

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

ALAIN GERENTE

Compléments sur la structure des demi-groupes duaux

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 25, n° 2 (1971-1972),
exp. n° J11, p. J1-J15

http://www.numdam.org/item?id=SD_1971-1972__25_2_A11_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1971-1972, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMPLÉMENTS SUR LA STRUCTURE DES DEMI-GROUPES DUAUX

par Alain GERENTE

Les notations utilisées ici sont celles de [3], et nous renvoyons le lecteur à cet article, ainsi qu'à [5], pour un rappel sur la définition et les propriétés des demi-groupes duaux utilisées ici sans démonstration.

Si S est un demi-groupe dual, S contient au moins un idéal maximal ; nous étudions, dans le paragraphe 1, la structure des demi-groupes duaux contenant un seul idéal maximal ; si S est un tel demi-groupe, et si on note $E^\times$ l'ensemble des idempotents non nuls de S , les sous-demi-groupes eSe , où e parcourt $E^\times$, sont des demi-groupes duaux isomorphes entre eux (corollaire 1.5) ; de plus, la structure de S est entièrement déterminée par la donnée de $E^\times$ et de eSe ; en fait, S est isomorphe à $\mathcal{M}^0(eSe ; E^\times, E^\times ; \Delta)$ (théorème 1.2) ; réciproquement, si S est isomorphe à $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$, où I est un ensemble non vide et où T est un demi-groupe dual avec élément neutre, alors S est dual avec un seul idéal maximal (corollaire 1.7). Nous voyons ainsi que les demi-groupes duaux avec élément neutre jouent le même rôle, pour les demi-groupes duaux ayant un seul idéal maximal, que les groupes pour les demi-groupes de Brandt.

Si S est un demi-groupe, l'ensemble $\bar{R}$ (resp. $\bar{L}$) des $\mathcal{R}$ -classes (resp. $\mathcal{L}$ -classes) de S est muni de la relation d'ordre classique 0_R (resp. 0_L) à savoir, si a et b sont des éléments de S , $R_a \leq R_b$ (resp. $L_a \leq L_b$) si et seulement si $a \cup aS \subseteq b \cup bS$ (resp. $a \cup Sa \subseteq b \cup Sb$). Le paragraphe 2 est consacré à l'étude des relations 0_R et 0_L lorsque S est dual. Ces notions nous permettent de donner un certain nombre de conditions nécessaires pour qu'un demi-groupe soit l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre. Ce problème est important, car la construction de demi-groupes duaux avec élément neutre (donc des demi-groupes duaux avec idéal maximal unique) sera presque entièrement résolue lorsque nous connaîtrons des conditions nécessaires et suffisantes simples pour qu'un demi-groupe soit l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre.

1. Structure des demi-groupes duaux contenant un seul idéal maximal.

Un demi-groupe S est un demi-groupe de Brandt si, et seulement si, S est isomorphe à un demi-groupe de matrice de Rees $\mathcal{M}^0(G ; I, I ; \Delta)$, où G est un groupe avec zéro, I est un ensemble non vide, et $\Delta = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ est la $I \times I$ matrice ainsi définie :

$$\text{si } i \neq j, \quad a_{ij} = 0$$

$$\text{si } i = j, \quad a_{ij} = e \text{ élément neutre de } G.$$

Une généralisation de ce type de demi-groupe consiste à remplacer G par un demi-groupe T avec zéro et élément neutre e , Δ étant définie comme ci-dessus ; nous noterons $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$, ce demi-groupe de matrice de Rees ; d'autre part, considérons la loi de composition suivante sur $T \times I \times I$:

$$(1) \quad (a ; i, \lambda)(b ; j, \mu) = \begin{cases} (0 ; i, \mu) & \text{si } \lambda \neq j . \\ (ab ; i, \mu) & \text{si } \lambda = j . \end{cases}$$

Il est clair que $T \times I \times I$ est un demi-groupe, et que l'ensemble $\{0\} \times I \times I$ est un idéal de $T \times I \times I$; on vérifie, sans trop de difficultés, que

$$(T \times I \times I) / (\{0\} \times I \times I)$$

est isomorphe à $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$, d'où le lemme suivant.

LEMME 1.1. - Soient T un demi-groupe avec 0 et élément neutre e , I un ensemble non vide, $\Delta = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ la $I \times I$ matrice telle que $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, et $a_{ij} = e$ si $i = j$; on munit $T \times I \times I$ de la loi de composition définie ci-dessus en (1). Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) S est un demi-groupe isomorphe à $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$;

(B) S est un demi-groupe isomorphe à $(T \times I \times I) / (\{0\} \times I \times I)$;

un tel demi-groupe S est appelé demi-groupe de Brandt généralisé.

THÉOREME 1.2. - Un demi-groupe dual S ayant un seul idéal maximal est un demi-groupe de Brandt généralisé.

Soient e un idempotent non nul de S , $E^\times$ l'ensemble des idempotents non nuls de S ; nous allons construire un isomorphisme Φ de

$$(e S e \times E^\times \times E^\times) / (\{0\} \times E^\times \times E^\times)$$

sur S , $e S e \times E^\times \times E^\times$ étant muni de la loi de composition suivante :

$$(a ; i, f)(b ; g, h) = \begin{cases} (0 ; i, h) & \text{si } f \neq g . \\ (ab ; i, h) & \text{si } f = g . \end{cases}$$

Pour éviter toute confusion avec le zéro de S , nous noterons $\bar{0}$ le zéro de $(e S e \times E^\times \times E^\times) / (\{0\} \times E^\times \times E^\times)$.

Construction de Φ . - Il suit de l'hypothèse que $E^\times$ est contenu dans une seule $\mathcal{O}$ -classe de S , donc, pour tout idempotent f non nul et distinct de e , $L_e \cap R_f$ est non vide ; nous pouvons choisir un élément quelconque, noté q_f , dans $L_e \cap R_f$; q_f admet un inverse p_f dans $R_e \cap L_f$, d'où

$$p_f q_f = e \text{ et } q_f p_f = f \quad ([1] \text{ lemme 2.12 et théorème 2.20}) ;$$

enfin, posons $q_e = p_e = e$. Soit Φ l'application de $(e S e \times E^\times \times E^\times) / (\{0\} \times E^\times \times E^\times)$ dans S , ainsi définie

$$\begin{cases} \Phi(\overline{0}) = 0 ; \\ \text{Si } a \in eSe \setminus \{0\} \text{ et } (f, g) \in E^\times \times E^\times, \quad \Phi(a; f, g) = q_f ap_g . \end{cases}$$

Φ est injective : Remarquons d'abord que si a est un élément non nul de eSe , et si (f, g) appartient à $E^\times \times E^\times$, $\Phi(a; f, g) \neq 0$; en effet, $q_f ap_g$ appartient à $L_e aR_e$, c'est-à-dire D_a ([3] théorème 4d).

