Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Léonce Lesieur

Sur les anneaux noethériens tels que l'anneau quotient par le radical nilpotent soit commutatif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 26 (1972-1973), exp. n° 11, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1972-1973__26__A10_0>

Séminaire DUBREIL
(Algèbre)
26e année, 1972/73, n° 11, 8 p.

2 avril 1973

SUR LES ANNEAUX NOETHÉRIENS TELS QUE L'ANNEAU QUOTIENT PAR LE RADICAL NILPOTENT SOIT COMMUTATIF

par Léonce LESIEUR

Le théorème essentiel consiste à montrer qu'un anneau noethérien à gauche, dont l'anneau quotient par le radical nilpotent est commutatif, vérifie la condition (H) de GABRIEL : pour tout idéal à gauche I de A, il existe un nombre fini d'éléments $a_i \in A$ tels que

$$I \,\vdots\, A = \bigcap_{i=1}^{i=n} (I \,\vdots\, a_i)$$

$$I \,\vdots\, A = \{x \in A \mid xA \subseteq I\} \; ; \qquad I \,\vdots\, a_i = \{x \in A \mid xa_i \in I\} \; .$$

Cette propriété le classe dans la catégorie des T-anneaux forts (§ 3). Auparavant, on rappelle brièvement les propriétés utiles des T-anneaux (§ 1), et on donne des exemples (§ 2). Le théorème principal est démontré au paragraphe 4.

1. Rappels sur les T-anneaux.

J'ai donné, dans une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris [6], et j'ai exposé dans une Conférence de mon Séminaire [6], diverses propriétés caractéristiques des T-anneaux que je rappelle ici sans démonstration.

A est un T-anneau s'il est noethérien à gauche, et s'il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes :

1° La correspondance canonique entre idéaux premiers et modules injectifs indécomposables est bijective.

2° Tout A-module tertiaire de type fini est isotypique (et en conséquence, les idéaux à gauche tertiaires de A coïncident avec les idéaux à gauche isotypiques).

3° Tout A-module injectif indécomposable I est sans $\mathfrak{P}$-torsion, $\mathfrak{P} = \operatorname{Ass} I$ étant l'idéal premier associé à I (Condition de LAMBECK et MICHLER [4]).

4° Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier, et soit $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{P})$ un élément de A régulier modulo $\mathfrak{P}$. Alors il existe un idéal bilatère $\mathfrak{J}$ tel que $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{J} \subseteq Ac + \mathfrak{P}$ (Condition de KRAUSE [3]).

5° Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier, et soit $c \in \mathfrak{C}(\mathfrak{P})$ un élément de A régulier mod $\mathfrak{P}$. Il existe $c' \in \mathfrak{C}(\mathfrak{P})$ tel que :

$$\forall\, a \in A \; , \quad \exists\, a' \in A \quad \text{avec} \quad a'c \equiv c'a \pmod{\mathfrak{P}}$$

(Condition de Ore forte).

6° Soit I un idéal à gauche, $\cap$-irréductible et premier, $\mathfrak{P} = \operatorname{Ass} I$. Alors I ne contient aucun élément c régulier mod $\mathfrak{P}$, i. e. $I \cap \mathfrak{C}(\mathfrak{P}) = \emptyset$.

7° Pour tout idéal à gauche, $\cap$-irréductible et premier, Q , on a

$$Q \,:\, A = \bigcap_{\text{finie}} (Q \,:\, a_i) \ , \qquad a_i \in A \ ,$$

en posant $Q \,:\, A = \{x \in A \mid xA \subseteq Q\}$; $Q \,:\, a_i = \{x \in A \mid xa_i \in Q\}$.

Ceci constitue la condition de Gabriel faible. Elle est vérifiée, en particulier, si l'on a la condition de Gabriel (forte), introduite par GABRIEL [2], et qui est exactement de la même forme en supposant que Q est un idéal à gauche quelconque.

Je reviendrai dans la suite sur ces deux conditions qui font l'objet principal de mon exposé d'aujourd'hui.

