

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

JACQUES RAVEL

Théorie axiomatique de l'essentialité

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 18, p. 1-12

http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A9_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1967-1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

THÉORIE AXIOMATIQUE DE L'ESSENTIALITÉ

par Jacques RAVEL

Soit T un treillis complet, c'est-à-dire un ensemble ordonné (dont l'ordre sera noté $\leq$) dans lequel toute famille $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de T a une borne inférieure, encore appelée intersection, et notée $\bigwedge_{i \in I} x_i$ [et, par là même, une borne supérieure, encore appelée union, et notée $\bigvee_{i \in I} x_i$].

On appelle relation d'essentialité dans T , toute relation $x \triangleleft y$ entre éléments de T telle que

1° $(\forall x \in T), (x \triangleleft x)$ [réflexivité].

2° $(\forall x, y \in T), (x \triangleleft y \implies x \leq y)$ [c'est-à-dire plus forte que l'ordre de T , et, en particulier, telle que l'antisymétrie soit vérifiée, car si $x \triangleleft y$ et $y \triangleleft x$, on a $x \leq y$ et $y \leq x$, d'où $x = y$].

3° $(\forall x, y, z \in T), (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z \implies x \triangleleft z)$ [transitivité].

4° $(\forall x, y, z \in T), [(x \leq y \leq z \text{ et } x \triangleleft z) \implies (x \triangleleft y \text{ et } y \triangleleft z)]$ [convexité de T pour l'essentialité].

5° L'ensemble T est inductif pour l'ordre d'essentialité.

Si $x, y \in T$, et si $x \triangleleft y$, on dit que x est essentiel dans y , ou que y est une extension essentielle de x .

THÉOREME. - L'ensemble des fermetures d'un ensemble inductif est un treillis complet.

Rappelons :

- qu'on appelle fermeture dans un ensemble ordonné E , toute application f de E dans lui-même extensive, croissante et idempotente, c'est-à-dire telle que

1° $(\forall x \in E), (x \leq f(x))$,

2° $(\forall x, y \in E), (x \leq y \implies f(x) \leq f(y))$,

3° $(\forall x \in E), (f[f(x)] = f(x))$;

- que l'ensemble $I(f) = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ des invariants de f est égal à $f(E)$ et est tel que $f(x)$ soit le plus petit majorant de x invariant par f ;

- que d'ailleurs, inversement, si F est une partie de E telle que, pour tout élément x de E , l'ensemble F_x des éléments de F majorant x ait un plus petit élément $f(x)$, f est une fermeture dans E telle que $I(f) = F$;
- que la relation $f \leq g \iff (\forall x \in E) (f(x) \leq g(x))$ est une relation d'ordre dans l'ensemble E' des fermetures de E , et que $f \leq g \iff I(g) \subseteq I(f)$;
- enfin que l'application $f \rightarrow I(f)$ qui, à une fermeture, associe l'ensemble de ses invariants, est un anti-isomorphisme de E' sur l'ensemble Φ ordonné par inclusion des parties F de E telles que, pour tout élément x de E , l'ensemble F_x des éléments de F majorant x ait un plus petit élément.

Nous allons montrer que, si E est inductif, Φ n'est autre que l'ensemble Ψ des parties F de E telles que tout minorant maximal d'une partie quelconque de F appartienne à F : Φ étant une famille de Moore sera un treillis complet, et cette propriété se transmettra à E' par anti-isomorphisme.

On a toujours $\Phi \subseteq \Psi$; en effet, si y est un minorant maximal de la partie X de l'élément F de Φ , soit f la fermeture dont F est l'ensemble des invariants : On a $(\forall x \in X) (y \leq x)$, d'où $(\forall x \in X) (f(y) \leq f(x) = x)$ et, puisque $y \leq f(y)$, $f(y) = y$, vu la maximalité de y ; ainsi $y \in I(f) = F$ et $F \in \Psi$.

Achevons la démonstration du théorème en prouvant que si F est une partie de l'ensemble inductif E telle que tout minorant maximal d'une partie de F appartienne à F et si $x \in E$, l'ensemble F_x des éléments de F majorant x a un plus petit élément. Si X est une partie de E , nous désignerons par $\rho(X)$ [resp. par $\sigma(X)$] l'ensemble des majorants [resp. des minorants] de X dans E ; on dit qu'une partie S de E est une section de E s'il existe des parties X et Y de E telles que $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$.

