SÉMINAIRE DUBREIL.
ALGÈBRE ET THÉORIE
DES NOMBRES

PAULO RIBENBOIM

Longueurs de modules constructibles et valuations

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 16, p. 1-10
<http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A5_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
24e année, 1970/71, n° 16, 10 p.
7 et 8 juin 1971

LONGUEURS DE MODULES CONSTRUCTIBLES ET VALUATIONS

par Paulo RIBENBOIM

Introduction. - Le point de départ de ce travail a été l'étude de la notion abstraite de longueur (voir NORTHCOTT et REUFEL [1]).

Afin d'aborder les longueurs à valeurs dans un groupe abélien additif totalement ordonné (non nécessairement archimédien), on introduit la notion de module constructible.

Les longueurs valuatives sur un anneau intègre R correspondent à des valuations v du corps de fractions de R telles que $R \subseteq A_v$.

A chaque longueur λ telle que $\lambda(M) \neq \infty$ pour tout module constructible de torsion M , on associe un homomorphisme $\overline{\lambda}$ du groupe de Grothendieck $\mathcal{G}$ des R-modules de torsion constructibles.

Sur $\mathcal{G}$, on définit des relations de pré-ordre, déduites de façon naturelle des relations de monomorphisme et épimorphisme de modules. Alors $\overline{\lambda}$ peut être considéré comme un caractère du groupe pré-ordonné $\mathcal{G}$. Et réciproquement, tout caractère peut être ainsi obtenu.

En particulier, si $R = A_{v_0}$ est un anneau de valuation du corps K , il y a une bijection entre l'ensemble des valuations v de K , telles que $A_v \supseteq A_{v_0}$, et l'ensemble des caractères du groupe correspondant de Grothendieck pré-ordonné.

Ceci suggère que les caractères en question peuvent être envisagés comme des généralisations des valuations ; ils peuvent être définis, même lorsque R n'est pas un anneau intègre.

Les démonstrations des résultats indiqués ici sont en voie de publication au Canadian Journal of Mathematics.

1. Modules constructibles.

Définition 1. - Une chaîne

$$C : \quad M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_{s-1} \supset M_s = 0$$

de R-modules est une chaîne de construction de taille s pour le R-module M , lorsque $M_i/M_{i+1} \simeq R/I_i$ (comme R-modules), où I_i est un idéal de type fini de R

$(i = 0 , 1 , \ldots , s - 1)$.

Si M a une chaîne de construction, il est dit constructible.

La taille de construction $c(M)$ est le minimum des tailles de chaînes de construction de M .

(1a) Tout module constructible est de présentation finie, donc de type fini.

(1b) Si I est un idéal de type fini de R , $I \neq R$, alors R/I est constructible ; en particulier, R est constructible.

(1c) Si R est un anneau noethérien, alors tout R-module de type fini est constructible.

(1d) Soit R un anneau, tel que tout R-module cyclique est constructible. Alors R est noethérien.

Un sous-module ou un module quotient d'un module constructible n'est pas nécessairement constructible.

(1e) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, si M' , M'' sont constructibles, alors M est constructible.

(1f) Si M est constructible, alors $c(M) \leqslant \lambda(M)$ (longueur d'une suite de composition de M , s'il en existe, ou ∞).

(1g) Si tout idéal maximal de R est de type fini, et si M a une suite de composition, alors M est constructible, et $c(M) = \lambda(M)$.

Un module peut avoir une suite de composition et ne pas être constructible.

(1h) Soit N un sous-module du R-module M . Si $c(M) = 1$ et $c(M/N) = 1$, alors N est de type fini.

Définition 2. - Un R-module M est coprincipal, lorsque $M \simeq R/Ra$ (avec $a \in R$).

(1i) Soient R un anneau intègre, M un R-module monogène, N un sous-module de M . Si N et M/N sont coprincipaux, alors M est coprincipal.

(1j) Si $M \simeq R/Ra$, et si N est un sous-module de M tel que $M/N \simeq R/Rb$ ($b \in R$, b non-diviseur de zéro), alors $N \simeq R/Rc$, où $bc = a$.

R est un anneau de Bézout, lorsque tout idéal de type fini est principal.

