

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ALFRED H. CLIFFORD

Demi-groupes bisimples unipotents à gauche

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972), exp. n° J4, p. J1-J9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

29 juin 1972

DEMI-GROUPES BISIMPLES UNIPOTENTS À GAUCHE

par Alfred H. CLIFFORD

Rappelons-nous qu'un demi-groupe S est régulier si, et seulement si, chaque $\mathcal{R}$ -classe (ou bien chaque $\mathcal{L}$ -classe) de S contient un élément idempotent, et inverse si, et seulement si, chaque $\mathcal{R}$ -classe et chaque $\mathcal{L}$ -classe de S contient exactement un seul élément idempotent ([5], § 2.3). [Comme d'habitude, nous écrirons

$$\mathcal{R}, \mathcal{L}, \mathcal{H} = \mathcal{R} \cap \mathcal{L}, \mathcal{O} = \mathcal{R} \circ \mathcal{L} = \mathcal{L} \circ \mathcal{R}$$

pour les relations de Green [5], § 2.1.]

Si chaque $\mathcal{L}$ -classe de S contient, exactement, un seul idempotent, alors S est appelé " $\mathcal{L}$ -unipotent" par R. J. WARNE [15], inverse à droite par P. S. VENKATESAN [13], et inverse à gauche par G. L. BAILES [1] ; nous appellerons un tel S unipotent à gauche.

Nous nous proposons d'examiner la structure des demi-groupes S unipotents à gauche qui sont également bisimples, c'est-à-dire qui consistent d'une seule $\mathcal{O}$ -classe. Pour éviter les distractions techniques, nous exigeons que S possède un élément neutre 1 , et que 1 est le seul élément inversible dans S , c'est-à-dire que $(ab = ba = 1)$ implique $(a = 1 \text{ et } b = 1)$.

La structure d'un demi-groupe bisimple inverse S , avec élément neutre 1 , était trouvée dans [2] en termes de la $\mathcal{R}$ -classe $R = R_1$ de S contenant 1 . R est sous-demi-groupe de S jouissant de quelques propriétés, et l'on exprime les éléments de S comme couples ordonnés (a, b) d'éléments a, b de R . Un raffinement de cette méthode était donné dans [5], § 8.4, mais la forme que nous donnons ici à la multiplication dans un demi-groupe bisimple unipotent à gauche (théorème A) revient à celle de l'article [2] ; voir aussi REILLY [11].

Dans le cas inverse, S est déterminé par R , mais nous verrons à la fin de cette note (proposition 4) que ceci ne reste pas valable dans le cas unipotent à gauche.

Nous remarquons que W. D. MUNN ([8], [9], [10]) a donné une théorie de structure pour les demi-groupes bisimples inverses, généralisée par T. E. HALL [1], qui est tout à fait différente de celle-ci. Nous ne pouvons pas l'examiner dans le cadre de cet exposé.

Nous remarquons aussi que R. J. WARNE a donné dans [17] une théorie des demi-groupes bisimples réguliers. Il donne un résumé de ses travaux sur ce sujet dans [18]. De même E. W. EWING [6] donne une construction pour une classe de demi-groupes un peu plus restreinte que celle des demi-groupes bisimples unipotents à gauche.

Notation. - Pour deux éléments a, b d'un demi-groupe S , $a \perp b$ veut dire que a et b sont inverses l'un de l'autre, c'est-à-dire que $aba = a$ et $bab = b$.

1. Préliminaires.

Avec G. B. PRESTON et ses disciples, nous dirons qu'un demi-groupe S est orthodoxe s'il est régulier, et si l'ensemble E_S d'idempotents de S est sous-demi-groupe de S (c'est-à-dire que E_S est une bande, demi-groupe dont tous les éléments sont idempotents).

Rappelons-nous qu'une bande E peut s'exprimer comme demi-treillis Y de bandes rectangulaires E_α ($\alpha \in Y$) : $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ (réunion disjointe) et $E_\alpha E_\beta \subseteq E_{\alpha\beta}$ ($\alpha\beta$ le produit de α et β dans Y). Les $\mathcal{L}$ -classes de E sont celles des composants E_α , et par conséquent E est unipotent à gauche si, et seulement si, chaque bande rectangulaire E_α se réduit à une seule ligne, c'est-à-dire que chaque E_α est un demi-groupe zéro à droite.

