade}_M A/q \geq \min(q, r).$$

Réciproquement, prouvons que (iii) implique (ii). Montrons d'abord que

$$\text{prof } M_p \geq \min(q, \dim M_p) \text{ pour tout } p \in \text{Spec } A.$$

Si  $M_p = 0$ , il n'y a rien à prouver, car  $\text{prof } M_p = +\infty$  ([9], 16.4.5.).

Soit  $p \in \text{Supp } M$ , et posons  $\dim M_p = r$ . D'après (iii), avec  $L = A/p$ , on a  $\text{grade}_M E \geq \min(q, r)$ . Par ailleurs,

$$\dim M_p = r \Rightarrow \mu_r(p, M) > 0 \Rightarrow E_p = \text{Ext}^r(A/p, M)_p \neq 0 \quad ([2], 2.7)$$

donc  $p = \text{Ann } E$ , et  $p.M \neq M$  indique que  $\text{grade}_M E$  est fini (0.2). On déduit de [1], 4.5 que  $\text{prof } M_p \geq \text{grade}_M E \geq \min(q, \dim M_p)$ .

Soit maintenant  $p \in \text{Supp } M$  tel que  $\dim M_p < q$ ;  $M_p$  est un  $A_p$ -module de Cohen-Macaulay puisque  $M$  vérifie  $S_q$ . D'après [22], 3.3, il suffit de montrer que  $\mu_i(p, M) = 0$  pour  $i > \dim M_p$ . Or s'il existe  $i > \dim M_p$  tel que  $\mu_i(p, M) \neq 0$ , on en déduit comme ci-dessus que  $\text{grade}_M \text{Ext}^i(A/p, M)$  est fini, et de [1], 4.3, on déduit que

$$\dim M_p = \text{prof } M_p \geq \min(q, i)$$

ce qui est contradictoire.

**2.2. DÉFINITION.** - Soient  $A$  un anneau, et  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul. On dit que  $M$  vérifie la condition  $G_q$  (ou que  $M$  est un  $G_q$ -module) s'il possède les trois propriétés équivalentes de la proposition (2.1).

**Remarques.** - Pour  $M = A$ , on retrouve la définition des  $G_q$ -anneaux de [12]. D'autres caractérisations des  $G_q$ -modules sont données dans [17] (Voir [21]).

**2.3. PROPOSITION.** - Soient  $A$  un anneau,  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul, et (a) une  $A$ -suite et une  $M$ -suite. Soit  $q \geq 2$ . Si  $M$  est un  $G_q$ -module,  $M/aM$  est un  $(G_{q-1})$ -module sur  $A/aA$ .

Il suffit d'utiliser le fait que, dans la catégorie des  $(A/aA)$ -modules de type fini, on a les isomorphismes de foncteurs [19]

$$\text{Ext}_A^r(\cdot, M) \simeq \text{Ext}_{A/aA}^{r-1}(\cdot, M/aM) \quad \text{pour } r \geq 1$$

et ensuite la propriété (iii) de (2.1).

Si  $\mathfrak{p}$  est un idéal premier de  $A$ , on désigne par  $k(\mathfrak{p})$  le corps résiduel de  $A_{\mathfrak{p}}$ .

**2.4. PROPOSITION.** - Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux tel que  $B$  soit  $A$ -plat, et soit  $M$  un  $A$ -module de type fini non nul, alors

(i) Si  $\varphi$  est fidèlement plat et si  $M \otimes_A B$  est un  $G_q$ -module,  $M$  est un  $G_q$ -module,

(ii) Si  $M$  est un  $G_q$ -module et si pour tout idéal premier  $\mathfrak{p}$  de  $A$ ,  $B \otimes_A k(\mathfrak{p})$  est un  $G_q$ -anneau, alors  $M \otimes_A B$  est un  $G_q$ -module s'il est non nul.

Démonstration.

(i) Soit  $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M$ , et soit  $\mathfrak{q}$  un idéal premier minimal au-dessus de  $\mathfrak{p}$  ([14], 5.D, th. 4, page 33).

$$\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \Rightarrow \mathfrak{q} \in {}^a\varphi^{-1}(\text{Supp } M) = \text{Supp}(M \otimes B) \quad ([3], \text{chap II}, \S 4, n^\circ 4, \text{prop. 19})$$

et

$$(M \otimes_A B) \otimes_B B_{\mathfrak{q}} = (M \otimes_A A_{\mathfrak{p}}) \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}} = M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}.$$

Comme

$$\dim(B_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})) = \text{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} k(\mathfrak{p})) = 0,$$

on a en vertu de [10], 6.3.1,

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) = \text{prof } M_{\mathfrak{p}}$$

car  $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$  est un morphisme plat et local. Si  $\text{prof } M_{\mathfrak{p}} < q$ , alors

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) < q,$$

donc  $M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}$  est de Gorenstein, et  $M_{\mathfrak{p}}$  est un  $A_{\mathfrak{p}}$ -module de Gorenstein d'après (1.3 (ii)).