(1k) Si R est un anneau de Bézout, tout sous-module de type fini N d'un module monogène M est encore monogène. Si, en outre, R est intègre, et M est coprincipal, alors N et M/N sont coprincipaux.

Soient M un R-module, et

$$(1) \qquad M = M_0 \supset M_1 \supset \dots \supset M_s \supset 0 \quad ,$$

$$(1') \qquad M = M'_0 \supset M'_1 \supset \dots \supset M'_r \supset 0 \quad ,$$

des chaînes de construction de M. Par le théorème de Schreier, ces chaînes ont des raffinements équivalents :

$$\begin{aligned}
(2) \quad M \supseteq M'_1 + M_1 \supseteq M'_2 + M_1 \supseteq \dots \supseteq M_1 & \\
&= M_1 \supseteq (M_1 \cap M'_1) + M_2 \supseteq (M_1 \cap M'_2) + M_2 \supseteq \dots \supseteq M_2 \\
&\dots \\
&= M_{s-1} \supseteq (M_{s-1} \cap M'_1) + M_s \supseteq (M_{s-1} \cap M'_2) + M_s \supseteq \dots \supseteq M_s \\
&= M_s \supseteq M_s \cap M'_1 \supseteq M_s \cap M'_2 \supseteq \dots \supseteq M_s \cap M'_r \supseteq 0 \quad ,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(2') \quad M \supseteq M_1 + M'_1 \supseteq M_2 + M'_1 \supseteq \dots \supseteq M'_1 & \\
&= M'_1 \supseteq (M'_1 \cap M_1) + M_2 \supseteq (M'_1 \cap M_2) + M'_2 \supseteq \dots \supseteq M'_2 \\
&\dots \\
&\supseteq M'_{r-1} \supseteq (M'_{r-1} \cap M_1) + M'_r \supseteq (M'_{r-1} \cap M_2) + M'_r \supseteq \dots \supseteq M'_r \\
&= M'_r \supseteq M'_r \cap M_1 \supseteq M'_r \cap M_2 \supseteq \dots \supseteq M_r \cap M'_s \supseteq 0 \quad .
\end{aligned}$$

(1ℓ) Si R est un anneau de Bézout intègre, alors (2) et (2') sont des chaînes de construction.

(1m) Si R est un anneau de Bézout intègre, si le R-module M et le sous-module M' sont constructibles, alors M/M' est constructible.

(1n) Si R est un anneau de Bézout intègre, si M' est un sous-module de M, si M et M/M' sont constructibles, alors M' est constructible.

(1σ) Si R est un anneau de Bézout intègre, et si tout R-module monogène est constructible, alors R est un anneau principal intègre.

(1p) Si R est un anneau noethérien, M un R-module constructible, et (1), (1'), des chaînes de construction de M, alors il existe des raffinements équivalents de (1), (1'), qui sont des chaînes de construction de M.

2. Longueurs de modules constructibles.

Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}(R)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de modules constructibles sur l'anneau R.

Soient Γ un groupe abélien additif totalement ordonné, et ∞ un symbole, tel que $\gamma < \infty$, $\gamma + \infty = \infty + \gamma = \infty$, pour tout $\gamma \in \Gamma$. Soit $\mathrm{Pos}(\Gamma) = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma \geqslant 0\}$.

Définition 3. - Une application $\lambda : \mathcal{C} \to \mathrm{Pos}(\Gamma) \cup \{\infty\}$ s'appelle une longueur sur R , lorsqu'elle vérifie les conditions suivantes :

(0) $\lambda(0) = 0$;

(1) Si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de modules constructibles, alors $\lambda(M) = \lambda(M') + \lambda(M'')$;

(2) Si $M' \subseteq M$ sont des modules constructibles, alors $\lambda(M') \leqslant \lambda(M)$;

(3) Si M , M'' sont des modules constructibles, et s'il existe un homomorphisme surjectif $M \to M''$, alors $\lambda(M) \geqslant \lambda(M'')$.

Le sous-groupe de Γ , engendré par l'ensemble $\{\lambda(M) \neq \infty \mid M \in \mathcal{C}\}$, s'appelle le groupe de valeurs de λ .

(2a) Si R est un anneau noethérien ou un anneau de Bézout intègre, alors la condition (1) implique les conditions (2) et (3).

