

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

RICHARD BLOCK

Sur les anneaux différentiellement simples

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 24, n° 1 (1970-1971), exp. n° 5,
p. 1-4

http://www.numdam.org/item?id=SD_1970-1971__24_1_A4_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1970-1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ANNEAUX DIFFÉRENTIABLEMENT SIMPLES

par Richard BLOCK

Si B est un anneau (ou algèbre sur K), on dit que B est différentiablement simple s'il ne contient aucun idéal bilatère propre I , pour lequel $dI \subseteq I$ pour chaque dérivation d de B , et si $B^2 \neq 0$. Le résultat suivant était le théorème principal de l'auteur dans [1].

THÉORÈME. - Soit B un anneau différentiablement simple, contenant un idéal bilatère minimal ; alors B est ou simple ou un anneau de groupe $S[G]$, où S est simple et de caractéristique p premier, et G est le produit direct de n groupes cycliques d'ordre p (réciproquement, tel B est toujours différentiablement simple).

Ce théorème reste valable sans aucune condition d'associativité pour B (et a des conséquences importantes pour les algèbres de Lie et pour les algèbres flexibles). En principe, les résultats qui sont valables pour toutes les algèbres non associatives admettent une généralisation aux Ω -algèbres (ou anneaux à multi-opérateurs) [2], c'est-à-dire des groupes additifs abéliens sur lesquels une famille Ω opère de façon multilinéaire.

Le but de ce travail est de montrer qu'on peut étendre le résultat ci-dessus aux Ω -algèbres. Soit B une Ω -algèbre. Une dérivation d de B est une application additive de B dans B telle que

$$d\omega b_1 \dots b_n = \sum_1 \omega b_1 \dots (db_i) \dots b_n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad \forall \omega \in \Omega, b_j \in B; \quad n = n(\omega).$$

On dit que B est différentiablement simple s'il ne contient aucun idéal bilatère propre I pour lequel $(\text{der } B)I \subseteq I$, et si la condition suivante de non-nullité est satisfaite :

$$(\Omega^t)^t_B \neq 0, \quad \forall t > 0,$$

où $\Omega^t C$ (pour $C \subseteq B$) = $\{\omega(c_1, \dots, c_n) \mid c_i \in C, \omega \text{ tel que } n(\omega) \geq 2\}$
(s'il n'y a aucun ω pour lequel $n(\omega) = 1$, on peut remplacer cette condition par $\Omega B \neq 0$).

THÉORÈME. - Le théorème ci-dessus reste valable pour les Ω -algèbres.

Pour démontrer ce théorème, nous donnons d'abord quelques résultats sur les anneaux associatifs. Soit A un anneau, et soit $M = {}_A M$ un A -module à gauche contenant

un sous-module minimal M_1 et ayant le commutant Γ qui est commutatif. On dit qu'un élément d dans $\text{Hom}_Z(M, M)$ est une transformation différentielle de M s'il existe δ dans $\text{Hom}_Z(A, A)$ tel que $dam = adm + (\delta a)m$, $\forall a \in A, m \in M$. Soit D une famille de transformations différentielles de M tel que M est D -simple, c'est-à-dire M ne contient aucun sous-module propre N pour lequel $dN \subseteq N$ ($\forall d \in D$).

LEMME 1. - Soit $m \in M$. Alors il existe un sous-module N de M contenant m , et ayant une suite de Jordan-Hölder $0 \subset N_1 \subset \dots \subset N_n = N$, pour lequel les quotients sont tous isomorphes, $N_1 = M_1$, et $N \subseteq M_1 + DM_1 + \dots + D^{n-1}M_1$. Si M est de longueur finie, M lui-même a une telle suite de Jordan-Hölder. Si M n'est pas de longueur finie, il existe un tel N pour lequel $m \in N_{n-1}$.

LEMME 2. - Si M est de longueur finie, alors Γ_Γ a la même longueur finie, et Γ est $[D, -]$ -simple (c'est-à-dire simple par rapport aux dérivations

$$[d, -] : \gamma \mapsto [d, \gamma] \quad (d \in D).$$

LEMME 3. - Si A est commutatif, alors :

ou A est un corps,

ou $A \cong E[X_1, \dots, X_n]/(X_1^p, \dots, X_n^p)$ pour quelque corps E de caractéristique p premier et quelque $n > 0$ (et alors $A \cong E[G]$ pour G comme ci-dessus).

On remarque que l'ensemble des transformations différentielles de M est un Γ -sous-module à gauche et une sous-algèbre de Lie de $\text{Hom}_Z(M, M)$; écrivons \bar{D} pour la sous-structure de ce Γ -module et algèbre de Lie engendré par D .

LEMME 4. - Si M est de longueur finie et a un unique sous-module maximal N , alors il existe d dans \bar{D} tel que M est $\{d\}$ -simple, $S = \{m \in M \mid dm \in M_1\}$ est supplémentaire de N , $E = \{\gamma \in \Gamma \mid [d, \gamma]M \subseteq M_1\}$ est un sous-corps de Γ et supplémentaire du radical de Γ , et l'application E -linéaire $\sigma : M/(N \otimes_E \Gamma) \rightarrow M$ définie par $\sigma(m + N \otimes \gamma) = \gamma m_S$ ($m \in M, \gamma \in \Gamma$) (où m_S est le composant de m dans S), est un isomorphisme de Γ -modules.