La proposition suivante due à REILLY et SCHEIBLICH [12] est très utile.

PROPOSITION 1. - Pour un demi-groupe régulier S , les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) E_S est un sous-demi-groupe de S ;
- (ii) Si $a \perp a'$ et $b \perp b'$ ($a, b, a', b' \in S$), il vient $ab \perp b'a'$;
- (iii) Si $a \perp e$, où $a \in S$ et $a \in E_S$, il vient $a \in E_S$.

En fait, les implications (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) sont valables dans un demi-groupe quelconque, mais non (iii) $\Rightarrow$ (i).

WARNE [15], VENKATESAN [13], et BAILES [1] ont démontré indépendamment la proposition suivante.

PROPOSITION 2. - Un demi-groupe S est unipotent à gauche si, et seulement si, il vérifie les deux conditions suivantes :

- (i) S est orthodoxe ;
- (ii) E_S est unipotent à gauche.

Démonstration. - Prenons S unipotent à gauche, et supposons que $a \perp e$, où $a \in S$ et $a \in E_S$. Alors ae est un idempotent dans L_e , et puisque S est unipotent à gauche, $ae = e$. Par conséquent, $a = aea = ea$, et $a^2 = aea = a$. Ainsi (i) est valable, et (ii) est évident.

Inversement, supposons remplies les conditions (i) et (ii). (i) exige que S soit régulier, si bien que chaque $\mathcal{L}$ -classe de S contient au moins un idempotent. Si e et f sont deux idempotents dans la même $\mathcal{L}$ -classe, $ef = e$, $fe = f$, et $e \mathcal{L} f$ dans la bande E_S ; ceci entraîne que $e = f$ à cause de (ii).

La proposition suivante est une spécialisation du théorème 2.1 et du lemme 2.3 de [2].

PROPOSITION 3. - Soit S un demi-groupe avec élément neutre 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$. Soit R, L, D les $\mathcal{R}$ -, $\mathcal{L}$ -, et $\mathcal{D}$ -classes de S contenant 1 . Alors, S est bisimple si, et seulement si, $S = LR$. De plus, $(a' b = c' d \mid a', c' \in L, b, d \in R)$ entraîne $(a' = c' \text{ et } b = d)$.

Démonstration. - Si $a' \in L$ et $b \in R$, on a $a' b \in R_a \cap L_b$, puisque $L_a \cap R_b$ contient l'idempotent 1 . Par conséquent, $LR \subseteq D$. Inversement, si $c \in D$, $R \cap L_c \neq \emptyset$. Puisque $\mathcal{K}$ est l'égalité dans S , $R \cap L_c = \{a\}$ pour un élément a de S , et $L \cap R_c = \{b'\}$ pour un élément b' de L . Puisque $L_b \cap R_a$ contient l'idempotent 1 , $b' a \in R_b \cap L_a = H_c$; ceci entraîne que $c = b' a \in LR$. Ainsi, $LR = D$, et S est bisimple si, et seulement si, $S = D$.

Puisque $a' b \in R_a \cap L_b$, l'égalité $a' b = c' d$ entraîne que $a' \mathcal{R} c'$ et $b \mathcal{L} d$. Puisque $a' \mathcal{L} c'$ et $b \mathcal{R} d$, nous avons $a' \mathcal{K} c'$ et $b \mathcal{K} d$, et ceci entraîne que $a' = c'$ et $b = d$.

Nous désignerons les éléments de R par $a, b, c, \dots$ et ceux de L par $a', b', c', \dots$. Mais si, par exemple, a et a' apparaissent simultanément dans une démonstration, nous supposerons toujours que $a \perp a'$. Suivant la proposition 3, nous pouvons décrire les éléments d'un demi-groupe S bisimple avec 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$ par les "coordonnées" (a', b) , $a' \in L$ et $b \in R$.

2. Structure d'un demi-groupe bisimple unipotent à gauche avec élément neutre et sans éléments inversibles $\neq 1$.

Soit S un tel demi-groupe. Si $a \in R$ et si $a', a'' \in L$ et $a' \perp a$, $a'' \perp a$, alors $a' a$ et $a'' a$ sont idempotents dans L_a . Puisque S est unipotent à gauche, $a' a = a'' a$, et la proposition 3 entraîne que $a' = a''$. Ainsi chaque élément a de R a un inverse unique a' dans L . La partie (ii) de la proposition 1 montre que l'application $a \mapsto a'$ de R dans L est un anti-homomorphisme. Le noyau K de cet anti-homomorphisme (c'est-à-dire la relation binaire sur R définie par $a K b$ si $a' = b'$) est une congruence en R , et R/K est anti-isomorphe à L . Nous remarquons que $a K 1$ entraîne que $a' = 1$, si bien que $a = aa' = 1$.