(2b) Soient λ , λ' des longueurs sur R . Si $\lambda(R/I) = \lambda'(R/I)$ pour tout idéal de type fini I de R , alors $\lambda = \lambda'$.

On étudie le comportement des longueurs par certains changements d'anneaux.

(2c) Soit $h : R \to R'$ un homomorphisme plat d'anneaux. Si M est un R-module constructible, alors $R' \otimes_R M$ est un R'-module constructible, et

$$c(R' \otimes_R M) \leqslant c(M) \quad .$$

Si R' est fidèlement plat sur R , alors

$$c(R' \otimes_R M) = c(M) \quad .$$

(2d) Soient $h : R \to R'$ un homomorphisme plat d'anneaux, et λ' une longueur sur R' . Soit λ l'application définie par $\lambda(M) = \lambda'(R' \otimes_R M)$ pour tout R-module constructible. Alors λ est une longueur sur R , appelée la longueur restriction de λ' à R .

(2e) Soit $h : R \to R'$ un homomorphisme plat d'anneaux. On suppose que tout idéal de type fini de R' est de la forme $R' \otimes_R I$, où I est un idéal de type fini de R . Alors, l'application de restriction $\lambda' \longmapsto \lambda$ est injective.

Un exemple important de la situation ci-dessus est celui où $R' = S^{-1} R$, S étant une partie multiplicative de l'anneau R .

(2f) Soit $h : R \to R/I = R'$. Si I est un idéal de type fini de R et si M' est un R'-module constructible, alors il est aussi un R-module constructible (par changement des scalaires au moyen de h).

Dans la situation ci-dessus, si λ est une longueur sur R , soit λ' l'application définie par $\lambda'(M') = \lambda(M'_{(R)})$ pour tout R'-module constructible M' .

(2g) **Avec** ces hypothèses et notations, λ' est une longueur sur R' .

3. Correspondance entre longueurs et valuations.

Définition 4. - Une longueur λ sur un anneau intègre R est dite valuative, lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

(1) Si $a , b \in R$, alors

$$\lambda(R/R(a + b)) \geqslant \min\{\lambda(R/Ra) , \lambda(R/Rb)\} \quad ;$$

(2) Si $a , b \in R$, alors

$$\lambda(R/(Ra + Rb)) = \min\{\lambda(R/Ra) , \lambda(R/Rb)\} \quad .$$

(3a) Si R est un anneau de valuation, toute longueur sur R est valuative.

Soient R un anneau intègre, K son corps des fractions, et v une valuation de K telle que $R \subseteq A_v$ (anneau de la valuation v). Soit P_v l'idéal maximal de l'anneau A_v .

On rappelle que v est essentielle pour R , lorsque $A_v = R_{P_v \cap R}$ (localisé de R à l'idéal premier $P_v \cap R$). Dans ce cas, A_v est un R-module plat.

Si chaque valuation v de K est essentielle pour R , on dit que R est un anneau de Prüfer.

Soit Λ l'ensemble des longueurs valuatives λ d'un anneau intègre R satisfaisant la condition suivante :

(*) Si $a \in R$, alors $\lambda(R/Ra) = \infty$ si, et seulement si, $a = 0$.

Le résultat fondamental est le suivant :

(3b) Il y a une injection ω de Λ dans l'ensemble des valuations v de K telles que $R \subseteq A_v$. Toute valuation essentielle de R appartient à l'image de ω . **Si v et λ se correspondent, alors $v(a) = \lambda(R/Ra)$ pour tout $a \in R$, et v , λ ont le même groupe de valeurs.**

Il en résulte que :

(3c) Si R est un anneau de Prüfer, il y a une bijection entre Λ et l'ensemble des valuations v de K telles que $R \subseteq A_v$.

(3d) Si $R = A_{v_0}$ (où v_0 est une valuation de K), il y a une bijection entre l'ensemble de toutes les longueurs λ sur R satisfaisant la propriété (*), et l'ensemble de toutes les valuations v de K telles que $A_{v_0} \subseteq A_v$.

Dans le cas où v_0 est de hauteur 1 , ceci devient un des résultats de NORTHCOTT et REUFEL.

Si une longueur ne satisfait pas (*), on peut, dans certains cas, lui associer une longueur qui satisfait (*).