On peut démontrer les lemmes ci-dessus par des modifications de [1] (p. 437-446). L'auteur va les considérer dans un autre article dans un cadre plus général, en particulier pour le cas où Γ n'est pas nécessairement commutatif.

Donnons maintenant la démonstration du théorème sur les Ω -algèbres comme conséquence facile des lemmes ci-dessus. Soit B une Ω -algèbre différentiable simple et contenant un idéal bilatère minimal M_1 . Soit A l'anneau de multiplication de B , c'est-à-dire le sous-anneau (associatif unitaire) de $\text{Hom}_Z(B, B)$ engendré par $\{\omega_{(i)}(c_1, \dots, c_{n-1}) \mid \omega \in \Omega, c_j \in B\}$ où

$$\omega_{(i)}(c_1, \dots, c_{n-1})b = \omega c_1 \dots c_{i-1} b c_i \dots c_{n-1} \quad (n = n(\omega)) ;$$

et soit A' le même pour le sous-ensemble $\Omega' = \{\omega \in \Omega \mid n(\omega) > 1\}$ de Ω . Donc les sous-modules de ${}_A B$ sont les idéaux bilatères de B , et les dérivations de B sont des transformations différentielles de ${}_A B$.

LEMME 5. - ${}_A B$ est de longueur finie, et B a un unique idéal bilatère maximal.

Démonstration. - Supposons d'abord que ${}_A B$ n'est pas de longueur finie. Soit $b \in B$. On applique le lemme 1 pour obtenir N tel que $b \in N_{n-1}$. Puisque N_{n-1} est un idéal, $0 = (\omega_{(i)}(c_1, \dots, c_{n-1})N)/N_{n-1} = \omega_{(i)}(c_1, \dots, c_{n-1})M_1$ chaque fois que $c_j = b$ pour quelque j . Donc $M_1 \subseteq H = \{c \in B \mid A'c = 0\}$. Mais $N \subseteq \sum_j D^j M_1 \subseteq H$, puisque $DH \subseteq H$. Donc $b \in H$, et $H = B$, ce qui contredit la simplicité de B . Maintenant, soit $0 \subset M_1 \subset \dots \subset M_n = B$ une suite de Jordan-Hölder de ${}_A B$. Comme ci-dessus, $\omega_{(i)}(c_1, \dots, c_{n-1})M_k \subseteq M_{k-1}$ chaque fois que quelque $c_j \in M_{n-1}$. Considérant M_{n-1} comme une Ω -algèbre C , et écrivant Ω_C^i pour l'opérateur correspondant, on a $(\Omega_C^i)^{n-1} C = 0$. Soit N un idéal maximal de B . Si $N \neq M_{n-1}$, alors $B/N \cong C/N \cap C$, et $(\Omega^i)^{n-1} B \subseteq N$. Mais en ce cas, $A(\Omega^i)^{n-1} B$ est un idéal différentiel contenu dans N , donc égale zéro, et $(\Omega^i)^{n-1} B = 0$, ce qui contredit la simplicité de B . Donc $N = M_{n-1}$.

C. Q. F. D.

Pour finir la démonstration du théorème, il suffit de montrer que l'application σ du lemme 4 (pour $M = B$) est un homomorphisme de Ω -algèbres. Dans notre cas du lemme 4, d est une dérivation, et, par conséquent, S est une sous-algèbre. On a $(\omega b_1 \dots b_n)_S = \omega b_{1S} \dots b_{nS}$ ($n = n(\omega)$) parce que S est une sous-algèbre et N un idéal. Donc

$$\begin{aligned} \sigma(\omega(b_1 \otimes \gamma_1) \dots (b_n \otimes \gamma_n)) &= \gamma_1 \dots \gamma_n (\omega b_{1S} \dots b_{nS}) \\ &= \omega(\gamma_1 b_{1S}) \dots (\gamma_n b_{nS}) = \omega \sigma(b_1 \otimes \gamma_1) \dots \sigma(b_n \otimes \gamma_n) . \end{aligned}$$

C. Q. F. D.

Parce que nous permettons des ω pour lesquels $n(\omega) = 1$, des cas spéciaux du théorème sont les K -algèbres et les anneaux à involution. Aussi le théorème est valable pour les systèmes ternaires de Lie, qui ont la conséquence suivante pour les algèbres de Mal'cev (voir [3]).

COROLLAIRE. - Soient L une algèbre de Mal'cev, et T le système ternaire de Lie associé. Si L est simple, alors : ou T est simple, ou T a la forme $S[G]$, où S est un système ternaire de Lie simple, et G est comme ci-dessus.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] BLOCK (Richard). - Determination of the differentiably simple rings with a minimal ideal, *Annals of Math.*, Series 2, t. 90, 1969, p. 433-459.
- [2] KUROŠ (A. G.), POLIN (S. V.), BURGIN (M. S.), ... - A cycle of papers on multi-operator rings and algebras, *Russian Math. Surveys*, t. 24, 1969, fasc. 1, p. 1-57 ; translated from *Uspekhi Mat. Nauk*, t. 24, 1969, fasc. 1, p. 3-59.
- [3] LOOS (Ottmar). - Über eine Beziehung zwischen Malcev algebren und Lie-Tripel-systemen, *Pacific J. Math.*, t. 18, 1966, p. 553-562.

(Texte reçu le 16 juillet 1971)

Richard BLOCK
University of California
Department of Mathematics
RIVERSIDE, Calif. 92502
(Etats-Unis)