Considérons maintenant deux éléments non nuls de eSe , a et b , quatre éléments f, f', g, g' de $E^\times$ tels que $q_f g = q_{f'} bp_{g'}$; alors $q_f ap_g \neq 0$; compte tenu de la localisation de $q_f, q_{f'}, p_g, p_{g'}$, nous avons

$$fq_f = q_{f'}, f'q_{f'} = q_{f'}, p_g g = p_{g'}, p_{g'} g' = p_{g'} ;$$

donc $q_f ap_g$ appartient à $fSg \setminus \{0\}$, $q_{f'} bp_{g'}$ appartient à $f'Sg' \setminus \{0\}$, et $fSg \cap f'Sg'$ n'est pas réduit à $\{0\}$; d'où $f = f'$ et $g = g'$ ([5] lemme 5.1) ;

$$(q_f ap_g = q_{f'} bp_{g'}) \text{ entraîne } (p_f q_f ap_g q_g = p_{f'} q_{f'} bp_{g'} q_{g'}) ,$$

soit $eae = ebe$, c'est-à-dire $a = b$ et $(a; f, g) = (b; f', g')$.

Φ est surjective : Comme $\Phi(a; f, g)$ appartient à fSg (a dans $eSe \setminus \{0\}$ et (f, g) dans $E^\times \times E^\times$), il suffit de montrer que $\Phi(eSe \setminus \{0\}; f, g) = fSg \setminus \{0\}$. Si D est une $\mathcal{O}$ -classe non nulle de S , $D \cap eSe$ est non vide ([3] théorème 4), et $E^\times$ contenu dans une seule $\mathcal{O}$ -classe ; soit x dans $D \cap eSe$, $D \cap eSe = H_e \times H_e$ ([3] théorème 4e), donc $\Phi(D \cap eSe; f, g) = q_f H_e \times H_e p_g$; mais

$$q_f H_e = H_{q_f} = L_e \cap R_f \text{ et } H_e p_g = H_{p_g} = R_e \cap L_g \quad ([1] \text{ théorème 2.17}),$$

d'où

$$\Phi(D \cap eSe; f, g) = (L_e \cap R_f) \times (R_e \cap L_g) = D \cap fSg$$

puisque $exe = x$ ([3] théorème 4e) ; $\Phi(eSe \setminus \{0\}; f, g) = fSg \setminus \{0\}$ suit facilement.

Φ est un homomorphisme : Soient a et b deux éléments non nuls de eSe , f, g, h, i des idempotents non nuls de S , nous allons voir que

$$\Phi(a; f, g) \Phi(b; h, i) = \Phi[(a; f, g)(b; h, i)] .$$

Supposons $g \neq h$; $(a; f, g)(b; h, i) = \overline{0}$, d'où

$$\Phi[(a; f, g)(b; h, i)] = 0 ;$$

or $\Phi(a; f, g) \Phi(b; h, i) = q_f ap_g q_h bp_i = 0$, car $p_g q_h$ appartient à $SghS = \{0\}$. Supposons $g = h$;

$$\Phi(a; f, g) \Phi(b; g, i) = q_f ap_g q_g bp_i = q_f aebp_i = q_f abp_i = \Phi(ab; f, i) = \Phi[(a; f, g)(b; g, i)] .$$

Nous allons étudier maintenant sous quelles conditions sur T , $\pi^0(T; I, I; \Delta)$ est dual. Si S est dual et possède un idéal maximal unique, $\pi^0(eSe; E^\times; E^\times; \Delta)$ est dual, mais eSe n'est pas quelconque.

THÉORÈME 1.3. - Soient S un demi-groupe dual ayant un seul idéal maximal, e un idempotent non nul de S ; alors eSe est un demi-groupe dual.

Si A est une partie non vide de S , nous définissons l'annulateur à gauche de A dans eSe , $\ell^*(A)$, et l'annulateur à droite de A dans eSe , $r^*(A)$, par les propriétés suivantes :

$$\ell^*(A) = \{x \in eSe ; xA = 0\}, \quad r^*(A) = \{y \in eSe ; Ay = 0\}.$$

D'où

$$\ell^*(A) = \ell(A) \cap eSe \text{ et } r^*(A) = r(A) \cap eSe.$$

Soit L un idéal à gauche de eSe , nous allons démontrer successivement que L vérifie les propriétés suivantes :

- 1° $SL \cap eSe = L$;
- 2° $r(L) = r(SL)$;
- 3° $\ell^*[r(L)] = L$;
- 4° $\ell^*[r^*(L)] = \ell^*[r(L)]$.

Preuve du 1°. - Si x appartient à $SL \cap eSe$, il existe s dans S et ℓ dans L tels que $x = s\ell$; comme $ex = x$, $x = es\ell = es\ell$ et x appartient à $eSeL$, donc à L ; alors $SL \cap eSe \subseteq L$, et l'inclusion inverse est immédiate.