Soient R un anneau, λ une longueur sur λ , et

$$P_\lambda = \{a \in R \mid \lambda(R/Ra) = \infty\} \quad .$$

(3e) Si R est un anneau intègre, et si λ est une longueur valuative sur R , alors P_λ est un idéal premier.

Dans ce cas, si R est noethérien, soit $\bar{R} = R/P_\lambda$, donc $\bar{R}$ est un anneau intègre noethérien.

Soit $\bar{\lambda}$ la longueur sur $\bar{R}$, définie comme il a été indiqué en (2g). Alors $\bar{\lambda}$ est valuative, et $P_{\bar{\lambda}}$ est l'idéal nul, c'est-à-dire $\bar{\lambda}$ satisfait (*).

4. Pré-ordres sur le groupe de Grothendieck.

Soit R un anneau (commutatif avec unité), et soit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(R)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme des R-modules de type fini. Sur $\mathfrak{M}$, on considère les relations :

$M' \nearrow M$, lorsqu'il existe un monomorphisme $\varphi : M' \to M$;
$M \searrow M''$, lorsqu'il existe un épimorphisme $\varphi : M \to M''$.

Ces relations sont des pré-ordres sur $\mathfrak{M}$, et $0 \nearrow M$, $M \searrow 0$.

ORZECH a démontré (voir ORZECH [2]) : Si M est un R-module de type fini, si N est un sous-module de M , et $f : N \to M$ un épimorphisme, alors f est un isomorphisme.

En particulier, si $M , N \in \mathfrak{M}$, et si $M \nearrow N$, $M \searrow N$, alors $M = N$. De même, si $M , N \in \mathfrak{M}$, et si $M \searrow N$, $N \searrow M$, alors $M = N$. Donc $\searrow$ est une relation d'ordre. Par contre, en général, $\nearrow$ n'est pas une relation d'ordre. De même, on peut avoir $N \nearrow M$, $M \searrow N$, et $M \neq N$.

On va étendre les relations $\nearrow$, $\searrow$ au groupe abélien libre $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ engendré par $\mathfrak{M} \setminus \{0\}$. Les éléments de $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ s'écrivent sous la forme

$$X = \textstyle\sum_{0 \neq M \in \mathfrak{M}} n_X(M).M \ , \qquad \text{avec } \operatorname{Supp}(X) = \{M \in \mathfrak{M} \mid n_X(M) \neq 0\} \quad \text{fini} \quad .$$

On écrit

$$X_+ = \sum_{n_X(M)>0} n_X(M).M \ , \qquad X_- = - \sum_{n_X(M)<0} n_X(M).M \ .$$

Pour définir les relations $\nearrow$, $\searrow$ sur $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$, on considère deux cas :

<u>1er cas</u> : $X = X_+$, $Y = Y_+$. On dit que $X \nearrow Y$, lorsque $X = \sum_i M_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $Y = \sum_j N_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$ (M_i , $N_j \in \mathfrak{M}$ non nécessairement distincts), avec $r \leqslant s$ et $M_i \nearrow N_i$ $(i = 1 , \dots , r)$.

Dans ce cas :

(4a.0) Si $X = M$, $Y = N$, alors $X \nearrow Y$ si, et seulement si, il existe un monomorphisme $\varphi : M \to N$;

(4a.1) $X \nearrow X$;

(4a.2) $0 \nearrow X$;

(4a.3) Si $X \nearrow Y$ et $Y \nearrow Z$ (où $Z_+ = Z$), alors $X \nearrow Z$;

(4a.4) Si $Z_+ = Z$, alors $X \nearrow Y$ si, et seulement si, $X + Z \nearrow Y + Z$.

<u>Cas général</u> : On dit que $X \nearrow Y$, lorsque $(X_+ + Y_-) \nearrow (Y_+ + X_-)$ (dans le sens précédent).

(4b.0) Si $X_+ = X$, $Y_+ = Y$, alors $X \nearrow Y$ si, et seulement si, $X \nearrow Y$ (dans le sens du premier cas) ;

(4b.1) $X \nearrow X$;

(4b.2) $0 \nearrow X$, si, et seulement si, $X_- \nearrow X_+$;

(4b.3) Si $X \nearrow Y$ et $Y \nearrow Z$, alors $X \nearrow Z$;

(4b.4) $X \nearrow Y$, si, et seulement si, il existe $U \in \mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ tel que $U_+ = U$, $(X + U)_+ = X + U$, $(Y + U)_+ = Y + U$, et $(X + U) \nearrow (Y + U)$;

(4b.5) $X \nearrow Y$, si, et seulement si, $(X + Z) \nearrow (Y + Z)$.

