

# SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MARIE-PAULE MALLIAVIN

## **Une remarque sur les anneaux locaux réguliers**

*Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres*, tome 24, n° 2 (1970-1971), exp. n° 13,  
p. 1-7

[http://www.numdam.org/item?id=SD\\_1970-1971\\_\\_24\\_2\\_A2\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_2_A2_0)

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNE REMARQUE SUR LES ANNEAUX LOCAUX RÉGULIERS

par Marie-Paule MALLIAVIN

Tous les anneaux considérés sont commutatifs noethériens, locaux et unitaires.  
 Tous les modules sont unitaires et de type fini :

Si  $A$  est un anneau, on désignera par  $m(A)$  son idéal maximal. On appelle support d'un  $A$ -module  $M$ , l'ensemble  $\text{Supp}_A(M)$  des idéaux premiers  $p$  de  $A$  tels que  $M_p \neq 0$ .

LEMME 1. - Si, sur l'anneau local  $A$ , la longueur du produit tensoriel de deux modules  $M$  et  $N$  est finie, alors la longueur des modules  $\text{Tor}_i^A(M, N)$  est finie, pour tout  $i$ .

Preuve. - On remarque que  $\text{Supp}_A M \cap \text{Supp}_A N \subseteq \text{Supp}_A(M \otimes_A N)$ . En effet, ceci résulte du fait que, sur un anneau local, un produit tensoriel  $M \otimes_A N$  n'est nul que si l'un des deux modules est nul. Donc, si  $\text{Supp}_A(M \otimes_A N) = \{m(A)\}$ , et si  $p$  est un idéal premier de  $A$ ,  $p \neq m(A)$ , alors

$$\text{Tor}_i^A(M, N)_p = \text{Tor}_i^A(M_p, N_p) = 0 ;$$

d'où

$$\text{Supp}(\text{Tor}_i^A(M, N)) = \{m(A)\} .$$

Si, pour  $j$  assez grand, les  $\text{Tor}_j^A(M, N)$  sont tous nuls, la somme

$$\sum_{i \geq 0} (-1)^i \text{lg}_A(\text{Tor}_i^A(M, N))$$

(où  $\text{lg}_A$  = longueur du  $A$ -module) a un sens ; on l'appelle caractéristique d'Euler-Poincaré (d'ordre 0) de  $M$  et  $N$ , et on la note  $\chi_0^A(M, N)$ .

On appellera dimension d'un anneau  $A$ , sa dimension de Krull, et dimension d'un  $A$ -module  $M$ , la dimension de l'anneau  $A/\text{Ann}(M)$ , où  $\text{Ann}(M) = \{x \in A, xM = 0\}$ . On notera respectivement  $\dim A$  et  $\dim_A M$  ces dimensions, en convenant de poser :  $\dim_A(0) = -1$ .

On notera  $\text{dh}_A M$  la dimension homologique d'un  $A$ -module  $M$ . C'est, soit  $+\infty$ , soit le plus petit entier  $n$  pour lequel il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow \dots \rightarrow P_1 \rightarrow P_0 \rightarrow M \rightarrow 0 ,$$

où les  $P_i$  sont projectifs (c'est-à-dire ici libres). On a alors  $\text{Ext}_A^i(M, \cdot) = 0$  pour tout  $i > \text{dh}_A M$ .

Rappelons une conjecture de SERRE : Si  $A$  est un anneau régulier (i. e. sur lequel tout module est de dimension homologique finie), et si  $M$  et  $N$  sont deux  $A$ -modules tels que  $\text{lg}_A(M \otimes_A N) < \infty$ , alors  $\chi_0^A(M, N)$  est positif ou nul, et on a  $\chi_0^A(M, N) = 0$  si, et seulement si,  $\dim_A M + \dim_A N < \dim A$  et  $\neq \dim A$ .

On remarquera que si  $\text{lg}_A(M \otimes_A N)$  est finie ( $A$  étant régulier), alors on a  $\dim_A M + \dim_A N \leq \dim A$ .

