

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

THÉRÈSE MERLIER

Sous-demi-groupes convexes des demi-groupes totalement ordonnés

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 23, n° 2 (1969-1970), exp. n° DG 7, p. DG1-DG5

http://www.numdam.org/item?id=SD_1969-1970__23_2_A7_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1969-1970, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SOUS-DEMI-GROUPES CONVEXES DES DEMI-GROUPES TOTALEMENT ORDONNÉS

par Thérèse MERLIER

Soit S un demi-groupe ; S est un demi-groupe ordonné s'il est muni d'une relation d'ordre compatible avec la multiplication. Ce demi-groupe S est dit réticulé s'il est ordonné en treillis ($\vee$ et $\wedge$ désignant respectivement les bornes supérieure et inférieure de deux éléments) et si on a les distributivités de la multiplication par rapport à $\vee$ et $\wedge$.

Dans un demi-groupe S réticulé, un sous-demi-groupe H est dit "s. t. c." s'il est sous-treillis convexe de S . Les sous-demi-groupes s. t. c. forment une famille de Moore si nous admettons la partie $\emptyset$ comme sous-demi-groupe s. t. c. Nous désignerons par S_x le sous-demi-groupe s. t. c. engendré par x . Si S est totallement ordonné, S_x est le sous-demi-groupe convexe engendré par x .

Dans un demi-groupe ordonné, un élément a est f-positif (f-négatif) si $a \leq a^2$ ($a^2 \leq a$) : Soient P l'ensemble des éléments f-positifs, et N l'ensemble des éléments f-négatifs. $P \cap N$ est l'ensemble des idempotents de S ; notons qu'en général $P \cup N$ est distinct de S .

Remarquons immédiatement que, dans un demi-groupe réticulé S , tout sous-demi-groupe s. t. c. H est réunion de sous-demi-groupes S_x .

PROPOSITION 1. - Dans un demi-groupe réticulé S ,

$$S_x = \{y \in S ; \exists \text{ entiers } p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_\ell ;$$

$$x^{p_1} \wedge \dots \wedge x^{p_r} \leq y \leq x^{q_1} \vee \dots \vee x^{q_\ell}\}$$

La démonstration est classique.

Remarquons que, dans le cas où $S = P \cup N$,

$$S_x = \{y \in S ; \exists \text{ entiers } p \text{ et } q, x^p \leq y \leq x^q\}$$

et on peut choisir p ou q égal à 1.

PROPOSITION 2. - Dans un demi-groupe réticulé S , tel que $S = P \cup N$, $S_x = S_y$ entraîne $x = y$.

$S_x = S_y$ si, et seulement si, $x \in S_y$ et $y \in S_x$; soit, puisque $S = P \cup N$, si $y^{p_1} \leq x \leq y^{q_1}$ et $x^{p_2} \leq y \leq x^{q_2}$, pour certains entiers p_i, q_i .

Plusieurs cas sont à distinguer :

(α) x et $y \in P$.

$$y \leq y^{p_1} \leq x \quad \text{et} \quad x \leq x^{p_2} \leq y.$$

D'où $x = y$.

(β) $x \in P$ et $y \in N$:

$$x \leq y^{q_1} \leq y, \text{ donc } x \leq y, \text{ et par suite } x^{q_2} \leq y^{q_2} \leq y.$$

D'où $y = x^{q_2} = y^{q_2}$

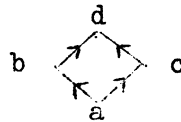
Si $q_2 = 1$, $y = x$.

Si $q_2 > 1$, y est idempotent, et $y = y^{p_1} \leq x \leq y^{q_1} = y$. D'où $x = y$ dans tous les cas.

(γ) Les cas " x et $y \in N$ ", et " $x \in N$ et $y \in P$ " sont semblables.

Remarque 1. - Dans un demi-groupe réticulé, la propriété " $S_x = S_y$ entraîne $x = y$ " peut être vérifiée sans que $S = P \cup N$.