La relation $\searrow$ sur $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ se définit de façon analogue. Si $X_+ = X$, $Y_+ = Y$, on dit que $X \searrow Y$ lorsque $X = \sum_i M_i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $Y = \sum_j N_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$, avec $r \geqslant s$ et $M_j \searrow N_j$ (pour $j = 1 , \dots , s$). Plus généralement, $X \searrow Y$ lorsque $X_+ + Y_- \searrow X_- + Y_+$.

La relation $\searrow$ est un ordre, et satisfait des propriétés analogues à (4a), (4b). En outre :

(4c) Si $X \nearrow Y$ et $X \searrow Y$, alors $X = Y$.

On dit que M est un R-module de torsion, lorsque, si $x \in M$, il existe $a \in R$, $a \neq 0$, tel que $ax = 0$.

(4d) Soit M un R-module satisfaisant la condition :

(**) Si $N' \subseteq N$ sont des sous-modules de M , alors N/N' n'est pas isomorphe à R .

Alors M est un R-module de torsion. La réciproque est vraie lorsque R est un anneau intègre.

Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de R-modules de torsion constructibles. Le pré-ordre $\nearrow$ et l'ordre $\searrow$ de $\mathfrak{F}(\mathfrak{M})$ induisent respectivement un pré-ordre et un ordre sur $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$, le groupe abélien libre engendré par $\mathcal{T} \setminus \{0\}$.

Soit $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ le sous-groupe de $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$, engendré par les éléments $M' - M + M''$, lorsque $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte, et $M', M, M'' \in \mathcal{T}$.

Soit $\mathfrak{G}\mathcal{T}(R) = \mathfrak{G}\mathcal{T} = \mathfrak{F}(\mathcal{T})/\mathcal{E}(\mathcal{T})$ (groupe abélien quotient ; c'est le groupe de Grothendieck des R-modules de torsion constructibles). Si $X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, on note $[X] = X + \mathcal{E}(\mathcal{T})$ son image dans $\mathfrak{G}\mathcal{T}$.

Les relations $\nearrow$, $\searrow$ sur $\mathfrak{F}(\mathcal{T})$ induisent des relations sur $\mathfrak{G}\mathcal{T}$ de la façon suivante : Si $[X], [Y] \in \mathfrak{G}\mathcal{T}$, on définit $[X] \nearrow [Y]$ lorsqu'il existe $V \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ tel que $X \nearrow Y + V$. Cette relation est bien définie. De même, on pose $[X] \searrow [Y]$ lorsqu'il existe $U \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ tel que $X + U \searrow Y$.

(4e.1) Si $X \nearrow Y$, alors $[X] \nearrow [Y]$. En particulier, si $M', M \in \mathcal{T}$ et $M' \nearrow M$, alors $[M'] \nearrow [M]$.
(4e.2) $[X] \nearrow [X]$.
(4e.3) $[0] \nearrow [X]$, si, et seulement si, il existe $V \in \mathcal{E}(\mathcal{T})$ tel que $0 \nearrow X + V$.
(4e.4) Si $[X] \nearrow [Y]$ et $[Y] \nearrow [Z]$, alors $[X] \nearrow [Z]$.
(4e.5) $[X] \nearrow [Y]$, si, et seulement si, $[X] + [Z] \nearrow [Y] + [Z]$.

Le pré-ordre $\searrow$ jouit de propriétés analogues.

5. Représentants réduits du groupe de Grothendieck.

Soit $\mathcal{T}^\infty$ un sous-ensemble de $\mathcal{T}$, tel que $0 \notin \mathcal{T}^\infty$, et, si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de R-modules de torsion constructibles, alors $M \in \mathcal{T}^\infty$ si, et seulement si, M' ou M'' appartient à $\mathcal{T}^\infty$. Soit $\mathcal{T}^f$ le complément de $\mathcal{T}^\infty$ dans $\mathcal{T}$. Alors $\mathfrak{F}(\mathcal{T}) = \mathfrak{F}(\mathcal{T}^\infty) \oplus \mathfrak{F}(\mathcal{T}^f)$, et, si $X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$, on peut l'écrire de façon unique sous la forme $X = X^\infty + X^f$, avec $X^\infty \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}^\infty)$, $X^f \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}^f)$.