Toute section d'un ensemble inductif est inductive (pour l'ordre induit) ; soit en effet $(x_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée non vide d'éléments de $S = \rho(X) \cap \sigma(Y)$ si $x = \sup_E x_i$, $x \in \rho(X)$, car si $j \in I$, on a $x \geq x_j \in \rho(X)$; si $y \in Y$, y est un majorant de la famille $(x_i)_{i \in I}$ et $y \geq x$, d'où $x \in \sigma(Y)$; ainsi $x \in S$ et $x = \sup_S x_i$.

La section $S = \rho(\{x\}) \cap \sigma(F_x)$ n'étant pas vide, puisque $x \in S$ a au moins un élément maximal y ; je dis que $y \in F$, car y est un minorant maximal dans E de la partie F_x de F (sinon, la maximalité de y dans S serait contredite) ; ainsi $y \in F_x$, et, puisque $y \in S \subseteq \sigma(F_x)$, y est bien le plus petit élément de F_x .

En particulier, tout ensemble inductif a une plus grande fermeture, et nous allons identifier la plus grande fermeture de l'ensemble inductif $T_{\triangleleft}$ qu'est l'ensemble T muni de l'ordre d'essentialité.

Dans cet ensemble, tout élément a au moins un majorant maximal [pour l'ordre de T aussi bien que pour l'ordre d'essentialité : en effet, si y est un $\triangleleft$ -majorant de x maximal pour l'essentialité, et si $z \geq y$ est tel que $x \triangleleft z$, alors, par convexité, $y \triangleleft z$, d'où $z = y$ et la maximalité de y pour l'ordre de T ; si y est un $\triangleleft$ -majorant de x maximal pour l'ordre de T , il l'est a fortiori pour l'ordre d'essentialité, qui entraîne l'ordre de T].

On désigne par $M(x)$ l'ensemble des extensions essentielles maximales de x (c'est-à-dire l'ensemble des majorants maximaux de x pour l'essentialité).

THÉOREME 1. - L'application $x \rightarrow \omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y$ est la plus grande fermeture de l'ensemble inductif $T_{\triangleleft}$.

1° Extensivité : Si $x \in T$, soit $y \in M(x)$; on a $x \leq \bigwedge_{y \in M(x)} y \leq y$, d'où, puisque $x \triangleleft y$, par convexité, $x \triangleleft \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$.

2° Croissance : Si $x, y \in T$ et si $x \triangleleft y$, alors $M(y) \subseteq M(x)$ (car si $z \in M(y)$, on a $y \triangleleft z$, d'où, par transitivité $x \triangleleft z$; et si $z \triangleleft t$, on a $y \triangleleft t$, par transitivité, d'où $z = t$, en raison de la maximalité de z : ainsi, $z \in M(x)$) d'où $\omega(x) = \bigwedge_{z \in M(x)} z \leq \bigwedge_{z \in M(y)} z = \omega(y)$. Ainsi $x \leq \omega(x) \leq \omega(y)$: mais, puisque $x \triangleleft y$ et que $y \triangleleft \omega(y)$, par extensivité, on a, par transitivité, $x \triangleleft \omega(y)$, d'où par convexité, $\omega(x) \triangleleft \omega(y)$.

3° Idempotence : Si $x \in T$, on a $M(\omega(x)) = M(x)$. En effet, puisque $x \triangleleft \omega(x)$, on a $M(\omega(x)) \subseteq M(x)$; soit maintenant $y \in M(x)$: on a $\omega(x) = \bigwedge_{y \in M(x)} y \triangleleft y$, d'où $x \leq \omega(x) \leq y$, et, puisque $x \triangleleft y$, par convexité, $\omega(x) \triangleleft y$; si, maintenant $y \triangleleft z$, on a $x \triangleleft \omega(x) \triangleleft y \triangleleft z$ d'où, par transitivité, $x \triangleleft z$; vu la maximalité de y il s'ensuit que $y = z$, d'où le fait que $y \in M(\omega(x))$; ainsi $M(x) \subseteq M(\omega(x))$, d'où $M(x) = M(\omega(x))$, $\omega[\omega(x)] = \bigwedge_{y \in M(\omega(x))} y = \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$ et le résultat.