Considérons, par exemple, le zéro-demi-groupe S suivant $S = \{a, b, c, d\}$, de zéro c . Ordonnons S de sorte que le diagramme de Hasse soit le suivant :



$c = b^2$ n'est pas comparable à b , dans ce demi-groupe réticulé. Cependant,

$$S_a = \{a, c\}; \quad S_b = S; \quad S_c = \{c\}; \quad S_d = \{d, c\}.$$

Rappelons les définitions suivantes :

Un demi-groupe S ordonné est dit non négativement ordonné si, $\forall a \in S$, $\forall b \in S$,

$$ab \not\leq a, \quad ba \not\leq a.$$

Dans le cas où S est totalement ordonné, nous retrouvons la notion de positivement ordonné ($a \leq ab$, $a \leq ba$). Non positivement ordonné se définit de façon duale.

Un demi-groupe S ordonné est archimédien si :

$$\begin{aligned} a \text{ et } b \in P, \quad a < b &\implies \exists n, \quad a^n \not\leq b; \\ a \text{ et } b \in N, \quad a < b &\implies \exists p, \quad a \not\leq b^p. \end{aligned}$$

PROPOSITION 3. - Dans un demi-groupe S réticulé, tel que $S = P \cup N$, S_x est un sous-demi-groupe archimédien, non négativement ordonné ou non positivement ordonné.

Soit $x \leq x^2$ par exemple. Montrons que, pour tout y de S_x , $y \leq y^2$.

$$y \in S_x \implies x \leq y \leq x^p.$$

D'où $y \leq x^p \leq y^p$; comme y est comparable à y^2 , $y \leq y^2$ si $p > 1$ (Si $p = 1$, $y = x$). Il est clair que S_x est archimédien.

Soient y et $y' \in S_x$. Si nous avons $yy' < y'$, nous en déduirions, par isotonie, $y^k y' < y'$ pour tout entier k . Or $x \leq y' \leq x^p \leq y'^p$ et $x \leq y \leq x^p$ (On peut choisir le même entier p puisque $S = P \cup N$). D'où

$$y' \leq y'^2 \leq x^p y' \leq y^p y' < y'.$$

Ceci est impossible, donc $yy' \not< y'$, et S_x est non négativement ordonné.

COROLLAIRE 1. - Dans un demi-groupe totalement ordonné, S_x est un sous-demi-groupe archimédien, positivement ou négativement ordonné.

Dans un demi-groupe réticulé (totalement ordonné), la famille des sous-demi-groupes s. t. c. (convexes) ne se réduit à S , que si S est lui-même réduit à un seul élément [2]. D'autre part, les sous-demi-groupes convexes forment un sous-inf-demi-treillis de $P(S)$, dont le plus petit élément existe, mais peut être vide.

Nous allons donner maintenant des conditions nécessaires et suffisantes, pour que les sous-demi-groupes convexes forment un sous-treillis de $P(S)$, ou une chaîne pour l'inclusion ensembliste.

THÉORÈME 1. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné. Les sous-demi-groupes convexes de S forment une chaîne si, et seulement si, S est archimédien et positivement ordonné (ou négativement ordonné).

Supposons S archimédien et positivement ordonné. Soient H et H' deux sous-demi-groupes convexes tels que $H \not\subseteq H'$; il existe alors $h \in H$ et $h \notin H'$. Puisque S est totalement ordonné et archimédien, nous avons, si h' est un élément quelconque de H' , $h < h' \leq h^n$ ou $h' < h \leq h'^n$. Seul le premier cas est réalisable, puisque $h \notin H'$. Par suite, $h' \in S_h$ et $H' \subseteq H$.

Réciproquement, supposons que les sous-demi-groupes convexes forment une chaîne. S n'est pas un demi-groupe idempotent, car dans un tel demi-groupe la condition précédente ne peut être vérifiée puisque $S_x = \{x\}$. Donc il existe au moins un x tel que $x < x^2$ par exemple. Dans ce cas, tout élément y de S est f -positif, puisque $S_x \subset S_y$ ou $S_y \subset S_x$. Soient alors a et $b \in S$; S_a est contenu dans S_b par exemple, d'où a et $b \in S_b$. Comme ce dernier est, d'après le corollaire 1, positivement ordonné et archimédien, il en est de même de S .