Preuve du 2°. - $(L \subseteq SL)$ entraîne $(r(L) \supseteq r(SL))$; soit x un élément de $r(L)$, $Lx = 0$, donc $SLx = 0$, et x appartient à $r(SL)$, d'où $r(L) = r(SL)$.
3° découle de 1° et 2°, car

$$\ell^*[r(L)] = \ell^*[r(SL)] = \ell[r(SL)] \cap eSe = SL \cap eSe = L.$$

Preuve du 4°. - $(r^*(L) \subseteq r(L))$ entraîne $(\ell^*[r^*(L)] \supseteq \ell^*[r(L)])$, donc il suffit d'établir que $\ell^*[eSe \cap r(L)] = \ell^*[r^*(L)] \subseteq \ell^*[r(L)]$, c'est-à-dire que, si x est un élément de eSe tel que $x[eSe \cap r(L)] = 0$, alors $xr(L) = 0$; mais $S = \bigcup (fS ; f \in E^x)$ ([5] théorème 3.10), et $x(fS) = 0$ pour tout idempotent f distinct de e (car $xe = x$) ; il suffit donc de montrer que $x[r(L) \cap eS] = 0$. Soient y un élément non nul de $r(L) \cap eS$, g l'idempotent tel que

$yg = y$; $\{h \in E^x ; Sh \cap D_y \text{ non vide}\}$ est égal à $E \cap D_g$ ([3] théorème 4a) ; compte tenu de l'hypothèse faite sur S , e appartient à $E \cap D_g$, donc $D_y \cap Se$, et en particulier $R_y \cap Se = R_y \cap eSe$ sont non vides ; soit a un élément de $R_y \cap eSe$, il existe α dans S tel que $y = a\alpha$; $R(L)$, étant un idéal à droite, contient R_y , donc a appartient à $R(L) \cap eSe$; alors $xa = 0$, d'où

$$xy = xa\alpha = 0 \text{ et } x[r(L) \cap eS] = 0.$$

Finalement si L est un idéal à gauche de eSe , il suit des 3° et 4° que $\ell^*[r^*(L)] = L$; on montrerait de même que, pour tout idéal à droite R de eSe , $r^*[\ell^*(R)] = R$; eSe n'étant pas réduit à 0 (car $e \neq 0$) est un demi-groupe dual.

LEMME 1.4. - Soient S un demi-groupe, e et f deux idempotents de S appartenant à la même $\mathcal{Q}$ -classe ; alors les demi-groupes $e S e$ et $f S f$ sont isomorphes.

Comme $e \mathcal{Q} f$, $R_e \cap L_f$ est non vide ; choisissons un élément a dans $R_e \cap L_f$; il existe un inverse a' de a dans $L_e \cap R_f$, d'où $aa' = e$ et $a'a = f$ ([1] lemme 2.12 et théorème 2.20) ; soit ϕ l'application définie sur $e S e$ telle que $\phi(x) = a' x a$; comme $af = a$ et $fa' = a'$, $\phi(e S e) \subseteq f S f$.

ϕ est injective : Soient x et y deux éléments de $e S e$ tels que $a'xa = a'ya$, alors,

$$aa' xaa' = aa' yaa' ,$$

d'où $exe = eye$, c'est-à-dire $x = y$.

ϕ est surjective : Si z appartient à $f S f$, $z = fzf = a' aza' a = \phi(aza')$; or aza' appartient à $e S e$ puisque $ea = a$ et $a'e = a$.

ϕ est un homomorphisme : Soient x et y , deux éléments de $e S e$;

$$\phi(x) \phi(y) = a' xaa' ya = a' xeya = a' xya = \phi(xy) .$$

Donc ϕ est un isomorphisme de $e S e$ sur $f S f$.

De ce lemme et du théorème précédent, on déduit immédiatement le résultat suivant.

COROLLAIRE 1.5. - Soient S un demi-groupe dual ayant un seul idéal maximal, e et f deux idempotents non nuls de S ; alors $e S e$ et $f S f$ sont des demi-groupes duaux isomorphes.

THÉORÈME 1.6. - Soient T un demi-groupe avec zéro et élément neutre e , I un ensemble non vide, $\Delta = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ la $I \times I$ matrice suivante : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ij} = e$ si $i = j$; alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) T est un demi-groupe dual,
- (B) $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$ est un demi-groupe dual,
- (C) $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$ est un demi-groupe dual ayant un idéal maximal unique.

Enfin, si (A) est vérifiée, l'ensemble des idempotents non nuls de $\mathcal{M}^0(T; I, I; \Delta)$ est équipotent à I , et si $\bar{f}$ est un idempotent non nul de $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$, $\bar{f}[\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)] \bar{f}$ est isomorphe à T .

Compte tenu du lemme 1.1, nous pouvons, dans la démonstration, remplacer $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$ par $\bar{T} = (T \times I \times I) / (\{0\} \times I \times I)$; nous noterons $\bar{0}$ le zéro de $\bar{T}$, $\bar{\mathcal{L}}$, $\bar{\mathcal{R}}$, $\bar{\mathcal{Q}}$ les $\mathcal{L}$ -équivalence de Green, $\mathcal{R}$ -équivalence de Green et $\mathcal{Q}$ -équivalence de Green sur $\bar{T}$.

Pour simplifier nous écrirons $(a ; i, j)$ les éléments de $\bar{T}$ ($a \in T$; $(i, j) \in I \times I$) en convenant que les éléments $(0 ; i, j)$ [$(i, j) \in I \times I$]

sont égaux, et représentent le zéro de $\bar{T}$, $\bar{0}$. Si C et D sont deux parties de I , et B une partie de T contenant le zéro de T , nous noterons $(B; C, D)$ l'ensemble

$$\{\bar{0}\} \cup \{(x; c, d); x \in B \setminus \{0\}, c \in C, d \in D\}.$$

(B) $\Rightarrow$ (C) : On voit facilement que $\{(e; i, i); i \in I\}$ est l'ensemble des idempotents non nuls de $\bar{T}$; soient $(e; i, i)$ et $(e; j, j)$ deux d'entre eux ($i \in I, j \in I$); alors :

$$(e; i, i) \bar{R} (e; i, j), \text{ car } \begin{cases} (e; i, i)(e; i, j) = (e; i, j) \\ (e; i, j)(e; i, i) = (e; i, i) \end{cases}$$

$$(e; j, j) \bar{L} (e; i, j), \text{ car } \begin{cases} (e; i, j)(e; j, j) = (e; i, j) \\ (e; j, i)(e; i, j) = (e; j, j) \end{cases}$$

donc $(e; i, i) \bar{O} (e; j, j)$, c'est-à-dire que deux idempotents non nuls quelconques de $\bar{T}$ sont $\bar{O}$ -équivalents; il est clair que si $\bar{T}$ est dual, $\bar{T}$ possède un idéal maximal unique.

(C) $\Rightarrow$ (A) : soit $(e; i, i)$ un idempotent de $\bar{T}$ ($i \in I$); alors

$$(e; i, i) \bar{T} (e; i, i) = (e T e; i, i) = (T; i, i);$$

l'application de $(T; i, i)$ sur T qui à (x, i, i) associe x est clairement un isomorphisme de $(T; i, i)$ sur T ; $(T; i, i)$ étant dual d'après le théorème 1.3, il en est de même de T .