Soit maintenant φ une fermeture de $T_{\triangleleft}$: si $x \in T$, soit $y \in M(x)$; on a $x \triangleleft y$, d'où, en raison de la croissance de φ , $\varphi(x) \triangleleft \varphi(y)$; mais puisque $y \triangleleft \varphi(y)$, en raison de l'extensivité, on a, compte tenu de la maximalité de y , $\varphi(y) = y$, d'où $\varphi(x) \triangleleft y$, et, en particulier, $\varphi(x) \leq y$, ce ($\forall y \in M(x)$) : ainsi, $\varphi(x) \leq \bigwedge_{y \in M(x)} y = \omega(x)$; comme $x \triangleleft \varphi(x)$, vu l'extensivité de φ , on a $x \leq \varphi(x) \leq \omega(x)$, d'où, puisque $x \triangleleft \omega(x)$, par convexité, $\varphi(x) \triangleleft \omega(x)$, ce ($\forall x \in T$) : ainsi $\varphi \triangleleft \omega$, et le résultat est démontré.

On dit qu'un élément x de T est fermé dans T si x est la seule extension essentielle de x dans T , c'est-à-dire si $(\forall y \in T) (x \triangleleft y \implies x = y)$.

THEOREME 2. - Les conditions suivantes sont équivalentes :

- 1° Tout élément x de T possède une plus grande extension essentielle dans T (qui est alors, par définition, $\omega(x)$) et ω est une fermeture dans T .
- 2° L'essentialité de T est compatible avec l'union (finie).
- 3° L'intersection de deux éléments de T fermés dans T est fermée dans T .

Remarquons que ω , qui est idempotente, est, pour l'ordre de T , une application extensive [car $x \triangleleft \omega(x) \implies x \leq \omega(x)$, ce $(\forall x \in T)$]; ainsi, pour que ω soit une fermeture dans T pour l'ordre de T , et non plus seulement dans $T_{\triangleleft}$, pour l'ordre d'essentialité, il faut et il suffit que ω soit croissante pour l'ordre de T , c'est-à-dire que l'on ait $(\forall x, y \in T) (x \leq y \implies \omega(x) \leq \omega(y))$. Une condition équivalente est la suivante : soit $I(\omega) = \{x \in T \mid \omega(x) = x\}$ l'ensemble des invariants de ω ; ω est une fermeture dans T si, et seulement si, $I(\omega)$ est tel que $(\forall x, y \in T) (\omega(x) \wedge \omega(y) \in I(\omega))$.

- La condition est nécessaire : en effet, si ω est une fermeture dans le treillis complet T , l'ensemble de ses invariants est un treillis complet dont l'intersection coïncide avec celle de T .

- La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient $x, y \in T$ tels que $x \leq y$; on a, puisque $x \leq \omega(x)$ et $y \leq \omega(y)$, $x = x \wedge y \leq \omega(x) \wedge \omega(y) \leq \omega(x)$, d'où, par convexité, puisque $x \triangleleft \omega(x)$, $x \triangleleft \omega(x) \wedge \omega(y)$. Mais on sait que $\omega(x)$ est le plus petit invariant de ω majorant x (pour l'essentialité), d'où

$$\omega(x) \leq \omega(x) \wedge \omega(y) \leq \omega(y),$$

et le résultat est démontré.

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 2.

1° $\implies$ 2° : Vu la commutativité de l'union, il suffit de prouver que $(\forall x, y, z \in T) (x \triangleleft y \implies x \vee z \triangleleft y \vee z)$; on a, vu 1°, et puisque $x \triangleleft y$, $y \leq \omega(x)$, ω étant une fermeture dans T , $x \leq x \vee z \implies \omega(x) \leq \omega(x \vee z)$, d'où $y \leq \omega(x \vee z)$; mais $z \leq x \vee z < \omega(x \vee z)$, d'où $y \vee z \leq \omega(x \vee z)$, soit $x \vee z \leq y \vee z \leq \omega(x \vee z)$. Mais, vu l'extensivité de ω , $x \vee z \triangleleft \omega(x \vee z)$, d'où, par convexité $x \vee z \triangleleft y \vee z$.

2° $\implies$ 3° : Soient x et y des éléments de T fermés dans T : si $x \wedge y \triangleleft z$ on a, vu 2°, $x = x \vee (x \wedge y) \triangleleft x \vee z$, d'où $x \vee z = x$ et $z \leq x$, de même $z \leq y$, d'où $z \leq x \wedge y$ et $z = x \wedge y$; ainsi $x \wedge y$ est fermé dans T , et le résultat est démontré.

$3^\circ \Rightarrow 1^\circ$: Si $x \in T$, les extensions essentielles maximales de x sont fermées dans T : ainsi, si $y, z \in M(x)$, $y \wedge z$ est fermé dans T ; mais $x \leq y \wedge z \leq y$ et $x \triangleleft y$, d'où, par convexité, $y \wedge z \triangleleft z$, d'où $y \wedge z = z$ et $y \geq z$; de même $z \geq y$ et $z = y$ est l'unique extension essentielle maximale de x , donc la plus grande extension essentielle de x , vu l'inductivité de l'ensemble des majorants de x pour l'essentialité.