THÉOREME 2 . - Dans un demi-groupe totalement ordonné, les sous-demi-groupes convexes forment un treillis, sous-treillis de $P(S)$, de plus petit élément non vide si, et seulement si, S est un nil-demi-groupe.

Soit S un nil-demi-groupe totalement ordonné de zéro z . Puisque pour tout x de S , il existe un entier n tel que $x^n = z$, $\{z\}$ est le plus petit sous-demi-groupe convexe de S . Il suffit de montrer que la réunion de deux sous-demi-groupes convexes l'est encore. Si S_x et S_y sont deux sous-demi-groupes convexes quelconques engendrés par x et y , il est facile de voir que $S_x \cup S_y$ est encore un sous-demi-groupe, $S_x \cup S_y$ est évidemment convexe puisque $S_x \cap S_y$ est non vide. Tout semi-groupe convexe étant réunion de S_x , le résultat voulu s'en déduit.

Réciproquement, supposons que les sous-demi-groupes convexes de S forment un sous-treillis de $P(S)$ avec pour plus petit élément $H \neq \emptyset$. H est nécessairement de la forme S_z , et comme nous avons toujours $S_{z^2} \subseteq S_z$ et (Proposition 2) $z^2 = z$. Cet idempotent z est évidemment le seul. Soit $a \in S$; nous savons que $z \in S_a$ pour tout a de S . Si $a \leq a^2$, $a \leq z \leq a^n$. D'où $a^n \leq z^n = z \leq a^n$ et $a^n = z$; il en est de même si $a^2 \leq a$; S est donc bien un nil-demi-groupe.

Remarque 2. - Le théorème 2 donne une autre condition équivalente à celles données par E. Ja. GABOVIC [1], à savoir :

"Un demi-groupe totalement ordonné est un nil-demi-groupe si, et seulement si, il satisfait l'une des conditions suivantes :

- (a) S est archimédien et périodique,
- (b) S est réunion d'une suite croissante de demi-groupes nilpotents convexes."

THÉOREME 3. - Soit S un demi-groupe totalement ordonné. Si les sous-demi-groupes convexes de S forment un treillis, sous-treillis de $P(S)$, de plus petit élément vide, alors ce treillis est une chaîne.

Pour que ce treillis soit une chaîne, il suffit de montrer (théorème 1) que S est positivement ordonné (ou négativement ordonné) et archimédien. Supposons qu'il existe $a \in N - P$ et $b \in P$: si $a < b$, $S_b \cap S_{a^2} = \emptyset$ et $S_{a^2} \cup S_b$ ne serait pas convexe ($a \notin S_{a^2} \cup S_b$ et $a^2 < a < b$). Si $b < a$, le produit ab est idempotent [3]. Dans ce dernier cas, S_{ab} est le plus petit sous-demi-groupe convexe de S . Par suite, l'hypothèse $a \in N - P$, $b \in P$ est absurde, et S égale P par exemple.

Soient a et b deux éléments quelconques de S avec $a < b$, $a < a^2$, $b < b^2$. Il est clair que $S_a \cap S_b$ est vide si, et seulement si, $a^n < b$ pour tout n . Mais, dans ce cas, $S_a \cup S_{b^2}$ ne serait pas convexe ($a^n < b < b^2$),

donc il existe x appartenant à $S_a \cap S_b$ et $a \leq b \leq a^p$. D'où : S_b est contenu dans S_a .

En appliquant le corollaire 1, on voit que S est positivement ordonné et archimédien.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] GABOVIČ (E. Ja). - Demi-groupes périodiques totalement ordonnés [en Russe], Uspekhi Mat. Nauk, t. 23, 1968, p. 225-226.
- [2] KHION (Ja. V.). - Sur les demi-groupes partiellement ordonnés dans lesquels les sous-demi-groupes convexes propres sont disjoints [en Russe], Izv. Akad. Nauk SSSR, Serija Mat., t. 27, 1963, p. 67-74.
- [3] SAITO (Tôru). - Regular elements in an ordered semigroup, Pacif. J. of Math., t. 13, 1963, p. 263-295.

Mlle Thérèse MERLIER
15 boulevard de la République
92 - FONTENAY-AUX-ROSES

(Texte reçu le 15 septembre 1970)