(A) $\Rightarrow$ (B) : soit A [resp. $\bar{A}$] une partie de T [resp. $\bar{T}$], nous noterons $\ell(A)$ et $r(A)$ [resp. $\bar{\ell}(\bar{A})$ et $\bar{r}(\bar{A})$] l'annulateur à gauche et l'annulateur à droite de A dans T [resp. de $\bar{A}$ dans $\bar{T}$]; si $(a; i, j)$ est un élément non nul de $\bar{T}$, on voit facilement que l'idéal à gauche engendré par $(a; i, j)$ dans $\bar{T}$ n'est autre que $(Ta; I, j)$.

Dans la suite de la démonstration, $\bar{L}$ désignera un idéal à gauche de $\bar{T}$, et pour tout élément i de I , nous poserons $\bar{L}_i = \bar{L} \cap (T; I, i)$; $(T; I, i)$ est clairement un idéal à gauche de $\bar{T}$, donc $\bar{L}_i$ est un idéal à gauche de $\bar{T}$. Compte tenu de la forme des idéaux principaux à gauche de $\bar{T}$, $\bar{L}_i$ peut se mettre sous la forme $(L_i; I, i)$, où L_i est un idéal à gauche de T . Nous allons montrer que $\bar{\ell}[\bar{r}(\bar{L}_i)] = \bar{L}_i$.

$$\bar{r}(\bar{L}_i) \setminus \{\bar{0}\} = \{(a; j, k); a \in T \setminus \{0\}; (j, k) \in I \times I; (L_i; I, i)(a; j, k) = \bar{0}\};$$

- si $i \neq j$, $(L_i; I, i)(a; j, k) = \bar{0}$, donc $(T; I \setminus \{i\}, I) \subseteq \bar{r}(\bar{L}_i)$;
- si $i = j$, $(L_i; I, i)(a; i, k) = \bar{0}$ si, et seulement si, $L_i a = 0$, c'est-à-dire si a appartient à $r(L_i)$, d'où :

$$\bar{r}(\bar{L}_i) = (T; I \setminus \{i\}, I) \cup (r(L_i); i, I).$$

Soit maintenant $(b; m, n)$ un élément non nul de $\bar{\ell}[\bar{r}(\bar{L}_i)]$ ($b \in T \setminus \{0\}; (m, n) \in I \times I$). Alors

$$(\alpha) \quad (b ; m , n)(T ; I \setminus \{i\} , I) = \overline{0}$$

et

$$(\beta) \quad (b ; m , n)(r(L_i) ; i , I) = \overline{0} .$$

Si $n \neq i$, n appartient à $I \setminus \{i\}$ et (α) entraîne $(b ; m , n)(T ; n , I) = \overline{0}$, c'est-à-dire $(bT ; m , I) = \overline{0}$, donc $bT = 0$; T étant dual, b serait nul contrairement à l'hypothèse faite sur b .

Donc $n = i$ et (β) entraîne $(b ; m , i)(r(L_i) ; i , I) = \overline{0}$, c'est-à-dire $(br(L_i) ; m , I) = \overline{0}$, donc $br(L_i) = 0$; b appartient à $\ell[r(L_i)]$ c'est-à-dire L_i , et $\ell[\overline{r(L_i)}] \subseteq (L_i ; I , i) = \overline{L_i}$; comme l'inclusion $\overline{L_i} \subseteq \ell[\overline{r(L_i)}]$ est vraie dans un demi-groupe quelconque, $\ell[\overline{r(L_i)}] = \overline{L_i}$.

Nous allons établir maintenant que $\ell[\overline{r(L)}] = \overline{L}$; il suffit clairement de montrer que $\ell[\overline{r(L)}] \subseteq \overline{L}$. Si $\overline{L}$ est réduit à $\{\overline{0}\}$, $\overline{r(L)} = \overline{T}$ et $\ell[\overline{r(L)}] = \ell(\overline{T}) = \{\overline{0}\}$, car si $(a ; i , j)$ est un élément de $\overline{T}$ tel que $(a ; i , j)(T ; I , I) = \overline{0}$, nous avons $aT = 0$, donc $a = 0$, T étant dual. Supposons $\overline{L}$ non réduit à $\{\overline{0}\}$, alors $J = \{i \in I ; \overline{L_i} \neq \{\overline{0}\}\}$ est non vide; $\overline{L} = \bigcup_{j \in J} \overline{L_j}$, d'où

$$\overline{r(L)} = \overline{r(\bigcup_{j \in J} \overline{L_j})} = \bigcap_{j \in J} \overline{r(L_j)} \quad ([5] \text{ page } 461) ;$$

nous avons vu ci-dessus que :

$$\overline{r(L_j)} = (T ; I \setminus \{j\} , I) \cup (r(L_j) ; j , I) ,$$

donc $\bigcap_{j \in J} \overline{r(L_j)}$ est égal à

$$[\bigcup_{i \in I \setminus J} (T ; i , I)] \cup [\bigcup_{j \in J} (r(L_j) ; j , I)] .$$

Soit $(a ; k , \ell)(a \in T \setminus \{0\} ; (k , \ell) \in I \times I)$ un élément non nul de $\ell[\overline{r(L)}]$; alors

$$(\gamma) \quad (a ; k , \ell)(T ; i , I) = \overline{0} \text{ pour tout } i \text{ de } I \setminus J$$

et

$$(\delta) \quad (a ; k , \ell)(r(L_j) ; j , I) = \overline{0} \text{ pour tout } j \text{ de } J .$$

Si ℓ appartenait à $I \setminus J$, (γ) entraînerait $(a ; k , \ell)(T ; \ell , I) = \overline{0}$, c'est-à-dire $aT = 0$, en contradiction avec a non nul et T dual.