Tout élément x de T a donc une plus grande extension essentielle $\omega(x)$: il s'ensuit que les invariants de ω sont précisément les éléments de T fermés dans T , d'où le fait que ω est une fermeture dans T , compte tenu de la condition suffisante d'une équivalence précédente.

Les conditions précédentes sont aussi équivalentes à la suivante :

4° Toute intersection d'une famille quelconque d'éléments de T fermés dans T est fermée dans T .

En effet, $4^\circ \Rightarrow 3^\circ$, et, si on a 3° , ω est une fermeture dans le treillis complet T , et 4° est bien vérifiée.

Remarque. - L'union dans $T_\triangleleft$, quand elle existe, coïncide avec l'union dans T : en effet, si $\bigcup_{i \in I} x_i = \sup_{i \in I} x_i$, on a $(\forall i \in I) (x_i \triangleleft \bigcup_{i \in I} x_i)$, d'où $(\forall i \in I) (x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i)$ et $\bigvee_{i \in I} x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i$. Soit $j \in I$: on a $x_j \leq \bigvee_{i \in I} x_i \leq \bigcup_{i \in I} x_i$ et $x_j \triangleleft \bigcup_{i \in I} x_i$, d'où par convexité, $\bigvee_{i \in I} x_i \triangleleft \bigcup_{i \in I} x_i$ et $(\forall j \in J) (x_j \triangleleft \bigvee_{i \in I} x_i)$: ainsi $\bigvee_{i \in I} x_i = \bigcup_{i \in I} x_i$ et le résultat est démontré.

THÉOREME 3. - Soit T un treillis complet intercontinu [c'est-à-dire tel qu'on ait, pour toute famille totalement ordonnée $(x_i)_{i \in I}$ d'éléments de T (donc telle que $(\forall i, j \in I) (x_i \leq x_j$ ou $x_j \leq x_i)$] et pour tout élément x de T , $x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I} (x \wedge x_i)$]. Si F est une partie quelconque de T , la relation

$$x \triangleleft_F y = [x \leq y \text{ et } (\forall z \in F)(x \wedge z = 0 \Rightarrow y \wedge z = 0)]$$

est une relation d'essentialité dans T [nous désignons par 0 le plus petit élément de T].

Démonstration.

1° $(\forall x \in T) [x \leq x \text{ et } (\forall z \in F)(x \wedge z = 0 \Rightarrow x \wedge z = 0)]$ d'où la réflexivité de $\triangleleft_F$.

2° $\triangleleft_F$ est par définition même plus forte que l'ordre de T .

3° Si $x \triangleleft_F y$ et $y \triangleleft_F z$, on a $x \leq y$ et $y \leq z$, d'où $x \leq z$, et si $t \in F$ est tel que $x \wedge t = 0$, alors puisque $x \triangleleft_F y$, $y \wedge t = 0$, d'où, puisque $y \triangleleft_F z$, $z \wedge t = 0$. Ainsi, $x \triangleleft_F z$, et $\triangleleft_F$ est transitive.

4° Si $x \leq y \leq z$ et $x \triangleleft_F z$, montrons que $x \triangleleft_F y$ et que $y \triangleleft_F z$. En effet, si $t \in F$ est tel que $x \wedge t = 0$, on a aussi $z \wedge t = 0$, d'où, puisque $x \wedge t \leq y \wedge t \leq z \wedge t$, $y \wedge t = 0$, et $x \triangleleft_F y$; si $t \in F$ est tel que $y \wedge t = 0$, on a, puisque $0 \leq x \wedge t \leq y \wedge t$, $x \wedge t = 0$, d'où aussi $z \wedge t = 0$. Ainsi, $y \triangleleft_F z$, et la convexité de $\triangleleft_F$ est démontrée.