(ii) Soit  $\mathfrak{q} \in \text{Supp}(M \otimes B)$  tel que  $\text{prof}(M \otimes B)_{\mathfrak{q}} < q$  et soit  $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$ .

On a  $\mathfrak{p} \in \text{Supp } M$  d'après la formule ci-dessus. L'homomorphisme  $A_{\mathfrak{p}} \rightarrow B_{\mathfrak{q}}$  est plat et local, et en outre

$$\text{prof}(M_{\mathfrak{p}} \otimes_{A_{\mathfrak{p}}} B_{\mathfrak{q}}) = \text{prof } M_{\mathfrak{p}} + \text{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})) < q \quad ([10], 6.3.1).$$

Or  $\text{prof } M_{\mathfrak{p}} < q$  entraîne que  $M_{\mathfrak{p}}$  est un  $A_{\mathfrak{p}}$ -module de Gorenstein et de même  $\text{prof}(B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})) < q$  implique que  $B_{\mathfrak{q}} \otimes k(\mathfrak{p})$  est un anneau de Gorenstein (hypothèse). Le théorème (1.3) indique que  $(M \otimes B)_{\mathfrak{q}}$  est un  $B_{\mathfrak{q}}$ -module de Gorenstein.

2.5. THÉOREME. - Soit  $\varphi : A \rightarrow B$  un homomorphisme d'anneaux tel que  $B$  soit  $A$ -plat.

(i) Si  $\varphi$  est fidèlement plat et si  $B$  est un  $G_q$ -anneau, alors  $A$  est un  $G_q$ -anneau.

(ii) Si  $A$  est un  $G_q$ -anneau et si  $B \otimes_A k(p)$  est un  $G_q$ -anneau pour tout idéal premier  $p$  de  $A$ , alors  $B$  est un  $G_q$ -anneau.

2.6. COROLLAIRE. - Si  $A$  est un  $G_q$ -anneau, l'anneau des polynômes à une indéterminée  $A[X]$  est un  $G_q$ -anneau.

2.7. COROLLAIRE. - Soit  $G$  un groupe abélien fini ; si  $A$  est un  $G_q$ -anneau, alors  $A[G]$  est un  $G_q$ -anneau.

Preuve. - Avec les notations ci-dessus, on a les isomorphismes d'anneaux

$$A[X] \otimes_A k(p) \simeq k(p)[X] \text{ et } A[G] \otimes_A k(p) \simeq k(p)[G]$$

or  $k(p)[X]$  est un anneau régulier ([9], 17.3.7), donc de Gorenstein, et

$$\dim k(p)[G] = 0$$

d'après [6] (§ 4, Cor 9', page 7). Le théorème (2.5) permet de conclure.

2.8. COROLLAIRE. - Soient  $k$  un corps commutatif,  $A$  une  $k$ -algèbre,  $k'$  une extension de  $k$  de degré fini, et soit  $A' = A \otimes_k k'$ . Alors  $A'$  est un  $G_q$ -anneau si, et seulement si,  $A$  est un  $G_q$ -anneau.

En effet, on sait que le morphisme canonique  $p : \operatorname{Spec} A' \rightarrow \operatorname{Spec} A$  est fidèlement plat ([10], 2.2.13), et  $A' \otimes_A k(p) \simeq k(p) \otimes_k k'$  est un anneau de Gorenstein d'après [26] (cor. 2, p. 416).

2.9. THÉOREME (FOSSUM et REITEN [7], prop. 3). - Soient  $A$  un anneau local, et  $x$  un élément  $A$ -régulier. Si  $A/xA$  est un  $G_q$ -anneau, alors  $A$  est un  $G_q$ -anneau.

2.10. COROLLAIRE [7]. - Si  $A$  est un  $G_q$ -anneau, l'anneau des séries formelles à une indéterminée  $A[[X]]$  est un  $G_q$ -anneau.

Signalons à cette occasion que la démonstration du corollaire 1 de [16] est erronée. Le résultat énoncé est celui du corollaire (2.10), prouvé par les deux auteurs ci-dessus, qui ont aussi établi indépendamment (2.4).

Comme dans [10], 5.7.2, on peut définir la condition  $G_q$  pour les schémas localement noethériens (voir [16]) et compte tenu de (2.4), elle vérifie les mêmes propriétés que la condition  $S_q$ .