La conjecture, citée plus haut, a été démontré par SERRE dans le cas où l'anneau  $A$  est d'égales caractéristiques [i. e. son corps résiduel et son corps des quotients ont même caractéristique] et dans le cas où  $A$  est non ramifié [i. e. si  $p$  (caractéristique du corps résiduel de  $A$ ) n'est pas contenue dans  $\mathfrak{m}(A)^2$ ]. D'autre part, on sait qu'il suffirait de prouver cette conjecture dans le cas où  $A$  est complet (pour la topologie  $\mathfrak{m}(A)$ -adique), puisque les longueurs et les dimensions qu'elle fait intervenir sont invariantes par passage aux complétés. De plus, il suffirait de supposer que les modules  $M$  et  $N$  sont de la forme  $A/p$  et  $A/q$ , avec  $p$  et  $q$  premiers, car tout  $A$ -module  $M$  possède une "suite de composition"

$$M_0 = 0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = M,$$

où les facteurs  $M_i/M_{i-1}$  sont de la forme  $A/p$ , avec  $p \in \text{Spec}(A)$ .

La conjecture est vraie si  $M = A/p$  et  $N = A/q$ , avec  $p \in p \cap q$ . Précisément, on obtient le résultat suivant :

**PROPOSITION 1.** - Soit  $A$  un anneau régulier complet d'inégales caractéristiques, et soit  $p$  la caractéristique du corps résiduel de  $A$ . Soient  $M$  et  $N$  deux  $A$ -modules tels que :

- (i)  $pM = pN = (0)$  ;
- (ii)  $\text{lg}_A(M \otimes_A N)$  est finie.

Alors  $\chi_0^A(M, N)$  est positif, et l'on a  $\chi_0^A(M, N) = 0$  si, et seulement si,  $\dim^A M + \dim^A N < \dim A$  et  $\neq \dim A$ .

Preuve. - On a (cf. [4])  $A = B/Bx$ , où  $B$  est un anneau de séries formelles sur un anneau de valuation  $k$ , et où  $x \in B$ ,  $x \neq 0$ .

Posons  $\bar{A} = A/pB$  ; alors  $\bar{A} = \bar{A}/\bar{x}\bar{A}$ , où  $\bar{B} = B/pB$ , et où  $\bar{x}$  est l'image de  $x$  dans  $\bar{B}$ .

L'anneau  $\bar{B}$  est un anneau de séries formelles sur le corps  $\bar{k} = k/pk$ .

L'élément  $\bar{x}$  de  $\bar{B}$  n'est pas nul ; sinon, on aurait  $x = pu$ , avec  $u \in B$  ; comme  $A$  est d'inégales caractéristiques,  $p \notin xB$  ; comme l'idéal  $Bx$  est premier, on a alors  $u \in xB$  ; donc  $u = xv$ , où  $v \in B$  ; donc  $1 = pv$ , ce qui est impossible.

On a, d'autre part, deux suites spectrales [3]

$$\begin{aligned} \text{Tor}_p^{\bar{A}}(M, \text{Tor}_q^R(N, \bar{A})) &\implies \text{Tor}_{p+q}^R(M, N) , \\ \text{Tor}_p^{\bar{A}}(M, \text{Tor}_q^{\bar{B}}(N, \bar{A})) &\implies \text{Tor}_{p+q}^{\bar{B}}(M, N) . \end{aligned}$$

Puisque  $\bar{x}$  n'est pas diviseur de zéro dans  $\bar{B}$ , et que  $p$  n'est pas diviseur de zéro dans  $R$ , on a

$$\text{Tor}_q^{\bar{B}}(\bar{A}, N) = 0 = \text{Tor}_q^A(\bar{A}, N) , \quad \text{pour } q \geq 2 .$$

Puisque  $xN = 0 = pN$ , on a

$$\text{Tor}_1^A(N, \bar{A}) = N \otimes_A \bar{A} = N = N \otimes_B \bar{A} = \text{Tor}_1^{\bar{B}}(N, \bar{A}) .$$

Par suite, les deux suites spectrales précédentes dégèrent pour donner les suites exactes suivantes :

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \text{Tor}_i^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \dots , \\ \dots &\rightarrow \text{Tor}_i^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^{\bar{B}}(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i+1}^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \text{Tor}_{i-1}^{\bar{A}}(M, N) \rightarrow \dots . \end{aligned}$$

En explicitant, on voit que  $\chi_0^A(M, N) = \chi_0^{\bar{B}}(M, N)$ . Par suite,  $\chi_0^A(M, N)$  est positif, et est nul si, et seulement si,

$$\dim^{\bar{B}} M + \dim^{\bar{B}} N = \dim^B M + \dim^B N$$

est strictement inférieur à  $\dim \bar{B} = \dim A$ .