Donc ℓ appartient à J , et il découle de (δ) que :

$$(a ; k , \ell)(r(L_\ell) ; \ell , I) = \overline{0} ,$$

c'est-à-dire $ar(L_\ell) = 0$, donc appartient à $\ell[r(L_\ell)] = L_\ell$, et $(a ; k , \ell)$ est un élément de $\overline{L}_\ell$, donc de $\overline{L}$, et nous avons démontré que, pour tout idéal à gauche $\overline{L}$ de $\overline{T}$, $\ell[\overline{r(L)}] = \overline{L}$; un raisonnement analogue montrerait que, pour tout idéal à droite $\overline{R}$ de $\overline{T}$, $\overline{r[\ell(R)]} = \overline{R}$; $\overline{T}$ n'étant pas réduit à $\{\overline{0}\}$ est dual.

Le reste du théorème se démontre sans difficulté. Du lemme 1.1 et des théorèmes 1.2 et 1.6, nous déduisons immédiatement le corollaire suivant.

COROLLAIRE 1.7. - Soit S un demi-groupe ; les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) S est dual et contient un unique idéal maximal,
- (B) S est isomorphe à un demi-groupe de matrices de Rees $\mathcal{M}^0(T ; I, I ; \Delta)$, où T est un demi-groupe dual avec élément neutre e , I est un ensemble non vide, et $\Delta = (a_{ij})_{i \in I, j \in I}$ est la $I \times I$ matrice suivante : $a_{ij} = 0$ si $i \neq j$, $a_{ij} = e$ si $i = j$,
- (C) S est isomorphe à un demi-groupe $(T \times I \times I)/(\{0\} \times I \times I)$, où T est un demi-groupe dual avec élément neutre, I est un ensemble non vide, et $T \times I \times I$ est muni de la loi de composition suivante :

Si $(a, b) \in T \times T$ et $(i, \lambda, j, \mu) \in I \times I \times I \times I$, alors :

$$(a ; i, \lambda)(b ; j, \mu) = \begin{cases} (0 ; i, \mu) & \text{si } \lambda \neq j ; \\ (ab ; i, \mu) & \text{si } \lambda = j . \end{cases}$$

2. Étude des $\mathcal{Q}$ -classes et des $\mathcal{J}$ -classes contenant deux $\mathcal{L}$ -classes ou deux $\mathcal{R}$ -classes comparables.

Les relations d'ordre partiel qui existent sur l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes et sur l'ensemble des $\mathcal{R}$ -classes d'un demi-groupe S ont été rappelées dans l'introduction. Nous allons introduire deux définitions :

DÉFINITION 2.1. - Une $\mathcal{J}$ -classe I d'un demi-groupe est dite stable à gauche (resp. stable à droite) si l'une des conditions suivantes, qui sont équivalentes, est vérifiée :

- (A) il n'existe pas, dans I , deux $\mathcal{L}$ -classes (resp. $\mathcal{R}$ -classes) distinctes et comparables,
- (B) l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes (resp. $\mathcal{R}$ -classes) contenues dans I admet un élément minimal.

Une $\mathcal{J}$ -classe stable de chaque côté est dite stable.

L'équivalence de (A) et (B) se démontre en utilisant la remarque qui suit le lemme 6.44 de [2]. Alors un demi-groupe est stable à gauche (resp. stable à droite, stable) si, et seulement si, chacune de ses $\mathcal{J}$ -classes est stable à gauche (resp. à droite, stable) (voir [2], p. 31-32).

DÉFINITION 2.2. - Une $\mathcal{Q}$ -classe D d'un demi-groupe est dite élémentaire à gauche (resp. à droite) si D ne contient pas deux $\mathcal{L}$ -classes (resp. $\mathcal{R}$ -classes) distinctes et comparables.

Une $\mathcal{Q}$ -classe élémentaire de chaque côté est dite élémentaire.

Alors un demi-groupe est élémentaire à gauche (resp. élémentaire à droite,

élémentaire) si chacune de ses $\mathcal{O}$ -classes est élémentaire à gauche (resp. à droite, élémentaire) (voir [2], p. 32).

Dans un demi-groupe quelconque, si D est une $\mathcal{O}$ -classe régulière et élémentaire d'un côté, D est élémentaire et est une $\mathcal{J}$ -classe (donc une J -classe stable) (voir [4]) ; si J est une $\mathcal{J}$ -classe stable, J est une $\mathcal{O}$ -classe (se démontre comme le début du théorème 6.45 de [2]). Cependant si D est une $\mathcal{O}$ -classe non régulière et non élémentaire à gauche, l'ensemble des $\mathcal{E}$ -classes contenues dans D peut admettre des éléments minimaux et maximaux, et si J est une $\mathcal{J}$ -classe non stable à gauche, l'ensemble des $\mathcal{E}$ -classes contenues dans J peut admettre des éléments maximaux. Nous allons voir que ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual et que d'autre part, il existe des conditions simples portant sur un élément a , permettant de savoir si D est élémentaire d'un côté et si J_a est stable d'un côté.

Dans un demi-groupe dual S , on voit facilement que toutes les $\mathcal{O}$ -classes régulières sont élémentaires, donc sont des $\mathcal{J}$ -classes stables ; S contient également des $\mathcal{J}$ -classes stables sans élément régulier ; on voit en effet sans difficulté que si N est un idéal $\mathcal{O}$ -minimal de S , $N \setminus \{0\}$ est une $\mathcal{J}$ -classe stable (pour prouver la stabilité, utiliser le lemme 6.4 de [5] et le fait que tout idéal contient un idéal $\mathcal{O}$ -minimal à gauche et un idéal $\mathcal{O}$ -minimal à droite). D'autre part, si une $\mathcal{J}$ -classe J_a (a dans S) vérifie $(J_a)^2 \cap J_a \neq \emptyset$, le facteur principal associé $J(a)/I(a)$ est $\mathcal{O}$ -simple ; dans ce cas où J_a n'est stable d'aucun côté, ou J_a est une $\mathcal{O}$ -classe régulière, donc est une $\mathcal{J}$ -classe stable (voir [3] corollaire 2.1).

Compte tenu de ce qui précède si une $\mathcal{O}$ -classe D_a est non élémentaire à gauche, a appartient à $S^\times \setminus N$, N étant la réunion des idéaux $\mathcal{O}$ -minimaux de S .

THÉOREME 2.3. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S , a un élément non nul de S , e et f les idempotents tels que $a = fa = ae$, D la $\mathcal{O}$ -classe de a . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) D est élémentaire à gauche [resp. à droite],
- (B) a n'appartient pas à $S^\times a(S \setminus S^\times)$ [resp. à $(S \setminus S^\times)aS^\times$],
- (C) a n'appartient pas à $(S \setminus H_f)aH_e$ [resp. $H_f a(S \setminus H_e)$].