5° Soit $(y_i)_{i \in I}$ une famille totalement ordonnée pour $\triangleleft_F$ d'éléments de T $[(\forall i, j \in I)(y_i \triangleleft_F y_j \text{ ou } y_j \triangleleft_F y_i)]$. On a $y = \bigvee_{i \in I} y_i = \sup_{i \in I} y_i$. En effet,

(a) Si $i \in I$, montrons que $y_i \triangleleft_F y$. On a $y_i \leq y$; soit maintenant $z \in F$ tel que $y_i \wedge z = 0$. Si $j \in I$, ou bien $y_i \triangleleft_F y_j$, et alors $y_j \wedge z = 0$, ou bien $y_j \triangleleft_F y_i$, et alors $y_j \leq y_i$ et $0 \leq y_j \wedge z \leq y_i \wedge z = 0$ entraîne $y_j \wedge z = 0$. Ainsi $(\forall j \in I)(y_j \wedge z = 0)$, d'où $y \wedge z = (\bigvee_{j \in I} y_j) \wedge z = \bigvee_{j \in I} (y_j \wedge z) = 0$ et $y_i \triangleleft_F y$.

(b) Soit $x \in T$ tel que $(\forall i \in I)(y_i \triangleleft_F x)$. On a, en particulier $(\forall i \in I)(y_i \leq x)$, d'où $y \leq x$. Ainsi, si $i_0 \in I$, on a $y_{i_0} \leq y \leq x$ et $y_{i_0} \triangleleft_F x$, d'où $y \triangleleft_F x$ et le fait que y est bien le plus petit $\triangleleft_F$ -majorant des y_i .

L'ensemble des relations d'essentialité définies dans un treillis T est, pour l'ordre d'implication, un treillis complet dont le plus petit élément est l'égalité et dont le plus grand élément est l'ordre de T . Notons au passage qu'on peut associer, à tout élément t de T , la relation $\triangleleft_F$ correspondant à

$$F = \{0, t\} = \{x \in T \mid x \leq t\}.$$

Dès que F est une section initiale de T , la relation d'essentialité associée à F est compatible avec l'intersection : c'est le cas en particulier lorsque $F = T$, et ce fait nous servira dans la démonstration du théorème suivant.

THÉOREME 4. - Soit T un treillis de Johnson [c'est-à-dire un treillis complet, modulaire et intercontinu] et soit ω la plus grande fermeture de l'ensemble T ordonné par la relation

$$x \triangleleft y \iff [x \leq y \text{ et } (\forall z \in T)(x \wedge z = 0 \implies y \wedge z = 0)]$$

(dont nous dirons qu'elle est la relation d'essentialité de T).

Les propriétés équivalentes du théorème 2 sont encore équivalentes à la suivante :

5° ω est une fermeture dans T , et le treillis des invariants de ω est modulaire.

[ω étant une fermeture dans le treillis complet T , $I(\omega)$ est un treillis complet, pour l'ordre induit par celui de T : son intersection $\cap$ coïncide avec celle de T , et son union $\cup$ est donnée par $\bigcup_{i \in I} x_i = \omega(\bigvee_{i \in I} x_i)$; sa modularité peut donc s'exprimer par le fait que $(\forall x, y, z \in I(\omega))$ les relations

$$\begin{cases} x \leq y \\ x \wedge z = y \wedge z \\ \omega(x \vee z) = \omega(y \vee z) \end{cases}$$

entraînent l'égalité de x et de y .]

1° $\implies$ 5° : Comme $x \leq y \implies x \vee z \leq y \vee z \leq \omega(y \vee z) = \omega(x \vee z)$ et puisque $x \vee z \triangleleft \omega(x \vee z)$, en raison de l'extensivité de ω , on a, par convexité, $x \vee z \triangleleft y \vee z$, d'où, en raison de la compatibilité de l'essentialité avec l'intersection, $(x \vee z) \wedge y \triangleleft (y \vee z) \wedge y = y$; mais, par modularité, puisque $x \leq y$,

$$(x \vee z) \wedge y = x \vee (z \wedge y) = x \vee (z \wedge x) = x$$

et $x \triangleleft y$, d'où $y = x$, puisque la plus grande extension essentielle de x est $\omega(x) = x$ (x étant invariant par ω).

5° $\implies$ 1° : Si $x \in T$, l'ensemble $\{y \in T \mid x \wedge y = 0\}$ est un sous-ensemble inductif non vide de T [inductif en raison de l'intercontinuité, non vide, puisque 0 lui appartient]. Il a donc des éléments maximaux qui seront appelés compléments de x (dans T) ; JOHNSON a montré que si y est un complément de x dans T , on a $x \vee y \triangleleft I$ [nous désignons par I le plus grand élément de T . On a donc $x \vee y \leq I$, et, si z est un élément de T tel que $(x \vee y) \wedge z = 0$, on a en appliquant la modularité,

$$\begin{aligned} y \vee [x \wedge (y \vee z)] &= (y \vee x) \wedge (y \vee z) \\ &= (x \vee y) \wedge (z \vee y) \\ &= [(x \vee y) \wedge z] \vee y \\ &= 0 \vee y \\ &= y \end{aligned}$$

d'où $x \wedge (y \vee z) \leq y$ et, puisque $x \wedge (y \vee z) \leq x$, $0 \leq x \wedge (y \vee z) \leq x \wedge y = 0$; ainsi, $x \wedge (y \vee z) = 0$ et, y étant un complément de x , on a, puisque $y \vee z \geq y$, $y \vee z = y$, d'où $z \leq y < x \vee y$ et $0 = (x \vee y) \wedge z = z$].