R est sous-demi-groupe de S simplifiable à droite

$$(ac = bc) \Rightarrow (a = acc' = bcc' = b).$$

De même, L est sous-demi-groupe de S simplifiable à gauche :

$$(c' a' = c' b') \Rightarrow (a' = cc' a' = cc' b' = b'),$$

où c est un élément quelconque de R inverse à c' . Par conséquent, R/K est simplifiable à droite.

Si $a \in R$, $a' a$ est l'unique idempotent appartenant à L_a . L'application $a \mapsto a' a$ est une bijection de R sur E_S . Elle est injective car $\mathcal{K}$ est l'égalité dans notre cas, et elle est surjective car, si $e \in E_S$, il existe a dans $R \cap L_e$ puisque S est bisimple, si bien que $a' a = e$. Nous transportons l'opération binaire de E_S à R au moyen de cette bijection, et nous la noterons avec $(\circ)$. Ainsi, si $a, b, c \in R$,

$$(2.1) \quad (a \circ b = c) \iff ((a' a)(b' b) = c' c).$$

Nous emploierons cette formule souvent sous la forme équivalente

$$(2.2) \quad (a \circ b)' (a \circ b) = (a' a)(b' b).$$

Nous remarquerons que $a' = b'$ si, et seulement si, $a' a \mathcal{R} b' b$, et par suite,

$$(2.3) \quad a \mathcal{R}(\circ) b \iff a K b,$$

où $\mathcal{R}(\circ)$ désigne la relation $\mathcal{R}$ de Green sur la bande $R(\circ)$. Ainsi, K est identique à la relation $\mathcal{R}(\circ)$, et par conséquent $(a K b) \implies (a \circ b = b)$. Nous remarquons aussi que $\mathcal{R}(\circ) = \mathcal{Q}(\circ)$ dans notre cas, et si $E_S = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ est la décomposition de la bande E_S en un demi-treillis Y de bandes rectangulaires, alors $a K b$ si, et seulement si, a et b appartiennent à la même composante E_α .

Plus tard, nous commencerons par prendre un ensemble R muni de deux opérations binaires, $(.)$ et $(\circ)$, qui satisfont aux axiomes suivants :

(I) $R(.)$ est un demi-groupe, simplifiable à droite, possédant un élément neutre 1 qui est le seul élément inversible ($ab = ba = 1 \implies a = b = 1$).

(II) $R(\circ)$ est une bande unipotente à gauche (c'est-à-dire, pour laquelle $\mathcal{R}(\circ) = \mathcal{Q}(\circ)$), et pour laquelle le même élément 1 est élément neutre.

Écrivons K pour $\mathcal{R}(\circ)$. Alors $a K b$ entraîne que $a \circ b = b$ et $b \circ a = a$. Puisque la relation $\mathcal{Q}$ dans une bande est une congruence, K est une congruence dans $R(\circ)$.

(III) K est aussi une congruence dans $R(.)$, et le demi-groupe quotient R/K est simplifiable à droite.

(IV) $(a \circ b)c = ac \circ bc$ (pour tous $a, b, c \in R$).

(V) A chaque paire d'éléments a, b de R correspond un élément $y \in R$ tel que

$$a \circ c = yc,$$

pour chaque $c \in R$ tel que $b K c$.

Si nous commençons par un demi-groupe S bisimple unipotent à gauche, avec élément neutre 1, qui est le seul élément inversible, si R est la $\mathcal{R}$ -classe de S contenant 1, et si nous définissons $(\circ)$ dans R selon (2.1), alors les cinq propriétés (I)-(V) sont valables. D'ailleurs, nous avons déjà démontré (I)-(III).

Vérification de (IV). - Utilisant (2.2), la proposition 1, et $cc' = 1$, nous avons

$$\begin{aligned}(ac \circ bc)' (ac \circ bc) &= (ac)' (ac)(bc)' (bc) \\ &= c' a' acc' b' bc = c' a' ab' bc \\ &= c'(a \circ b)' (a \circ b)c \\ &= [(a \circ b)c]' [(a \circ b)c] .\end{aligned}$$

D'après la proposition 3, nous obtenons (IV).