(A) $\Rightarrow$ (B) : D étant élémentaire à gauche, supposons qu'il existe un élément x de $S^\times$ et un élément y de $S \setminus S^\times$ tels que $a = xay$; on voit facilement que y appartient à eS ([5] théorèmes 3.10 et 3.11), donc à $eS \cap (S \setminus S^\times) = R_e$; alors ay appartient à R_a ([3] théorème 4b) et $L_a \leq L_{ay}$; l'égalité $L_a = L_{ay}$ serait en contradiction avec x élément de $S^\times$ ([3] théorème 3c), donc D contient deux $\mathcal{E}$ -classes distinctes et comparables contrairement à l'hypothèse.

(B) $\Rightarrow$ (C) : Supposons qu'il existe x dans S et y dans H_e tels que $a = xay$; x appartient à $S \setminus S^\times$ d'après (B) ; alors

($f(ay) = ay$ et $x(ay) \neq 0$) entraîne (x élément de L_f) ([3] théorème 4c) ; si x appartenait à $L_f \setminus H_f$, $a = xay$ serait un élément de $D \setminus D \cap fSe$ ([3] théorème 4e), ce qui est absurde.

(C) $\Rightarrow$ (A) : Supposons D non élémentaire à gauche ; il existe un élément β de H_e tel que $L_a < L_{a\beta}$; donc il existe x dans S tel que $a = xa\beta$; a n'appartient pas à $L_{a\beta}$, x est un élément de $S^\times$ ([3] théorème 4c).

COROLLAIRE 2.4. - Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(A) D est élémentaire,

(B) $\{(x, y) ; x \in S, y \in S, a = xay\} \subseteq (S^\times \times S^\times) \cup (H_f \times H_e)$.

Ce corollaire se déduit du théorème précédent en remarquant que l'égalité $a = xay$ avec y dans $S \setminus S^\times$ et x dans S implique y dans H_e ; en effet, $xa(S \setminus [S^\times \cup R_e]) = 0$ ([3] théorème 4b) et, si, y appartenait à $R_e \setminus H_e$, xay serait un élément de $D \setminus D \cap Se$ ([3] théorème 4e), ce qui est absurde.

Dans un demi-groupe quelconque, l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes, contenues dans une $\mathcal{O}$ -classe non élémentaire à gauche, peut contenir des éléments minimaux ou maximaux. Ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual.

THÉORÈME 2.5. - Soient S un demi-groupe dual, et D une $\mathcal{O}$ -classe non élémentaire à gauche. Alors l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes de S contenues dans D ne possède ni élément minimal, ni élément maximal ; plus précisément, soient a un élément quelconque de D , et f l'idempotent de S tel que $af = a$; il existe un élément β de H_f tel que $L_a > L_{a\beta} > L_{a\beta^2} > \dots > L_{a\beta^n} > \dots$ soit une chaîne infinie strictement décroissante de $\mathcal{L}$ -classes de D , et tel que

$$L_a < L_{a\beta^{-1}} < L_{a\beta^{-2}} < \dots < L_{a\beta^{-n}} < \dots$$

soit une chaîne infinie strictement croissante de $\mathcal{L}$ -classes de D (β^{-1} étant l'inverse de β dans le groupe H_f).

Supposons D non élémentaire à gauche ; alors $0 \notin D$, et il existe deux éléments a et b dans D tels que $L_b < L_a$ et $a \mathcal{R} b$; soient f et g les idempotents de S tels que $af = a$, $bg = b$; supposons $g \neq f$; alors $Sb \subseteq Sg$, $Sa \subseteq Sf$ et $Sf \cap Sg = \{0\}$ entraînent $Sa \cap Sb = \{0\}$; a et b étant non nuls, L_a et L_b ne sont pas comparables contrairement à l'hypothèse. Donc $g = f$ et b appartient à $R_a \cap Sf$; alors il existe un élément β dans H_f tel que $b = a\beta$ ([3] théorème 4e).

Comme $L_b < L_a$, il existe un élément x de $S^\times$ tel que $b = xa$ ([3] théorème 4c) ; mais $b = a\beta = xa$ implique $b\beta = xa\beta = xb$; alors $b\beta$ appartient à Sb ,

donc $L_{b\beta} \leq L_b$; mais $L_{b\beta} = L_b$ impliquerait x dans $S \setminus S^\times$ ([3] théorème 3c), d'où $L_{b\beta} < L_b$, c'est-à-dire $L_{a\beta^2} < L_{a\beta} < L_a$; on montre de même que $L_{a\beta^n} < L_{a\beta^{n-1}}$ (n entier positif), donc $(L_{a\beta^n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une chaîne infinie strictement décroissante de $\mathcal{L}$ -classes de D inférieures à L_a ($a\beta^n$ appartient à D , d'après le théorème 4b de [3]). Soit β^{-1} l'inverse de β dans le groupe H_f ; $a\beta = xa$ implique $a = xa\beta^{-1}$, d'où $L_a \leq L_{a\beta^{-1}}$; $L_a = L_{a\beta^{-1}}$ étant en contradiction avec n élément de $S^\times$ ([3] théorème 3c), $L_a < L_{a\beta^{-1}}$; un argument analogue à ce qui précède montrerait que $(L_{a\beta^{-n}})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ est une chaîne infinie strictement croissante de $\mathcal{L}$ -classes de D supérieures à L_a .

La construction de ces deux chaînes de $\mathcal{L}$ -classes a été faite en supposant seulement qu'il existait une $\mathcal{L}$ -classe de D strictement inférieure à L_a ; il suffit donc, pour achever la démonstration du théorème, de montrer que D ne contient pas de $\mathcal{L}$ -classe minimale (parmi les $\mathcal{L}$ -classes de S contenues dans D). Soit L_c une $\mathcal{L}$ -classe de D différente de L_a ; nous pouvons prendre c dans R_a ; alors il existe un élément d de R_f tel que $c = ad.(a\beta = xa)$ entraîne $(a\beta d = xad = xc)$, d'où $L_{a\beta d} \leq L_c$; $L_{a\beta d} < L_c$ suit, comme ci-dessus, de x élément de $S^\times$, donc D ne contient pas de $\mathcal{L}$ -classe minimale.