La conjecture est vraie lorsque le module  $m = A/I$  est tel que  $I$  soit engendré par une  $A$ -suite  $x_1, \dots, x_i, x_i \notin I$  (i. e. tel que  $x_k$  ne soit pas diviseur de zéro dans  $A/(x_1, \dots, x_{k-1})$ ). Il en résulte, en particulier, que la conjecture est vraie si la dimension de  $A$  est  $< 2$  ; en effet,  $A$  étant factoriel, tout idéal premier de  $A$  sera dans ce cas engendré par une  $A$ -suite.

On peut étendre ce résultat à la dimension 3, en utilisant le résultat suivant de BUCHSBAUM [2].

PROPOSITION 2. - Soient  $R$  un anneau local régulier, d'idéal maximal  $\mathfrak{m}$ ,  $\mathfrak{x}$  un élément de  $\mathfrak{m} - \mathfrak{m}^2$ , et  $\bar{M}$  un  $\bar{R}(= R/\mathfrak{x}R)$ -module monogène, tel que  $\text{dh}_{\bar{R}} \bar{M} = 2$ .

Alors il existe un module  $M$  sur  $R$ , tel que  $M/\mathfrak{x}M \simeq \bar{M}$ , et que  $\text{Tor}_1^R(R/\mathfrak{x}R, M) = 0$  (i. e.  $0 \rightarrow M \xrightarrow{\mathfrak{x}} M$  est exacte).

COROLLAIRE. - Si  $A$  est un anneau local régulier de dimension 3, et si  $M, N$  sont deux  $A$ -modules tels que  $\text{lg}_A(M \otimes_A N)$  est finie, alors  $\chi_0^A(M, N) \geq 0$ , et  $\chi_0^A(M, N) = 0$  si, et seulement si,  $\dim M + \dim N \leq 2 < \dim A$ .

Preuve. - On se ramène au cas où  $A$  est complet et  $M = A/\mathfrak{p}$ ,  $N = A/\mathfrak{q}$ . Si  $\text{dh}_A M = 0$ , alors  $M$  est libre ( $= A$ ),  $\chi_0^A(M, N) = \text{lg}_A N$ , et  $\chi_0^A(M, N) = 0$  si, et seulement si,  $N = 0$ , donc si, et seulement si,  $\dim N = -1 < 0$ . Si  $\text{dh}_A M = 1$ , alors  $\mathfrak{p}$  est libre, donc principal et engendré par une  $A$ -suite. Si  $\text{dh}_A M = 3$ , alors  $\mathfrak{m} = \mathfrak{p}$ , et  $\mathfrak{p}$  est engendré par une  $A$ -suite.

Reste le cas où  $\text{dh}_A M = 2$ . Soit  $R$  un anneau local régulier complet non ramifié tel que  $A = R/\mathfrak{x}R$ , où  $\mathfrak{x} \in \mathfrak{m}(R) - \mathfrak{m}(R)^2$ . Alors il existe un idéal  $\mathfrak{S}$  de  $R$  tel que  $A/\mathfrak{p} = A \otimes_R R/\mathfrak{S}$  et  $\text{Tor}_1^R(A, R/\mathfrak{I}) = 0$ . Mais alors

$$\text{Tor}_i^A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) = \text{Tor}_i^A(A \otimes_R R/\mathfrak{S}, A/\mathfrak{q}) \simeq \text{Tor}_i^R(R/\mathfrak{S}, A/\mathfrak{q}) .$$

Donc

$$\chi_0^A(A/\mathfrak{p}, A/\mathfrak{q}) = \chi_0^R(R/\mathfrak{S}, A/\mathfrak{q}) ,$$

et, pour l'anneau  $R$ , la conjecture étant vraie, cette quantité est positive, et elle est nulle si, et seulement si,  $\dim R/\mathfrak{S} + \dim A/\mathfrak{q} < \dim R = \dim A + 1$ . Mais  $\dim A/\mathfrak{p} = \dim R/(\mathfrak{S} + \mathfrak{x}R) = \dim R/\mathfrak{S} - 1$ , d'où le résultat.