8° Soient E un module injectif indécomposable, $\mathfrak{P} = \operatorname{Ass} E$, $C(E)$ le coeur de E [9], $0 \,:\, \mathfrak{P} = \{x \in E \mid \mathfrak{P}x = 0\}$. Alors :

(i) $0 \,:\, \mathfrak{P} \subseteq C(E)$;

(ii) $0 \,:\, \mathfrak{P}$ est un sous-espace vectoriel du coeur $C(E)$ de dimension finie égale à la dimension de Goldie de $A/\mathfrak{P}$.

9° Si $\mathfrak{R}$ est le radical nilpotent de A , l'anneau quotient $A/\mathfrak{R}$ est un T-anneau.

Comme $A/\mathfrak{R}$ est un anneau semi-premier, cette dernière propriété ramène l'étude des T-anneaux quelconques à celle des T-anneaux noethériens à gauche semi-premiers.

2. Exemples.

PROPRIÉTÉ 2.1. - Si $A/\mathfrak{R}$ est commutatif, A est un T-anneau.

En effet, un anneau commutatif est évidemment un T-anneau puisque

$$I = I \,:\, 1 = I \,:\, A \ .$$

On applique alors la propriété 1.9.

La propriété 2.1 permet d'obtenir une classe assez large de T-anneaux au moyen du théorème de structure d'un anneau noethérien à gauche d'exposant 2 que j'ai donné dans [7], et dont le cas le plus simple est le suivant :

$A/\mathfrak{R} = K$ est un anneau noethérien semi-simple commutatif (donc un anneau commutatif noethérien réduit), M est un K-bimodule de type fini à gauche, $A = M \times K$ est muni d'une structure d'anneau par les opérations suivantes :

$$(m \ , \ k) + (m' \ , \ k') = (m + m' \ , \ k + k')$$

$$(m \ , \ k).(m' \ , \ k') = (mk' + km' \ , \ kk')$$

A est alors un anneau noethérien à gauche dont le radical $\mathfrak{R} = \{(m \ , \ 0)\}$ est d'exposant 2 , $\mathfrak{R}^2 = 0$, et tel que $A/\mathfrak{R} \simeq K$ soit commutatif.

Exemple 1 (DIEUDONNÉ [1], p. 16). - Soient k un corps commutatif, et $K = k[x]$; $M = k[x]\,y$ est un bimodule dont l'opération de multiplication à gauche et à droite est définie respectivement par

$$a(x).y = a(x)\,y\ , \qquad y.a(x) = ya(0)\ .$$

Cela revient à imposer, dans l'anneau $k\langle x\ ,\ y\rangle$, les deux relations $y^2 = 0$, $yx = 0$. Un élément quelconque de l'anneau A est de la forme $a_0(x) + a_1(x)\,y$, et il est bien de la forme $(m\ ,\ k)$ avec

$$m = a_1(x)\,y \in M\ , \qquad k = a_0(x) \in K\ .$$

A est alors un T-anneau noethérien à gauche d'exposant 2 , tel que $A/\mathcal{R} \simeq k[x]$ soit commutatif. A n'est pas noethérien à droite, ce qui montre qu'on s'éloigne considérablement de la commutativité.

Exemple 2 (L. LESIEUR [8], p. 114 et 116). - Soit i une injection de l'anneau $\underset{\sim}{R}[x]$ dans le corps $\underset{\sim}{C}$ (On démontre l'existence d'une telle injection).

Soit φ la surjection canonique de $\underset{\sim}{R}[x]$ sur $\underset{\sim}{C}$, faisant correspondre à tout polynôme de $\underset{\sim}{R}[x]$ sa classe modulo $x^2 + 1$. On considère $M = \underset{\sim}{C}$ comme un $(K = \underset{\sim}{R}[x])$-bimodule par les opérations suivantes :

$$k.m = \varphi(k)\ m\ ; \qquad m.k' = m.i(k')\ ,$$

et on applique la construction générale. On obtient alors un T-anneau noethérien à gauche (et non noethérien à droite) qui a certaines propriétés remarquables : il est co-irréductible, donc complètement primaire, il possède un anneau total de fractions non artinien, etc.