Il résulte de la définition de l'essentialité que tout complément y d'un élément x de T est fermé dans T [car si $y \triangleleft z$, on a, puisque $x \wedge y = 0$,

$x \wedge z = 0$, d'où, puisque $z \geq y$, et puisque y est un complément de x , $z = y$; la réciproque est d'ailleurs vraie, tout élément x de T fermé dans T étant un complément de l'un quelconque de ses compléments. En effet, si x' est un complément de l'élément x de T dans T , il existe, puisque $x \wedge x' = 0$, un majorant x'' de x maximal tel que $x'' \wedge x' = 0$, c'est-à-dire un complément de x' majorant x ; or $x \vee x' \leq I$, et $(x \vee x') \wedge x'' \leq I \wedge x'' = x''$; mais, par modularité $(x \vee x') \wedge x'' = x \vee (x' \wedge x'') = x \vee 0 = x$ et $x \leq x''$. En particulier, si x est fermé dans T , $x = x''$ est un complément de x' dans T].

En particulier, tout complément est invariant par ω , ce qui nous permet d'affirmer que si y est un complément d'un élément x de $I(\omega)$, on a $x \cup y = I$ [en effet, x, y et I appartiennent à $I(\omega)$, et on a $x \vee y \leq I$, d'où $\omega(x \vee y) = I$ soit $x \cup y = I$].

Remarquons enfin que deux éléments dont l'un est essentiel dans l'autre ont les mêmes compléments (plus généralement les conditions suivantes sont équivalentes pour deux éléments x et y de T :

1° x et y ont les mêmes compléments.

2° $(\forall z \in T) (x \wedge z = 0 \iff y \wedge z = 0)$.

3° $x \wedge y \leq x$ et $x \wedge y \leq y$.

1° $\implies$ 2° : Si $x \wedge z = 0$, soit z' un complément de x majorant z . C'est aussi un complément de y , d'où $y \wedge z' = 0$, et, puisque $0 \leq y \wedge z \leq y \wedge z' = 0$, $y \wedge z = 0$.

2° $\implies$ 3° : On a $x \wedge y \leq y$, et, si $(x \wedge y) \wedge t = 0$, $x \wedge (y \wedge t) = 0$, d'où $y \wedge (y \wedge t) = 0$, soit $y \wedge t = 0$, et $x \wedge y \leq y$: de même $y \wedge x \leq x$, soit $x \wedge y \leq x$.

3° $\implies$ 1° : x et y ayant les mêmes compléments que $x \wedge y$, dont ils sont extension essentielle, ont les mêmes compléments].

Nous pouvons maintenant démontrer que 5° $\implies$ 1° : Si $t \in T$, soient z une extension essentielle maximale de t , $x = \omega(t)$ et y un complément de x dans T . x, y et z appartiennent à $I(\omega)$ et on a $x \leq z$, d'où

$$x \cup (y \cap z) = (x \cup y) \cap z = I \cap z = I \wedge z = z;$$

mais le complément y de x est aussi un complément de z , d'où $y \cap z = y \wedge z = 0$ et $x \cup (y \cap z) = x \cup 0 = x$. Ainsi $z = x = \omega(t)$ est l'unique extension essentielle maximale de t , donc la plus grande extension essentielle de t .

Si le treillis de Johnson T possède l'une des cinq propriétés équivalentes précédentes, on a

$$(\forall x, y \in T) \quad \omega(x \wedge y) = \omega(x) \wedge \omega(y) \quad .$$

En effet, puisque $x \triangleleft \omega(x)$, et $y \triangleleft \omega(y)$, on a

$$x \wedge y \triangleleft \omega(x) \wedge \omega(y) \quad \text{donc} \quad \omega(x) \wedge \omega(y) \triangleleft \omega(x \wedge y)$$

puisque $\omega(x \wedge y)$ est la plus grande extension essentielle de $x \wedge y$; mais l'élément $\omega(x) \wedge \omega(y)$ de $I(\omega)$ est fermé dans T , d'où le résultat invoqué.