Soient

$$\mathrm{Red}_0 = \{X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}) \mid X^\infty = 0\} ,$$

$$\mathrm{Red}_I = \{X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}) \mid X^\infty = M \in \mathcal{T}^\infty\} ,$$

$$\mathrm{Red}_{I'} = \{X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}) \mid X^\infty = -M ,\ M \in \mathcal{T}^\infty\} ,$$

$$\mathrm{Red}_{II} = \{X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T}) \mid X^\infty = M - M' ,\ M \neq M' \text{ dans } \mathcal{T}^\infty\} .$$

Les éléments de $\mathrm{Red}_0 \cup \mathrm{Red}_I \cup \mathrm{Red}_{I'} \cup \mathrm{Red}_{II}$ sont appelés les <u>éléments réduits</u>

(relativement à $\mathcal{T}^{\infty}$) ; l'indice 0 , I , I' , ou II , est appelé le <u>type</u> de l'élément réduit.

(5a) Dans toute classe $\xi \in \mathcal{S}\mathcal{T}$, il existe un élément réduit.

Il n'est pas exclu, a priori, qu'il existe des éléments réduits de types différents dans la même classe. Pour discuter cette possibilité, on introduit les notations suivantes (où $N \in \mathcal{T}$) :

$$N \searrow = \{M \in \mathcal{T} \mid N \searrow M\} ,$$

$$N \nearrow = \{M \in \mathcal{T} \mid N \nearrow M\} ,$$

$$\searrow N = \{M \in \mathcal{T} \mid M \searrow N\} ,$$

$$\nearrow N = \{M \in \mathcal{T} \mid M \nearrow N\} .$$

(5b.1) $(N \searrow) \searrow = N \searrow$, $(N \nearrow) \nearrow = N \nearrow$, $\searrow (\searrow N) = \searrow N$, $\nearrow (\nearrow N) = \nearrow N$;
(5b.2) $\nearrow (\searrow N) = \searrow (\nearrow N)$, $(N \searrow) \nearrow = (N \nearrow) \searrow$;
(5b.3) $(\nearrow N) \nearrow = \nearrow (N \nearrow)$, $(\nearrow N) \searrow = \nearrow (N \searrow)$, $(\searrow N) \searrow = \searrow (N \searrow)$, $(\searrow N) \nearrow = \searrow (N \nearrow)$;
(5b.4) $(N \nearrow) \searrow = \searrow (\nearrow N) = \nearrow (N \nearrow) = \searrow (N \searrow) = \mathcal{T}$.

En outre, $M \in \nearrow M' \searrow$ si, et seulement si, $M' \in \searrow M \nearrow$. Dans ce cas, on écrit $M \Nearrow M'$ (ou bien $M' \Searrow M$). C'est une relation de pré-ordre ; si $M \nearrow M'$, alors $M \Nearrow M'$; si $M' \searrow M$, alors $M \Nearrow M'$.

Deux R-modules, $M , M' \in \mathcal{T}$, sont <u>relationnés</u>, lorsque $M \Nearrow M'$ ou $M' \Nearrow M$. Par exemple, les $\mathbb{Z}$-modules $\mathbb{Z}/2$, $\mathbb{Z}/3$ sont non relationnés.

(5c) Si $X \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$ et $X^{\infty} = M - M'$, où M , M' sont relationnés, alors il existe $Y \in \mathfrak{F}(\mathcal{T})$ tel que $[Y] = [X]$ et $Y \in \mathrm{Red}_0 \cup \mathrm{Red}_I \cup \mathrm{Red}_{I'}$.

6. Longueurs et caractères du groupe de Grothendieck de torsion.

Soient R un anneau (commutatif avec unité), et λ une longueur restreinte aux R-modules de torsion constructibles et satisfaisant la condition :

(***) $\lambda(M) \neq \infty$, pour tout R-module $M \in \mathcal{T}$.