COROLLAIRE 2.6. - Soient S un demi-groupe dual, e un idempotent non nul de S tel que le groupe maximal contenant e , H_e , soit un groupe périodique ; on note $E^\times$ l'ensemble des idempotents de la $\mathcal{Q}$ -classe de e ; alors toutes les $\mathcal{Q}$ -classes, contenues dans $SE^\times$ [resp. $E^\times S$, $E^\times SE^\times$], sont élémentaires à gauche (resp. élémentaires à droite, élémentaires).

On sait que les sous-groupes maximaux d'un demi-groupe T , contenus dans une même $\mathcal{Q}$ -classe, sont des groupes isomorphes (voir par exemple les théorèmes 2.22 et 2.25 de [1]). Donc si f est un élément de $E^\times$, H_f est un groupe périodique. Il suit du corollaire 4.2 de [3] que $SE^\times$ est réunion de $\mathcal{Q}$ -classes ; soit D l'une d'entre elles, il existe un élément a de D tel que $a = ae$ ([3] théorème 4a) ; supposons D non élémentaire à gauche, H_e contient un élément β tel que $(L_{a\beta^n})_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ soit une chaîne infinie strictement croissante de $\mathcal{L}$ -classes de D ; mais H_e étant périodique, il existe un entier positif m tel que $\beta^m = e$, d'où $a\beta^m = ae = a$, en contradiction avec $L_{a\beta^m} > L_a$.

COROLLAIRE 2.7. - Soit S un demi-groupe dual dont tous les sous-groupes maximaux sont des groupes périodiques ; alors S est élémentaire.

Nous allons faire une étude analogue pour les $\mathcal{J}$ -classes d'un demi-groupe dual.

THÉORÈME 2.8. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S , a un élément non nul de S , e et f les idempotents tels que $a = ae = fa$, et J la $\mathcal{J}$ -classe de a . Alors les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) J est stable à gauche [resp. à droite],
 (B) a n'appartient pas à $S^\times aS$ [resp. $SaS^\times$],
 (C) a n'appartient pas à $(S \setminus H_f)aS$ [resp. à $Sa(S \setminus H_e)$].

(B) $\Rightarrow$ (C) : Il suit du théorème 4c de [3] que $(S \setminus [S^\times \cup L_f])a = 0$; comme les éléments x de $(L_f \setminus H_f)a$ vérifient $fa = 0$, a ne peut pas appartenir à $(L_f \setminus H_f)aS$, donc à $[S \setminus (S^\times \cup H_f)]aS$.

(B) $\Rightarrow$ (A) : Supposons J non stable à gauche, L_a ne peut être minimale dans l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes contenues dans J (définition 2.1), donc il existe un élément b de J tel que $L_b < L_a$; b appartenant à $S_a \setminus L_a$, il existe z dans $S^\times$ tel que $b = za$ ([3] théorème 4c) ; comme $a \mathcal{J} b$, il y a deux éléments x et y dans S tels que $a = xby$, d'où $a = xzay$, et a appartient à $S^\times aS$.

(A) $\Rightarrow$ (B) : J étant stable à gauche, supposons qu'il existe x et y dans S tels que $a = xay$; on voit facilement que ay appartient à J et que $L_a \leq L_{ay}$; compte tenu de l'hypothèse faite sur J , $L_a = L_{ay}$, donc x appartient à $S \setminus S^\times$ ([3] théorème 3c).

COROLLAIRE 2.9. - Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (A) J est stable,
 (B) $\{(x, y) ; x \in S, y \in S, a = xay\} \subseteq (S \setminus S^\times) \times (S \setminus S^\times)$,
 (C) $\{(x, y) ; x \in S, y \in S, a = xay\} \subseteq H_f \times H_e$.

COROLLAIRE 2.10. - Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème précédent, J n'est stable d'aucun côté si, et seulement si, a appartient à $S^\times aS^\times$.

Si J n'est stable d'aucun côté, il existe x et y dans $S^\times$, α et β dans S tels que $a = x\alpha = \beta y$ (théorème 2.8). D'où $a = x\beta y\alpha$, et il est clair que $x\beta$ et $y\alpha$ appartiennent à $S^\times$. La réciproque suit immédiatement du théorème 2.8.

Un demi-groupe dual S non 0-simple contient toujours des éléments nilpotents autres que 0, car tout élément d'un idéal 0-minimal de S contenu dans $S^\times$ est nilpotent (voir [3], démonstration du corollaire 1.1) ; d'autre part, on voit facilement que tout élément nilpotent est contenu dans $S^\times$.

COROLLAIRE 2.11. - Soient S un demi-groupe dual, et $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S . Si $S^\times$ est l'ensemble des éléments nilpotents de S , S est stable.

Soit a un élément non nul de S . Supposons par exemple qu'il existe x dans $S^\times$ et y dans S tels que $a = xay$, alors $a = x^n ay^n$ pour tout entier n . Soit m l'entier tel que $x^m = 0$, alors $a = x^m ay^m = 0$, donc a n'appartient pas à $S^\times aS$, et J_a est stable à gauche. On montrerait de même la stabilité à

droite.

COROLLAIRE 2.12. - Soient S un demi-groupe dual, J une $\mathcal{J}$ -classe stable à droite et non stable à gauche. Alors chaque $\mathcal{O}$ -classe contenue dans J est élémentaire à droite et non élémentaire à gauche.

Soit a un élément de J , a appartient à $S^\times aS$, donc il existe x dans $S^\times$ et y dans S tels que $a = xay$; mais y appartient à $S \setminus S^\times$, sinon a serait un élément de $S^\times aS^\times$, et J ne serait pas stable à droite; alors a appartient à $S^\times a(S \setminus S^\times)$ et la $\mathcal{O}$ -classe a ne peut être élémentaire à gauche.

D'où le corollaire suivant.

COROLLAIRE 2.13. - Soient S un demi-groupe dual, D une $\mathcal{O}$ -classe élémentaire de S , J la $\mathcal{J}$ -classe contenant D . Alors, ou bien J est stable, ou bien J n'est stable d'aucun côté; en particulier, un demi-groupe dual élémentaire est stable si, et seulement si, il est stable d'un côté.