Notons qu'un treillis T complet, intercontinu et distributif vérifie les cinq propriétés équivalentes précédentes. En effet, la distributivité entraîne la modularité, et la compatibilité de l'essentialité avec l'union [si $x \triangleleft y$, on a $x \vee z \triangleleft y \vee z$: en effet, $x \leq y \implies x \vee z \leq y \vee z$, et, si $(x \vee z) \wedge t = 0$, $(x \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0$, d'où $x \wedge t = 0$ (et $y \wedge t = 0$) et $z \wedge t = 0$. Ainsi

$$(y \vee z) \wedge t = (y \wedge t) \vee (z \wedge t) = 0 \quad] .$$

De plus, dans ce cas, $I(\omega)$ est distributif [car si $x, y, z \in I(\omega)$,

$$\begin{aligned} (x \cap z) \cup (y \cap z) &= (x \wedge z) \cup (y \wedge z) = \omega[(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] \\ &= \omega[(x \vee y) \wedge z] \\ &= \omega(x \vee y) \wedge \omega(z) \\ &= \omega(x \vee y) \wedge z \\ &= (x \cup y) \cap z \quad] . \end{aligned}$$

Nous allons maintenant passer aux applications aux modules. Tous les modules considérés dans ce qui suit seront des modules à gauche unitaires sur l'anneau unitaire A ; nous désignerons par $\hat{M}$ une enveloppe injective du module M , par $T(M)$ [resp. par $T_{\triangleleft}(M)$] le treillis des sous-modules de M [resp. l'ensemble des sous-modules de M ordonné par essentialité] et, enfin, par ω_M la plus grande fermeture de $T_{\triangleleft}(M)$. Le résultat fondamental est la suivant :

THEOREME 5. - ω_M est une fermeture dans $T(M)$, et elle est induite par $\omega_{\hat{M}}$ dans $\hat{M}$ [en ce sens que $(\forall N \leq M) (\omega_M(N) = \omega_{\hat{M}}(N) \cap M)$].

Remarquons d'abord que si Q est un module injectif, ω_Q est croissante dans $T(Q)$; en effet, si $N \leq N' \leq Q$, soit Q'_0 une extension essentielle maximale de N' dans Q : Q'_0 étant fermé dans l'injectif Q , est injectif, et contient une extension essentielle maximale Q_0 de N ; Q_0 étant fermé dans l'injectif Q'_0 est injectif donc est une extension essentielle maximale de N dans Q , contenue dans Q'_0 , d'où le résultat.

Notons que ω_Q fait correspondre à un sous-module N de Q l'intersection des enveloppes injectives de N contenues dans Q . Il résulte alors d'un théorème de Renault suivant lequel les sous-modules d'un module M fermés dans M sont précisément les intersections avec M des sous-modules injectifs de $\hat{M}$ que $(\forall N \leq M)$ $(\omega_M(N) = \omega_{\hat{M}}(N) \cap M)$ [en effet, les extensions essentielles maximales dans M d'un sous-module N de M sont précisément les intersections avec M des enveloppes injectives de N dans $\hat{M}$].

La croissance de ω_M résulte alors de celle de $\omega_{\hat{M}}$, et le théorème est démontré.

Si tout sous-module N d'un module M possède une plus grande extension essentielle dans M , celle-ci n'est autre que $\omega_M(N)$; ω_M étant une fermeture dans $T(M)$; les assertions suivantes sont équivalentes pour un module M .

1° Tout sous-module N de M possède une plus grande extension essentielle dans M .

2° L'essentialité est compatible avec la somme dans $T(M)$.

3° L'intersection de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M .

4° Toute intersection de sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M .

L'ensemble ordonné par inclusion des sous-modules de M fermés dans M est alors un treillis complet, modulaire et complémenté.