Exemple 3 (L. LESIEUR et R. CROISOT [9], p. 402). - $A = \begin{pmatrix} \underset{\sim}{Q} & \underset{\sim}{Q} \\ 0 & \underset{\sim}{Z} \end{pmatrix}$ est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} q' & q \\ 0 & z \end{pmatrix}$, avec $q\ ,\ q' \in \underset{\sim}{Q}$, $z \in \underset{\sim}{Z}$. C'est un anneau noethérien à gauche et pas à droite, dont l'idéal singulier J est nul, qui a pour radical $\begin{pmatrix} 0 & \underset{\sim}{Q} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{R}$, d'exposant 2 , et tel que $K = A/\mathcal{R} \simeq \underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{Z}$ est commutatif. A est donc un T-anneau.

Remarquons que les exemples 1 et 2 qui proviennent d'un K-bimodule peuvent s'interpréter aussi comme un anneau de matrices triangulaires de la forme $\begin{pmatrix} k & m \\ 0 & k' \end{pmatrix}$, avec $k\ ,\ k' \in K$, $m \in M$.

L'exemple 3 est également susceptible d'une telle interprétation avec $K = \underset{\sim}{Q} \times \underset{\sim}{Z}$, l'opération $(q\ ,\ z).q'$ étant définie par qq' , et l'opération $q'(q\ ,\ z)$ par $q'z$. Plus généralement, si M est un R-module à gauche de type fini (R noethérien commutatif) et un S-module à droite (S noethérien commutatif), les matrices triangulaires de la forme $\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & s \end{pmatrix}$ constituent un T-anneau noethérien à gauche non commutatif dont la construction se rattache au modèle général précédent en considérant M comme un bimodule sur $R \times S$.

Signalons en particulier les exemples suivants, utilisés par D. LAZARD dans sa théorie des morphismes de descente, et suggérés par A. DOUADY.

Exemple 4 (D. LAZARD [5], p. 12 et 13). - $A = \begin{pmatrix} R & M \\ 0 & S \end{pmatrix}$ avec $R = \underset{\sim}{C}[x]$, $S = \underset{\sim}{C}[y]$. $T = C[x , y]/(x^2 - xy , y^2 - xy)$, M est le sous-$\underset{\sim}{C}[x , y]$-module de T engendré par l'image de $x + y$.

Exemple analogue en considérant (x^2 , xy , y^2) . Ici encore, nous avons un anneau noethérien non commutatif d'exposant 2 , tel que $A/\mathcal{R} \simeq \underset{\sim}{C}[x] \times \underset{\sim}{C}[y]$, et qui est par suite un T-anneau.

3. T-anneaux forts.

On a vu au paragraphe 1 que la définition d'un T-anneau se traduit par la condition de Gabriel faible :

(H') $$I \cdot A = \cap_{\text{finie}} (I \cdot a_i) ,$$

où I est un idéal à gauche $\cap$-irréductible et premier.

Définition 3.1. - Nous appellerons T-anneau fort un anneau noethérien à gauche qui vérifie la condition de Gabriel (forte) :

(H) $$I \cdot A = \cap_{\text{finie}} (I \cdot a_i) .$$

pour un idéal à gauche I quelconque.

Remarquons que la différence entre les conditions (H) et (H') porte sur la notion d'idéal premier ([1]) , d'après la propriété suivante, signalée par Marie-Annick DUFUMIER, et qui s'établit aisément.

PROPRIÉTÉ 3.1. - Pour qu'un anneau noethérien à gauche soit un T-anneau fort, il faut et il suffit qu'il vérifie la condition de Gabriel : $I \cdot A = \cap_{\text{finie}} (I \cdot a_i)$, pour tout idéal à gauche I $\cap$-irréductible.

Rappelons une condition suffisante, donnée par GABRIEL, pour qu'un anneau soit un T-anneau fort :

PROPRIÉTÉ 3.2. - Pour qu'un anneau noethérien à gauche soit un T-anneau fort, il suffit qu'il soit de type fini sur son centre Z .

Cette propriété s'applique en particulier à l'anneau $M_n(K)$ des matrices carrées sur un anneau commutatif noethérien quelconque K ; $M_n(K)$ est donc un T-anneau fort.

Plus généralement, on a la propriété de transfert suivante :

PROPRIÉTÉ 3.3. - Si A est un T-anneau fort, il en est de même de l'anneau $M_n(A)$ des matrices carrées d'ordre n sur A .