Vérification de (V). - Utilisant la proposition 3, il existe x' dans L et y dans R tels $x ab' = x' y$. Si $b K c$, alors $b' = c'$, et (2.2) entraîne

$$(a \circ c)' (a \circ c) = a' ac' c = a' ab' c = (a' x')(yc) .$$

Par suite, $a \circ c = yc$, grâce à la proposition 3. En commençant par un système $R(., \circ)$, remplissant les conditions (I)-(V), nous définissons la relation σ dans le produit cartésien $R \times R$ par

$$(2.4) \quad ((a, b) \sigma (c, d)) \iff (a K c \text{ et } b = d) .$$

σ est visiblement relation d'équivalence. Notons par $(a, b)_\sigma$ la σ -classe contenant la paire (a, b) de $R \times R$, et posons $T = (R \times R)/\sigma$ de façon univoque.

L'élément y dans V est déterminé par a et b , puisque R est simplifiable à droite, selon I. Posons $y = a \star b$. En fait, $\star$ est une troisième opération binaire dans R définie par

$$(2.5) \quad a \circ b = (a \star b)b \quad (a, b \in R) .$$

D'après (V), nous avons

$$(2.6) \quad (b K c) \implies (a \star b = a \star c) .$$

Définissons maintenant une opération binaire dans T par

$$(2.7) \quad (a, b)_\sigma (c, d)_\sigma = ((c \star b)a, (b \star c)d)_\sigma .$$

THÉOREME A. - L'opération définie dans T par (2.7) est univoque et associative, et le demi-groupe T est bisimple et unipotent à gauche, et possède en outre un élément neutre $(1, 1)_\sigma$ qui est le seul élément inversible. La R -classe de T contenant $(1, 1)_\sigma$ est isomorphe à $R(., \circ)$, et la bande E_T des idempotents est isomorphe à $R(\circ)$.

Inversement, si S est un demi-groupe bisimple et unipotent à gauche, possédant un élément neutre 1 qui est le seul élément inversible de S , si R est la R -classe contenant 1 , et si nous définissons $(.)$ dans R par (2.2), alors le système $R(., \circ)$ remplit les conditions (I)-(V), et le demi-groupe $T = (R \times R)/\sigma$, défini comme ci-dessus, est isomorphe à S .

Nous nous bornons à la démonstration de la proposition inverse. Nous avons déjà

démontré la validité des conditions (I)-(V), et il reste à montrer que l'application $\theta : T \rightarrow S$, définie par

$$(2.8) \quad (a, b)_\sigma \theta = a' b,$$

est un isomorphisme.

D'abord, θ est univoque, car si $(a, b)_\sigma = (c, d)_\sigma$, alors $a K c$ et $b = d$, ainsi $a' = c'$, et enfin $a' b = c' d$. θ est surjective, selon la proposition 3. Pour vérifier qu'elle est injective, supposons $a' b = c' d$. Alors, utilisant une fois de plus la proposition 3, $a' = c'$ et $b = d$, c'est-à-dire $a K c$ et $b = d$, d'où $(a, b)_\sigma = (c, d)_\sigma$.

Pour montrer que θ est un homomorphisme, soient $(a, b)_\sigma$ et $(c, d)_\sigma$ deux éléments quelconques de T . D'après (2.), $b \circ c = (b * c)c$. Comme dans une bande quelconque, $(b \circ c) \cap (c \circ b)$, ceci entraîne $(b \circ c) K (c \circ b)$ dans notre cas, c'est-à-dire

$$(b \circ c)' = (c \circ b)' = [(c * b)b]' = b'(c * b)'.$$

Suivant (2.2),

$$\begin{aligned} bc' &= b(b' bc' c)c' = b(b \circ c)' (b \circ c)c' \\ &= bb'(c * b)' (b * c)cc' = (c * b)' (b * c). \end{aligned}$$

Enfin,

$$\begin{aligned} [(a, b)_\sigma (c, d)_\sigma] \theta &= [(c * b)a, (b * c)d]_\sigma \theta \\ &= a'(c * b)' (b * c)d \\ &= a' bc' d \\ &= (a, b)_\sigma \theta \cdot (c, d)_\sigma \theta. \end{aligned}$$

3. Demi-groupes bisimples unipotents à gauche de type ω .

La construction de demi-groupes bisimples unipotents à gauche selon le théorème A n'est pas facile. Nous donnerons ici une méthode simple qui nous permettra de construire aisément beaucoup d'exemples.