Remarque. - On peut démontrer, en s'appuyant sur le théorème 4 de [3], qu'un demi-groupe dual, dont les sous-groupes maximaux sont triviaux, est élémentaire.

Dans un demi-groupe quelconque, l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes contenues dans une $\mathcal{J}$ -classe non stable à gauche ne contient pas d'élément minimal (voir définition 2.1), mais peut posséder des éléments maximaux (demi-groupe bicycle par exemple). Ce n'est pas le cas dans un demi-groupe dual.

COROLLAIRE 2.14. - Soient S un demi-groupe dual, J une $\mathcal{J}$ -classe non stable à gauche. Alors J ne contient pas de $\mathcal{L}$ -classe maximale parmi les $\mathcal{L}$ -classes de S contenues dans J .

Soit a un élément de J , a appartient à $S^\times aS$, donc il existe x dans $S^\times$ et y dans S tels que $a = xay$, d'où $L_a \leq L_{ay}$. x étant dans $S^\times$, $L_a < L_{ay}$ ([3] théorème 3c); il est clair que ay appartient à J , donc L_a n'est pas un élément maximal de l'ensemble des $\mathcal{L}$ -classes de S contenues dans J .

Nous avons vu au paragraphe précédent que la structure des demi-groupes duaux ayant un seul idéal maximal était entièrement déterminée par la structure des demi-groupes duaux avec élément neutre. Soit S un demi-groupe dual avec élément neutre, $S^\times$ son idéal maximal; $S/S^\times$ est isomorphe à $H_e \cup \{0\}$, donc S apparaît comme l'extension de $S^\times$ par un groupe avec zéro. La question se pose donc de savoir à quelles conditions un demi-groupe avec zéro et non réduit à $\{0\}$, T , est l'idéal maximal d'un demi-groupe dual avec élément neutre; un tel demi-groupe ne possède pas d'idempotents non nuls; de plus, l'ensemble des éléments a de T , tels que $aT = 0$, coïncide avec l'ensemble des éléments b de T tels que $Tb = 0$, et n'est pas réduit à $\{0\}$ (C'est l'unique idéal $\mathcal{O}$ -minimal du demi-groupe dual avec élément neutre construit à partir de T). Le théorème ci-dessous précise la structure des classes de Green de T .

THÉOREME 2.15. - Soient S un demi-groupe dual, $S^\times$ l'intersection des idéaux maximaux de S , a un élément non nul de $S^\times$; on note $D_a^\times$ et $J_a^\times$ la $\mathcal{O}$ -classe de a et la $\mathcal{J}$ -classe de a dans $S^\times$. Alors :

- (a) $D_a^\times = \{a\}$,
- (b) Si la $\mathcal{J}$ -classe de a dans S est stable d'un côté, $J_a^\times = \{a\}$,
- (c) Si la $\mathcal{J}$ -classe de a dans S n'est stable d'aucun côté, $J_a^\times = J_a$, et $J_a^\times$ est une $\mathcal{J}$ -classe de $S^\times$ non stable d'un côté, donc contenant une infinité d'éléments.

(a) Si la $\mathcal{L}$ -classe de a dans $S^\times$ n'était pas réduite à $\{a\}$, il existerait trois éléments b, x, y de $S^\times$ tels que $a = xb$ et $b = ya$, d'où l'égalité $a = xya$ avec xy élément de $S^\times$, ce qui est en contradiction avec le théorème 3a de [3]. On voit de même que la $\mathcal{R}$ -classe de a dans $S^\times$ est réduite à $\{a\}$, d'où $D_a^\times = \{a\}$.

(b) Supposons J_a stable d'un côté; si $J_a^\times$ contient un élément b distinct de a , a appartient à $S^\times b S^\times \cup S^\times b \cup b S^\times$, donc l'une des égalités suivantes est vérifiée :

$$1^\circ a = xby \quad (x \text{ et } y \text{ dans } S^\times);$$

$$2^\circ a = xb \quad (x \text{ dans } S^\times);$$

$$3^\circ a = by \quad (y \text{ dans } S^\times);$$

De même, b appartient à $S^\times a S^\times \cup S^\times a \cup a S^\times$, et nous avons soit

$$4^\circ b = zat \quad (z \text{ et } t \text{ dans } S^\times), \text{ soit}$$

$$5^\circ b = za \quad (z \text{ dans } S^\times), \text{ soit}$$

$$6^\circ b = at \quad (t \text{ dans } S^\times).$$

2° et 5° [resp. 3° et 6°] ne peuvent avoir lieu simultanément, sinon a et b appartiendraient à la même $\mathcal{L}$ -classe (resp. $\mathcal{R}$ -classe) de $S^\times$; alors, en combinant les égalités vérifiées, on voit que a appartient à $S^\times a S^\times$, ce qui contredit l'hypothèse faite (corollaire 2.10).

(c) Si J n'est stable d'aucun côté, a appartient à $S^\times a S^\times$; $S^\times a S^\times$ étant un idéal de S contenant a , $S^\times a S^\times = SaS \supseteq J_a$; $J_a^\times = J_a$ suit immédiatement. J_a n'étant pas stable à gauche, il existe b dans J_a tel que $a = xb$ avec x dans $S^\times$; les $\mathcal{L}$ -classes dans $S^\times$ étant triviales, la $\mathcal{L}$ -classe de a dans $S^\times$ est strictement inférieure à la $\mathcal{L}$ -classe de b dans $S^\times$, donc $J_a^\times$ n'est pas stable à gauche. On montre de même que $J_a^\times$ est non stable à droite.

- [1] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 1. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).
- [2] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. 2. - Providence, American mathematical Society, 1967 (Mathematical Surveys, 7).
- [3] GERENTE (A.). - Demi-groupes duaux, Séminaire Dubreil : Algèbre, 25e année, 1971/72, n° 12, 21 p.
- [4] GERENTE (A.). - $\mathcal{O}$ -classes régulières dans un demi-groupe, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 274, 1972, Série A, p. 1691-1694.
- [5] SCHWARZ (S.). - On the structure of dual semigroups, Czech. mat. J., t. 21, 1971, p. 461-483.

Alain GERENTE
Laboratoire de Mathématiques
Centre d'Enseignement supérieur
Boîte postale 847
97400 SAINT DENIS DE LA REUNION