Les  $G_q$  anneaux ont été utilisés pour l'étude de la  $q$ -torsion des modules ([12] et [15]) et d'autres caractérisations ont été données dans [7].

Nota. - Le théorème (1.3) a été établi également par R. Y. SHARP [25].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.) et BRIDGER (M.). - Stable module theory. - Providence, American mathematical Society, 1969 (Memoirs of the American mathematical Society, 94).
- [2] BASS (H.). - On the ubiquity of Gorenstein rings, Math. Z., t. 82, 1963, p. 8-28.
- [3] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 1 et 2. - Paris, Hermann, 1961 (Act. scient. et ind., 1290 ; Bourbaki, 27).
- [4] BOURBAKI (N.). - Algèbre commutative, chap. 3 et 4. - Paris, Hermann, 1967 (Act. scient. et ind., 1293 ; Bourbaki, 28).
- [5] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [6] EILENBERG (S.) and NAKAYAMA (T.). - On the dimension of modules and algebras, II., Nagoya J. Math., t. 9, 1955, p. 1-16.
- [7] FOSSUM (R.) and REITEN (I.). - Commutative  $n$ -Gorenstein rings, Math. Scand., t. 31, 1972, p. 33-48.
- [8] GRECO (S.) and SALMON (P.). - Topics in  $m$ -adic topologies. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Ergebnisse der Mathematik, 58).
- [9] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, chapitre 4, première partie. - Paris, Presses universitaires de France, 1964 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 20).
- [10] GROTHENDIECK (A.) et DIEUDONNÉ (J.). - Eléments de géométrie algébrique, chapitre 4, seconde partie. - Paris, Presses universitaires de France, 1965 (Institut des Hautes Etudes Scientifiques. Publications mathématiques, 24).
- [11] HARTSHORNE (R.). - Residues and duality. - Berlin, Springer-Verlag, 1966 (Lecture Notes in Mathematics, 20).
- [12] ISCHEBECK (F.). - Eine Dualität zwischen den Funktoren Ext. und Tor., J. of Algebra, t. 11, 1969, p. 510-531.
- [13] KUNZ (E.) und HERZOG (J.). - Vorträge in "Der kanonische Modul eines Cohen-Macaulay-Rings", p. 17-32. - Berlin, Springer-Verlag, 1971 (Lecture Notes in Mathematics, 238).
- [14] MATSUMURA (H.). - Commutative algebra. - New York, W. A. BENJAMIN, 1970.
- [15] PAUGAM (M.). -  $G_q$ -anneaux et condition (a) de Samuel, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 821-823.<sup>q</sup>
- [16] PAUGAM (M.). - La condition  $G_q$  de Ischebeck, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 109-112. <sup>q</sup>
- [17] PAUGAM (M.). - La condition  $G_q$  de Ischebeck pour les modules, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 1031-1033.
- [18] REITEN (I.). - The converse to a theorem of Sharp on Gorenstein modules, Proc. Amer. math. Soc., t. 32, 1972, p. 417-420.
- [19] Séminaire Samuel : Algèbre commutative, 1966/1967 : Anneaux de Gorenstein et torsion en algèbre commutative. - Paris, Secrétariat mathématique, 1967.
- [20] SERRE (J.-P.). - Algèbre locale, multiplicités. - Berlin, Springer-Verlag, (Lecture Notes in Mathematics, 11).
- [21] SHARP (R. Y.). - The Cousin Complex for a module over a commutative noetherian ring, Math. Z., t. 112, 1969, p. 340-356.
- [22] SHARP (R. Y.). - Gorenstein modules, Math. Z., t. 115, 1970, p. 117-139.

- [23] SHARP (R. Y.). - On Gorenstein modules over a complete Cohen-Macaulay local ring, Quart. J. Math., Oxford Series 2, t. 22, 1971, p. 425-434.
- [24] SHARP (R. Y.). - Cousin Complex characterizations of two classes of commutative noetherian rings, J. London. math. Soc., Series 2, t. 3, 1971, p. 621-624.
- [25] SHARP (R. Y.). - The Euler characteristic of a finitely generated module of finite injective dimension, Math. Z., t. 130, 1973, p. 79-93.
- [26] WATANABE (K.), ISHIKAWA (T.), TACHIBANA (S.) and OTSUKA (K.). - On tensor products Gorenstein rings, J. Math. Kyoto Univ., t 9, 1969, p. 413-423.

(Texte reçu le 22 mai 1973)

Michel PAUGAM  
Université de Caen  
Mathématiques  
Esplanade de la Paix  
14032 CAEN CEDEX

---