On dit qu'une bande $E = \bigcup_{\alpha \in Y} E_\alpha$ est de type ω si Y est une chaîne infinie décroissante (anti-isomorphe à la chaîne $0 < 1 < 2 < \dots$ des entiers non négatifs). Ainsi, on peut écrire $E = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ avec $E_m E_n \subseteq E_k$, où $k = \max(m, n)$. On dit qu'un demi-groupe S orthodoxe est de type ω si la bande E_S est de type ω .

Soit S un demi-groupe bisimple, unipotent à gauche, de type ω , avec élément neutre 1 qui est le seul élément inversible de S . Posons $E_S = \bigcup_{n=0}^{\infty} E_n$ comme ci-dessus. Notons que $E_0 = \{1\}$. Chaque E_n est contenu dans une $\mathcal{R}$ -classe R_n de S . Soit $L \cap R_1 = \{t\}$. On peut alors démontrer sans difficulté que

$$L \cap R_n = \{t^n\}.$$

Par conséquent, $L = \{1, t, t^2, \dots, t^n, \dots\}$. Posons $t^0 = 1$.

Soit $a \in R$. Alors $a' \in L$, et il existe un entier non négatif unique tel que $a' = t^n$. Nous écrivons $n = a\delta$ (le "degré" de a). Si $b \in R$, $b' = t^m$, ainsi $m = b\delta$, alors $(ab)' = b'a' = t^{m+n}$, d'où nous avons

$$(3.1) \quad (ab)\delta = m + n = a\delta + b\delta.$$

Nous appelons fonction de degré en R un homomorphisme $\delta : R \rightarrow N^0$ (où N^0 désigne le demi-groupe additif des entiers non négatifs) qui est surjective et pour laquelle $(a\delta = 0) \Rightarrow (a = 1)$. Nous voyons que la fonction δ définie ci-dessus est une fonction de degré en R .

Pour un élément a de $R \setminus 1$, nous définissons $a\mu = at$. Soit $n = a\delta$ (> 0 puisque $a \neq 1$). Alors $a' = t^n$, et $1 = aa' = at^n = (at)t^{n-1}$. Par conséquent, $a\mu = at \in R$, $(a\mu)' = t^{n-1}$, et

$$(3.2) \quad (a\mu)\delta = (a\delta) - 1.$$

De plus, $(ab)\mu = (ab)t = a(bt) = a(b\mu)$, si $b \in R \setminus 1$; ceci démontre que μ est une translation à droite de $R \setminus 1$ dans R .

Puisque $at^{a\delta} = 1$, nous avons

$$(3.3) \quad (t^m a).(t^n b) = \begin{cases} t^{m+n-a\delta} b & \text{si } a\delta \leq n, \\ t^m (a\mu^n) b & \text{si } a\delta > n. \end{cases}$$

THÉOREME B. - Soit R un demi-groupe simplifiable à droite, avec élément neutre 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$. Soit $\delta : R \rightarrow N^0$ une fonction de degré en R . Soit $\mu : R \setminus 1 \rightarrow R$ une translation à droite qui réduit le degré d'une unité (équation (3.2)). Soit $T = N \times R$, et définissons une opération binaire dans T par

$$(3.4) \quad (m, a)(n, b) = \begin{cases} (m + n - a\delta, b) & \text{si } a\delta \leq n, \\ (m, (a\mu^n)b) & \text{si } a\delta > n. \end{cases}$$

Alors T est un demi-groupe bisimple, unipotent à gauche, de type ω , avec élément neutre 1 et sans éléments inversibles $\neq 1$. Inversement, tout demi-groupe avec ces propriétés est isomorphe à un demi-groupe $T = N \times R$ construit de cette façon.

En fait, nous avons démontré la proposition inverse, en n'ajoutant qu'une comparaison de (3.3.) avec (3.4) montre que l'application $(m, a) \mapsto t^m a$ est un isomorphisme de T sur S . Nous laisserons de côté la démonstration de la proposition directe, qui est cependant assez simple.