Si  $A$  est un anneau régulier, et si  $M$  et  $N$  sont deux  $A$ -modules, tels que  $\text{lg}_A(\text{Tor}_i^A(M, N)) < \infty$ , alors on sait que  $\text{lg}_A(\text{Tor}_j^A(M, N)) < \infty$ , pour  $j \geq i$ , d'après un résultat de LICHTENBAUM. On introduit les caractéristiques d'Euler-Poincaré, d'ordre supérieur,

$$\chi_i^A(M, N) = \sum_{s \geq 0} (-1)^s (\text{Tor}_{i+s}^A(M, N)) .$$

Sauf dans les cas où  $A$  est d'égales caractéristiques et où  $A$  (ou son complété) est un anneau de série formelle sur un anneau de valuation (discret de rang 1), on ne sait rien sur la positivité des  $\chi_i$  ni sur les conditions nécessaires ou suffisantes sous lesquelles elles seraient nulles.

PROPOSITION 3. - Si  $\dim A = 2$ , alors  $\chi_i^A$  est positif ou nul, et, pour  $i \geq 1$ ,  $\chi_i^A(M, N) = 0$  si, et seulement si,  $\text{Tor}_i^A(M, N) = 0$ .

Le seul cas à examiner est évidemment

$$\chi_1^A(M, N) = \lg_A \operatorname{Tor}_1^A(M, N) - \lg_A(\operatorname{Tor}_2^A(M, N)) .$$

On utilisera le résultat suivant, cas particulier d'un théorème de M. AUSLANDER [1] :

Soient M et N deux A-modules, et soit q le plus grand entier tel que  
 $\operatorname{Tor}_q^A(M, N) \neq 0$ . Si  $q = 0$ , ou bien si  $\operatorname{dh}_A(\operatorname{Tor}_q^A(M, N)) \geq \dim A - 1$ , on a

$$\operatorname{dh}_A(\operatorname{Tor}_q^A(M, N)) = \operatorname{dh}_A M + \operatorname{dh}_A N - q .$$

Supposons que  $\operatorname{Tor}_1^A(M, N)$  est non nul et de longueur finie, alors  $\operatorname{dh}_A(\operatorname{Tor}_q^A(M, N)) = 2$  pour  $q \geq 1$ , et  $2 + q = \operatorname{dh}_A M + \operatorname{dh}_A N$ , où  $q$  est le plus grand entier tel que  $\operatorname{Tor}_q^A(M, N) \neq 0$ ; donc  $q = 1$  ou  $2$ .

Si  $\operatorname{dh}_A M = 1$  ou  $\operatorname{dh}_A N = 1$ ,  $2 + q \leq 1 + 2$  et  $q = 1$ . Alors

$$\chi_1^A(M, N) = \lg_A \operatorname{Tor}_1^A(M, N) > 0 .$$

Si  $\operatorname{dh}_A M = 2 = \operatorname{dh}_A N$ , alors  $\mathfrak{m}(A)$  est associé à  $M$  et à  $N$ . Soit  $H_0$  le sous-module artinien maximal de  $M$ . Alors on a la suite exacte

$$0 \rightarrow H_0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow 0 ,$$

où  $\operatorname{dh}_A M' \leq 1$ . On a donc la suite exacte

$$0 \rightarrow \operatorname{Tor}_1^A(H_0, N) \rightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M, N) \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Tor}_1^A(M', N) \rightarrow H_0 \otimes_A N \\ \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow 0 ,$$

et

$$\operatorname{Tor}_2^R(M, N) = \operatorname{Tor}_2^R(H_0, N) .$$

D'où

$$\lg \operatorname{Im} \varphi - \lg \operatorname{Tor}_1^A(M, N) + \lg \operatorname{Tor}_1^A(H_0, N) = 0 ,$$

et

$$\chi_1^A(M, N) = \lg \operatorname{Im} \varphi + \chi_1^A(H_0, N) .$$

Il suffit donc de prouver que  $\chi_1^A(M, N) \geq 0$  si  $M$  est de longueur finie, et que  $\chi_1^A(M, N) = 0$  avec  $M$  de longueur finie est équivalent à  $\operatorname{Tor}_1^A(M, N) = 0$ . En effet, dans ce cas, on aura, pour  $M$  quelconque,

$$\chi_1^A(M, N) \geq 0 ,$$

et

$$(\chi_1^A(M, N) = 0) \iff \{\varphi = 0 \text{ et } \text{Tor}_1^A(H_0, N) = 0\} \iff (\text{Tor}_1^A(M, N) = 0) .$$

On procède ensuite avec  $N$  de la même façon.