([1]) Je rappelle qu'un idéal à gauche I est premier s'il vérifie la propriété suivante :

$$aAb \subseteq I \Rightarrow a \in I \text{ ou } b \in I .$$

Soit I un idéal à gauche de $M_n(A)$. L'idéal $I \cdot M_n(A)$ est bilatère dans $M_n(A)$, et il est donc formé par les matrices dont les éléments décrivent un certain idéal bilatère de A que nous allons déterminer. Soit u un tel élément. On aura donc :

$$ue_{11} + \ldots \in I \cdot M_n(A) , \quad u \in A ,$$

d'où en multipliant à droite par e_{1t} et à gauche par e_{s1} :

$$(1) \qquad ue_{st} \in I , \quad \forall\, s , t = 1 , \ldots , n .$$

Les éléments $u \in A$, qui vérifient (1), forment un idéal à gauche α de l'anneau A , et u doit vérifier, pour tout $\lambda \in A$

$$(2) \qquad u\lambda \in \alpha \quad \text{ou} \quad u \in \alpha \cdot A ,$$

car $(ue_{11} + \ldots)\lambda = u\lambda e_{11} + \ldots \in I \cdot M_n(A)$.

Réciproquement, si $u \in \alpha \cdot A$, on a $u\lambda e_{st} \in I$, pour tout $\lambda \in A$, et toutes valeurs $s , t = 1 , \ldots , n$. On en déduit $ue_{11} \sum \lambda_{ij} e_{ij} = u \sum \lambda_{1j} e_{1j} \in I$. Il en résulte $ue_{11} \in I \cdot M_n(A)$, et la matrice, dont les éléments appartiennent à $\alpha \cdot A$, est bien dans $I \cdot M_n(A)$.

Supposons alors que A soit un T-anneau fort. Il existe un nombre fini d'éléments $\lambda_\ell \in A$ tels que $u\lambda_\ell \in \alpha \Longrightarrow uA \subset \alpha$. Considérons les matrices $x \in M_n(A)$ qui vérifient $x\lambda_\ell e_{ij} \in I$, c'est-à-dire l'intersection finie $\cap\, I \cdot \lambda_\ell e_{ij}$. Un terme quelconque u d'une telle matrice vérifie $u\lambda_\ell e_{st} \in I$, $\forall\, s , t=1 , \ldots , n$, donc $u\lambda_\ell \in \alpha$, c'est-à-dire $uA \subset \alpha$, et la matrice x satisfait bien la relation $xM_n(A) \subseteq I$.

Remarque. - Les conditions

(i) A est un T-anneau fort,

(ii) $M_n(A)$ est un T-anneau fort,

sont équivalentes.

En effet, soient $M_n(A)$ un T-anneau fort, α un idéal à gauche de A . Considérons l'idéal à gauche $I(\alpha)$ de $M_n(A)$ formé des matrices dont tous les termes appartiennent à α . Par hypothèse, l'intersection $I \cdot M_n(A)$ est égale à une intersection finie $I \cdot \mathfrak{M}_\ell$, avec $\mathfrak{M}_\ell = \sum \lambda_{\ell ij} e_{ij}$, $\lambda_{\ell ij} \in A$. Considérons dans A les relations $u\lambda_{\ell ij} \in \alpha$. La matrice $ue_{11} = x$ vérifie les relations

$$x\lambda_{\ell ij} e_{ij} \in I ,$$

d'où $x\mathfrak{M}_\ell \in I$, et par suite $xM_n(A) \subset I$, d'où, en particulier, $u\lambda \in \alpha$, $\forall\, \lambda \in A$. La condition (H) forte de Gabriel est donc vérifiée pour l'anneau A , et (ii) $\Rightarrow$ (i). Comme on a aussi (i) $\Rightarrow$ (ii) (propriété 3.3), (i) et (ii) sont équivalents.

4. Le théorème principal.

THÉORÈME 1. - *Si $A/\mathcal{R}$ est commutatif, A est un T-anneau fort.*

Soit A un anneau unitaire noethérien à gauche, commutatif ou non. Soit $\mathcal{R}$ le radical nilpotent de A. On suppose que $K = A/\mathcal{R}$ est commutatif. Nous allons démontrer que A vérifie la condition (H) de Gabriel en raisonnant par récurrence sur l'exposant n de A tel que $\mathcal{R}^n = 0$, $\mathcal{R}^{n-1} \neq 0$.