Prenons maintenant $R = \mathfrak{S}_X^1$, le demi-groupe libre engendré par un ensemble X , avec élément neutre 1 (le mot vide). Une application $\delta : X \rightarrow N$ quelconque telle que $x\delta = 1$ pour au moins un $x \in X$ peut être étendue uniquement à une fonction de degré en R , de la façon habituelle. Ayant choisi une telle δ , une application $\mu : X \rightarrow R$ quelconque qui réduit le degré d'une unité peut être étendue uniquement à une translation à droite de $R \setminus 1$ dans R par la prescription

$$(3.5) \quad (x_1 x_2 \dots x_{n-1} x_n) \mu = (x_1 x_2 \dots x_{n-1}) (x_n \mu) .$$

Prenons un cas spécial : soit $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ un ensemble infini dénombrable. Définissons δ par $x_n \delta = n$ ($n = 1, 2, \dots$). Alors il faut définir $x_1 \mu = 1$ et $x_2 \mu = x_1$. Mais, pour $n > 2$, il y a au moins deux choix distincts pour $x_n \mu$, par exemple

$$x_n \mu = x_{n-1} \quad \text{et} \quad x_n \mu = x_1^{n-1} .$$

Deux translations μ et μ' distinctes donnent deux demi-groupes T et T' non isomorphes, parce que (grâce à notre choix de δ) le seul automorphisme de R qui laisse invariant le degré est l'identité. Ceci démontre notre proposition finale.

PROPOSITION 4. - Il existe un ensemble non dénombrable de demi-groupes bisimples unipotents à gauche, avec élément neutre 1, qui sont non isomorphes deux à deux, tel que tous ces demi-groupes ont la même R , la même L , et la même application d'inverse $a \mapsto a'$ de R sur L .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BAILES (Gordon L.). - Right inverse semigroups, Doctoral dissertation, Clemson University, 1972.
- [2] CLIFFORD (A. H.). - A class of d -simple semigroups, Amer. J. Math., t. 75, 1953, p. 547-556.
- [3] CLIFFORD (A. H.). - The structure of bisimple orthodox semigroups as ordered pairs, Semigroup Forum, t. 5, 1972, p. 127-136.
- [4] CLIFFORD (A. H.). - The structure of bisimple left unipotent semigroups as ordered pairs, Semigroup Forum (to appear).
- [5] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol 1 and 2. - Providence, American mathematical Society, 1961 and 1967 (Mathematical Surveys, 7).
- [6] EWING (Edson W.). - Contributions to the study of regular semigroups, Doctoral Dissertation, University of Kentucky, 1971.
- [7] HALL (T. E.). - On orthodox semigroups and uniform and antiuniform bands, J. of Algebra, t. 16, 1970, p. 204-217.
- [8] MUNN (W. D.). - Uniform semilattices and bisimple inverse semigroups, Quarterly J. Math., Oxford Series, t. 17, 1966, p. 151-159.
- [9] MUNN (W. D.). - Fundamental inverse semigroups, Quarterly J. Math., Oxford Series, t. 21, 1970, p. 157-170.
- [10] MUNN (W. D.). - 0-Bisimple inverse semigroups, J. of Algebra, t. 15, 1970, p. 570-588.
- [11] REILLY (N. R.). - Bisimple inverse semigroups, Trans. Amer. math. Soc., t. 132, 1968, p. 101-114.
- [12] REILLY (N. R.) and SCHEIBLICH (H. E.). - Congruences on regular semigroups, Pacific J. Math., t. 23, 1967, p. 349-360.
- [13] VENKATESAN (P. S.). - Right (left) inverse semigroups (to appear).
- [14] VENKATESAN (P. S.). - Bisimple left inverse semigroups, Semigroup Forum, t. 4, 1972, p. 34-45.

- [15] WARNE (R. J.). - $\mathcal{L}$ -unipotent semigroups, Nigerian J. Sc. (to appear).
- [16] WARNE (R. J.). - ωY - $\mathcal{L}$ -unipotent semigroups (to appear).
- [17] WARNE (R. J.). - On the structure of regular bisimple semigroups, Tamkang Math. J. (to appear).
- [18] WARNE (R. J.). - Some structure theorems for regular semigroups, Semigroup Forum (to appear).

Alfred H. CLIFFORD
Department of Mathematics
Tulane University
NEW ORLEANS, La 70118 (Etats-Unis)