Soit Γ le groupe des valeurs de λ , et soit $\tilde{\lambda} : \mathfrak{F}(\mathcal{T}) \to \Gamma$, définie par

$$\tilde{\lambda}(\sum n_X(M).M) = \sum n_X(M).\lambda(M) , \qquad \lambda(M) \in \Gamma ;$$

$\tilde{\lambda}$ est bien définie, en vertu de (***).

(6a) $\tilde{\lambda}$ satisfait les propriétés suivantes :

(6a.0) $\tilde{\lambda}(M) = \lambda(M)$, pour tout $M \in \mathcal{T}$;
(6a.1) $\tilde{\lambda}(\mathfrak{F}(\mathcal{T})) = \Gamma$;

(6a.2) Si X , $Y \in \mathfrak{S}(\mathcal{C})$, alors $\tilde{\lambda}(X + Y) = \tilde{\lambda}(X) + \tilde{\lambda}(Y)$ et $\tilde{\lambda}(- X) = - \tilde{\lambda}(X)$;
(6a.3) Si $X \nearrow Y$, alors $\tilde{\lambda}(X) \leqslant \tilde{\lambda}(Y)$;
(6a.4) Si $X \searrow Y$, alors $\tilde{\lambda}(X) \geqslant \tilde{\lambda}(Y)$;
(6a.5) $\tilde{\lambda}(U) = 0$, pour tout $U \in \mathcal{E}(\mathcal{C})$.

On définit $\bar{\lambda}$: $\mathcal{SC}(R) = \mathfrak{S}(\mathcal{C})/\mathcal{E}(\mathcal{C}) \twoheadrightarrow \Gamma$ comme suit :

$$\bar{\lambda}([X]) = \tilde{\lambda}(X) , \qquad \text{pour tout } X \in \mathfrak{S}(\mathcal{C}) \ ;$$

$\bar{\lambda}$ est bien définie.

(6b) $\bar{\lambda}$ satisfait les propriétés suivantes :

(6b.0) $\bar{\lambda}([M]) = \lambda(M)$, pour tout $M \in \mathcal{C}$;
(6b.1) $\bar{\lambda}(\mathcal{SC}) = \Gamma$;
(6b.2) $\bar{\lambda}([X] + [Y]) = \bar{\lambda}([X]) + \bar{\lambda}([Y])$, $\bar{\lambda}(- [X]) = - \bar{\lambda}([X])$;
(6b.3) Si $[X] \nearrow [Y]$, alors $\bar{\lambda}([X]) \leqslant \bar{\lambda}([Y])$;
(6b.4) Si $[X] \searrow [Y]$, alors $\bar{\lambda}([X]) \geqslant \bar{\lambda}([Y])$.

Soit G un groupe abélien additif, muni des pré-ordres compatibles $\nearrow$, $\searrow$. Soit Γ un groupe abélien additif totalement ordonné. Un homomorphisme $\chi : G \twoheadrightarrow \Gamma$ est appelé un caractère de G , lorsqu'il satisfait les propriétés suivantes :

1° Si x , $y \in G$, $x \nearrow y$, alors $\chi(x) \leqslant \chi(y)$;
2° Si x , $y \in G$, $x \searrow y$, alors $\chi(x) \geqslant \chi(y)$.

Donc, pour toute longueur λ sur R , satisfaisant la condition (***), $\bar{\lambda}$ est un caractère de $\mathcal{SC}$.

(6c) La correspondance $\lambda \longmapsto \bar{\lambda}$ est une bijection entre l'ensemble des longueurs (sur les R-modules de torsion constructibles) satisfaisant (***), et l'ensemble des caractères de $\mathcal{SC}$.

En particulier, soit $R = A_{v_0}$ (anneau de la valuation v_0 du corps K). Alors il y a une bijection entre l'ensemble des valuations v de K telles que $R \subseteq A_v$, et l'ensemble des caractères de $\mathcal{SC}$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] NORTHCOTT (D. G.) and REUFEL (M.). - A generalization of the concept of length, Quart. J. of Math., Oxford, t. 16, 1965, p. 297-321.

[2] ORZECH (Morris). - Onto endomorphisms are isomorphisms, Amer. math. Monthly, t. 78, 1971, p. 357-362.

(Texte reçu le 28 juin 1971)

Paulo RIBENBOIM
Department of Mathematics
Queen's University
KINGSTON, Ontario (Canada)