La propriété est vraie pour $n = 1$, car alors A est commutatif et, pour tout idéal I de A, on a

$$I : A = I = I : 1 .$$

Supposons-la vraie pour n, et démontrons-la pour l'ordre $n + 1$: $\mathcal{R}^{n+1} = 0$, $\mathcal{R}^n \neq 0$.

Soit I un idéal à gauche de A ; on veut prouver :

$$(H) \qquad I \therefore A = \bigcap_{\text{finie}} (I \therefore a_i) .$$

$A/\mathcal{R}^n$ est un anneau noethérien à gauche, de radical nilpotent $\mathcal{R}/\mathcal{R}^n$, d'exposant n. En effet, si $\overline{u}$ est nilpotent dans $A/\mathcal{R}^n$, on a

$$u^p \subseteq \mathcal{R}^n \Rightarrow u^{2p} = 0 \Rightarrow u \subset \mathcal{R} \Rightarrow \overline{u} \subset \mathcal{R}/\mathcal{R}^n ;$$

de plus l'indice de nilpotence de $\mathcal{R}/\mathcal{R}^n$ est n, car $\overline{\mathcal{R}}^n = 0$, avec $\overline{\mathcal{R}}^{n-1} \neq 0$, puisque

$$\overline{\mathcal{R}}^{n-1} = 0 \Rightarrow \mathcal{R}^{n-1} = \mathcal{R}^n \Rightarrow \mathcal{R}^n = \mathcal{R}^{n+1} = 0 .$$

Enfin, l'anneau quotient de $A/\mathcal{R}^n$ par son radical nilpotent $\mathcal{R}/\mathcal{R}^n$ est isomorphe à $A/\mathcal{R}$, donc commutatif.

L'hypothèse de récurrence s'applique à l'anneau $A/\mathcal{R}^n$ et, par suite, il existe pour l'idéal $\overline{I} = I + \mathcal{R}^n$ un nombre fini d'éléments $\overline{\alpha}_1, \ldots, \overline{\alpha}_N$ tels que :

$$\overline{u}\,\overline{a}_i \in \overline{I} \Rightarrow \overline{u}\,\overline{a} \in \overline{I} , \ \forall\, \overline{a} \in A/\mathcal{R}^n .$$

Choisissons déjà u de façon que

$$u\, a_i \in I \qquad (i = 1, \ldots, N) .$$

On aura donc, pour tout u ainsi choisi, et tout $a \in A$,

$$u\, a = \rho + i \qquad (i = I, \ \rho \in \mathcal{R}^n) .$$

Soit $\{i^k\}$ un système de générateurs de l'idéal $I_1 = \bigcap_{i=1,\ldots,N} (I \therefore \alpha_i)$ ainsi déterminé. Nous avons pour tout élément $u \in I_1$:

$$(3) \qquad u = u_1\, i^1 + \ldots + u_\ell\, i^\ell = \sum_k u_k\, i^k .$$

Choisissons un système de générateurs $\mathfrak{M}_p$ de $\mathcal{R}^n$ $(p = 1, \ldots, s)$. Nous avons pour tout i^k et tout $a \in A$:

$$i^k\, a = \sum_p a^{kp}\, \mathfrak{M}_p \pmod{I} , \quad p = 1, \ldots, s ,$$

où $a^{kp} \in K = A/\mathcal{R}$ est un élément de K fonction de la variable $a \in A$ (On note ici que $\mathcal{R}^n$ est un $(K = A/\mathcal{R})$-bimodule). Il vient donc, d'après (3),

$$ua = \sum_k u_k\, i^k\, a \equiv \sum_{k,p} \lambda_k\, a^{kp}\, \mathfrak{M}_p \pmod{I} ,$$

où $\lambda_k \in K$ désigne la classe de u_k modulo $\mathcal{R}$. La condition $ua \in I$ est donc équivalente à :

$$(4) \qquad \sum_{k,p} \lambda_k a^{kp} \pi_p \in I \cap \mathcal{R}^n = J ,$$

où J est un sous-K-module à gauche de $\mathcal{R}^n$.