Soit  $H'_0$  le sous-module de longueur finie maximal de  $N$ . On a la suite exacte

$$0 \rightarrow H'_0 \rightarrow N \rightarrow N' \rightarrow 0, \quad \text{où } \text{dh}_R N' \leq 1 .$$

D'où la suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \text{Tor}_1^A(H'_0, H_0) \longrightarrow \text{Tor}_1^A(N, H_0) \xrightarrow{\psi} \text{Tor}_1^A(N', H_0) \longrightarrow H'_0 \otimes H_0 \\ \longrightarrow N \otimes H_0 \longrightarrow N' \otimes H_0 \longrightarrow 0, \end{aligned}$$

et

$$\text{Tor}_2^A(N, H_0) = \text{Tor}_1^A(H'_0, H_0) .$$

D'où

$$\text{lg Im } \psi - \text{lg Tor}_1^A(N, H_0) + \text{lg Tor}_1^A(H'_0, H_0) = 0 ,$$

et

$$\chi_1^A(N, H_0) = \chi_1^A(H'_0, H_0) + \text{lg Im } \psi .$$

Il suffit donc de prouver que  $\chi_1^A(H'_0, H_0) \geq 0$ , et que  $\chi_1^A(H'_0, H_0) = 0$  si, et seulement si,  $\text{Tor}_1^A(H'_0, H_0) = 0$ .

Mais, si  $\text{lg } H'_0$  et  $\text{lg } H_0$  sont  $< \infty$ , alors  $\chi_0^A(H'_0, H_0) = 0$ . Donc  $\chi_1^A(H'_0, H_0) = \text{lg } H_0 \otimes H'_0 \geq 0$ , et  $\chi_1^A(H'_0, H_0) = 0$  si, et seulement si,  $H_0$  ou  $H'_0 = 0$ , auquel cas  $\text{Tor}_1^A(H_0, H'_0) = 0$ .

Remarque. - La condition  $\text{Tor}_1^A(H_0, H'_0) = 0$ , avec  $H_0$  et  $H'_0$  de longueur finie, est équivalente à  $H_0$  ou  $H'_0 = 0$ . En effet, on sait que  $\text{Tor}_1^A(H_0, H'_0) = 0$  et  $H_0 \neq 0$ ,  $\text{codim } H_0 = 0$ , entraîne que  $H'_0$  est libre [5]. Donc ici,  $H'_0 = 0$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] AUSLANDER (M.). - Modules over unramified regular local rings, Illinois J. of Math., t. 5, 1961, p. 631-647.
- [2] BUCHSBAUM (D. A.). - Complexes associated with the minors of a matrix, Symposia Mathematica, Vol. 4, p. 255-285. - London, New York, Academic Press, 1970 (Istituto nazionale di alta Matematica).
- [3] CARTAN (Henri) and EILENBERG (Samuel). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [4] COHEN (I. S.). - On the structure and ideal theory of complete local rings, Trans. Amer. math. Soc., t. 59, 1946, p. 54-106.

- [5] LICHTENBAUM (Stephen). - On the vanishing of Tor in regular local rings, Illinois J. of Math., t. 10, 1966, p. 220-226.
- [6] SERRE (Jean-Pierre). - Algèbre locale. Multiplicités. Cours au Collège de France, 1957/58, rédigé par Pierre Gabriel. 2e édition. - Berlin, Heidelberg, New York, Springer-Verlag, 1965 (Lecture Notes in Mathematics, 11).

(Texte reçu le 3 mai 1971)

Marie-Paule MALLIAVIN  
10 rue Saint-Louis en l'Ile  
75 - PARIS 04

---