C'est le cas, en particulier, si le sous-module singulier

$$M^{\triangleleft} = \{x \in M \mid \text{An}(x) \triangleleft A\}$$

du module M est nul, car l'essentialité est alors compatible avec l'union dans $T(M)$ [en effet, si $N, N', P \leq M$ et si $N \triangleleft N'$, soit

$$n' + p \in (N' + P)^* = (N' + P) - \{0\}.$$

On a

$$I = \{\lambda \in A \mid \lambda n' \in N\} \subseteq J = \{\lambda \in A \mid \lambda(n' + p) \in N + P\}$$

d'où, puisque $I \triangleleft A$ (en raison de l'essentialité de N dans N'), $J \triangleleft A$ (par convexité) et le fait que $J \not\subseteq \text{An}(n' + p)$ (puisque $M^{\triangleleft} = 0$); ainsi, il existe un élément λ de A tel que $\lambda(n' + p) \in (N + P)^* = (N + P) - \{0\}$ et $N + P \triangleleft N' + P$. On a dans ce cas

$$\omega(N) = \{x \in M \mid \{\lambda \in A \mid \lambda x \in N\} \triangleleft A\}$$

soit

$$\omega(N) = \{x \in M \mid (\forall I \leq A)[I \neq 0 \implies (\exists \lambda \in I^* = I - \{0\})(\lambda x \in N)]\}.$$

JOHNSON avait démontré ce théorème dans le cas où l'anneau A était tel que $A^{\Delta} = 0$.

Il y a bien entendu des cas où notre théorème s'applique à un module M , sans que l'on ait $M^{\Delta} = 0$ [par exemple si M est un module uniforme tel que $M^{\Delta} \neq 0$, tel l'anneau $A = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}p^2$ en tant que A -module, p étant un entier premier].

Remarquons maintenant que pour que l'essentialité soit compatible avec la somme dans $T(M)$, il faut et il suffit que M possède la propriété suivante :

Si $N, N' \leq M$ et si P est un sous-module de N' maximal tel que $N \cap P = 0$, alors $N \oplus P \triangleleft N + N'$.

La condition est nécessaire, car, dans les conditions indiquées, P est un complément de $N \cap N'$ dans N' et $(N \cap N') + P \triangleleft N'$, d'où $N + (N \cap N') + P \triangleleft N + N'$ soit $N \oplus P \triangleleft N + N'$.

La condition est suffisante : si elle est vérifiée, soient $N, N', P \leq M$ tels que $N \triangleleft N'$. Montrons que $N + P \triangleleft N' + P$. Soit R un sous-module de P maximal tel que $N \cap R = 0$. Par hypothèse, $N \oplus R \triangleleft N + P$, puisque $N \triangleleft N'$, on a $N' \cap R = 0$, et R est un sous-module de P maximal tel que $N' \cap R = 0$. Par hypothèse, $N' \oplus R \triangleleft N' + P$.

Or, l'essentialité étant compatible avec la somme directe, on a $N \oplus R \triangleleft N' \oplus R$, d'où $N \oplus R \triangleleft N' + P$ et, puisque $N \oplus R \leq N + P \leq N' + P$, par convexité, $N + P \triangleleft N' + P$, et le résultat est démontré.

En particulier, il résulte de ce critère que si l'essentialité est compatible avec la somme dans le treillis des sous-modules d'un module de Renault M , alors la somme de deux sous-modules de M fermés dans M est fermée dans M [on appelle en effet module de Renault un module M dans lequel tout sous-module fermé est un supplémentaire de l'un quelconque de ses compléments, ou, ce qui revient au même, tel que la somme directe de deux sous-modules de M fermés dans M soit fermée dans M ; une condition nécessaire et suffisante pour qu'un module soit de Renault étant qu'il soit stable par tous les endomorphismes idempotents de son enveloppe injective, tout module quasi-injectif est un module de Renault, ce que l'on peut d'ailleurs prouver directement : si N est un sous-module du module quasi-injectif M fermé dans M , et si N' est un complément de N dans M , l'application canonique de $N \oplus N'$ sur N se prolonge en un endomorphisme f de M ; on a $\text{Ker}(f) = N'$, $\text{Im}(f) = N$, donc f est idempotent, et

$$M = \text{Im}(f) \oplus \text{Ker}(f) = N \oplus N'].$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] JOHNSON (R. E.). - Structure theory of faithful rings, I and II, Trans. Amer. math. Soc., t. 84, 1957, p. 508-544.
 - [2] JOHNSON (R. E.) and WONG (E. T.). - Quasi-injective modules and irreducible rings, J. London math. Soc., t. 36, 1961, p. 260-268.
 - [3] RAVEL (Jacques). - Injectivité ; Généralisations et applications extensions essentielles dans un treillis de Johnson, Publications du Département de Mathématiques, t. 4, 1967, fasc. 2, p. 1-73 (Thèse 3e cycle, Lyon, 1966).
 - [4] RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un A -module, Séminaire Dubreil-Pisot : Algèbre et théorie des nombres, 16e année, 1962/63, n° 16, 12 p.
-