Sous forme matricielle, (4) s'écrit :

$$(\lambda_1 , \dots , \lambda_\ell) \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_s \end{pmatrix} \in J ,$$

où $A = (a^{kp})$ représente une matrice à s lignes et à ℓ colonnes fonction de a variable dans A. L'anneau K étant noethérien, il existe un nombre fini de matrices $A_i = A(a_i)$ telles que toute matrice $A(a)$ s'écrive sous la forme

$$A = \sum_{i=1}^{h} \mu^i A_i , \quad \mu^i \in K , \quad i = 1 , \dots , h$$

(Il suffit en effet de considérer le K-module à gauche de type fini constitué par ces matrices). La condition (4) s'écrit alors :

$$(5) \qquad \sum \lambda_k \mu^i a_i^{kp} \pi_p \in J .$$

Considérons maintenant les h conditions :

$$(6) \qquad \sum \lambda_k a_i^{kp} \pi_p \in J , \quad i = 1 , \dots , h .$$

Elles équivalent à

$$(6') \qquad ua_i \in I , \quad i = 1 , \dots , h ,$$

c'est-à-dire à

$$u \in \bigcap_{\text{finie}} (I \colon a_i) .$$

Je dis alors qu'on a (5), c'est-à-dire $u \in I \colon A$. En effet, en vertu de la commutativité de K, (5) peut s'écrire :

$$\sum \mu^i \lambda_k a_i^{kp} \pi_p = \sum_i \mu^i (\sum_{k,p} \lambda_k a_i^{kp} \pi_p)$$

qui est un élément de J d'après (6).

Exemples et remarques. - D'après le théorème, tous les exemples donnés au paragraphe 2 de T-anneaux avec $A/\mathcal{R}$ commutatif sont des T-anneaux forts.

Il ne faut donc pas chercher dans cette voie pour obtenir un exemple de T-anneau qui ne soit pas un T-anneau fort.

On peut alors songer à des anneaux premiers non commutatifs, par exemple :

1° L'anneau de Lambek et Michler [4]

$$\begin{pmatrix} D & D \\ M & D \end{pmatrix}$$

formé des matrices carrées d'ordre 2 avec l'anneau local

$$D = \{(a/b) \in \underset{\sim}{Q} \mid b \notin 2\underset{\sim}{Z}\}$$

et l'idéal $M = 2D$.

Mais, suivant une remarque de Mme PHAM-PIERREJEAN, cet anneau est un T-anneau fort, car il est de type fini sur son centre.

2° L'anneau $k(y)[x]$ avec $xf(y) = f(y^2)\,x$, est noethérien intègre non commutatif, et ce n'est pas un T-anneau fort, mais il n'est pas un T-anneau non plus.

La question de l'existence d'un T-anneau qui ne vérifie pas la condition de Gabriel forte reste donc posée.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CARTAN (H.) et EILENBERG (S.). - Homological Algebra. - Princeton, University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).

[2] GABRIEL (P.). - Des catégories abéliennes, Bull. Soc. math. France, t. 90, 1962, p. 323-348 (Thèse Sc. math., Paris 1961).

[3] KRAUSE (G.). - On fully left bounded left noetherian rings, J. of Algebra, t. 23, 1972, p. 88-99.

[4] LAMBEK (J.) and MICHLER (G.). - The torsion theory at a prime ideal of a right notherian ring, J. of Algebra (à paraître).

[5] LAZARD (D.). - Morphismes de descente en algèbre non commutative, Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay 1973, n° 27, Conférence n° 7.

[6] LESIEUR (L.). - Sur les T-anneaux, C. R. Acad. Sc., Paris, t. 276, 1973, Série A, p. 435-438 ; et Séminaire d'Algèbre non commutative, Orsay 1973, n° 27, Conférence n° 4.

[7] LESIEUR (L.). - Structure des anneaux noethériens à gauche d'exposant 2 , Symposia Mathematica, Vol. 8, p. 193-203. - London, Academic Press, 1972 (Istituto nazionale di alta Matematica).

[8] LESIEUR (L.). - Anneaux noethériens à gauche complètement primaires et anneaux co-irréductibles, J. für reine und angew. Math., t. 240, 1970, p. 106-117.

[9] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Coeur d'un module, J. Math. pures et appl., 9e série, t. 42, 1963, p. 367-407).

(Texte reçu le 10 avril 1973)

Léonce LESIEUR
112 bis rue Houdan
92330 SCEAUX