Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Julian Petresco

Prégroupes de mots et problème des mots

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, n° 2 (1967-1968), exp. n° 17, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A8_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 17

29 avril et 6 mai 1968

PRÉGROUPES DE MOTS ET PROBLÈME DES MOTS

par Julian PETRESCO

1. Prégroupes.

On considère un ensemble E et l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. E est un prégroupe si :

(1) Deux applications $f : E \times E \to \mathcal{P}(E) - \emptyset$ et $g : E \times E \to \mathcal{P}(E)$ sont distinguées. Si $a , b \in E$, on note : $a \leftarrow b = f(a , b)$, $a \rightarrow b = g(a , b)$. Si $A , B \subseteq E$ et $\omega = \{\leftarrow , \rightarrow\}$, $A\omega B = \bigcup_{a\in A, b\in B} (a\omega b)$. Enfin :

$$\bar{\omega} = \begin{cases} \leftarrow ; & \omega = \rightarrow \\ \rightarrow ; & \omega = \leftarrow \end{cases} .$$

(2) $a' \in a \leftarrow b \iff a \in a' \rightarrow b$.

(3_1) $a \leftarrow (b \leftarrow c) \subseteq (a \leftarrow b) \leftarrow c$;

(3_2) $a \leftarrow (b \rightarrow c) \subseteq (a \leftarrow b) \rightarrow c$;

(3_3) $(a \rightarrow b) \leftarrow c \subseteq (a \leftarrow c) \rightarrow b$.

$(a_1 \omega_1 a_2 \omega_2 \cdots \omega_{n-1} a_n)_\alpha$ est une expression comportant $n - 1$ signes $\omega_i \in \{\leftarrow , \rightarrow\}$ et les n éléments $a_1 , a_2 , \cdots , a_n$ dans cet ordre, associés de manière arbitraire ; en particulier

$$a_1 \omega_1 a_2 \omega_2 \cdots \omega_{n-1} a_n = [\cdots (a_1 \omega_1 a_2)\omega_2 a_3 \cdots] \omega_{n-1} a_n$$

$$(a_1 \omega_1 a_2 \omega_2 \cdots \omega_{n-1} a_n)_* = a_1 \omega_1 [\cdots a_{n-2} \omega_{n-2} (a_{n-1} \omega_{n-1} a_n) \cdots] .$$

Des notations analogues sont utilisées pour $A_i \subseteq E$ à la place des $a_i \in E$. On a:

$(2')$ $a \in (a \leftarrow b) \rightarrow b$, $a \rightarrow b \neq \emptyset \implies a \in (a \rightarrow b) \leftarrow b$.

$(3_2) \iff (3'_2)$ $a \rightarrow (b \leftarrow c) \subseteq (a \rightarrow c) \rightarrow b$.

$(3_3) \iff (3'_3)$ $a \rightarrow (b \rightarrow c) \subseteq (a \leftarrow c) \rightarrow b$.

PROPOSITION 1.1 (valable pour $B_i \subseteq E$).

$$a' \in a\omega_1 b_1 \omega_2 \cdots \omega_n b_n \iff a \in a'\bar{\omega}_n b_n \bar{\omega}_1 \cdots \bar{\omega}_1 b_1 .$$

PROPOSITION 1.2 (valable pour $A_i \subseteq E$).

$$(a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots \leftarrow a_n)_* \subseteq (a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots \leftarrow a_n)_\alpha \subseteq a_1 \leftarrow a_2 \leftarrow \dots \leftarrow a_n \ .$$

PROPOSITION 1.3 (valable pour $A_i \subseteq E$).

$$(a_0\ \omega_1\ a_1\ \omega_2 \dots \omega_n\ a_n)_\alpha \subseteq a_0\ \omega'_1\ a_{i_1}\ \omega'_2 \dots \omega'_n\ a_{i_n} \ ;$$

$$a_0\ \omega_1\ a_1\ \omega_2 \dots \omega_n\ a_n \subseteq a_0 \leftarrow a_{i_1} \leftarrow \dots \leftarrow a_{i_k} \rightarrow a_{j_1} \rightarrow \dots \rightarrow a_{j_h} \ ,$$

où $\omega_{i_1}, \dots, \omega_{i_k} = \leftarrow$, $\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_h} = \rightarrow$, $k + h = n$.

E est prégroupe unitaire si :

(4) $a \leftarrow 1 = 1 \leftarrow a = a \rightarrow 1 = a$, $a \neq 1 \implies 1 \rightarrow a = \emptyset$, $a \rightarrow a = 1$.

On note :

(5) $a \leqslant b \iff b \rightarrow a \neq \emptyset$.

PROPOSITION 1.4. - Si E est unitaire, $a \leqslant b$ est une relation d'ordre ;

$$1 \leqslant a \ ; \qquad b \leqslant a \leftarrow b \ .$$

$F \subseteq E$ est sous-prégroupe de E si :

(6) $a , b \in F \implies a\omega b \subseteq F$.

L'intersection d'une famille de sous-prégroupes est sous-prégroupe. Si $X \subseteq E$, l'intersection (X) des sous-prégroupes contenant X est le sous-prégroupe engendré par X .

Si l'on considère ω_i , $1 \leqslant i \leqslant n-1$; ω'_j , $1 \leqslant j \leqslant m-1$; ω''_k , $1 \leqslant k \leqslant p-1$, ... ,

$$A^{\omega_i n}\ B^{\omega'_j m}\ C^{\omega''_k p} \dots = A\omega_1\ A \dots \omega_{n-1}\ A\omega'_1\ B \dots \omega'_{m-1}\ B\omega''_1\ C \dots \omega''_{p-1}\ C \dots \ .$$

On convient que $A^{\omega_i 0} = 1$, $A^{\omega_i 1} = A$, $A^{\omega_i n}\ B^{\omega'_j 1} = A^{\omega_i n}$. Si $\omega_i = \omega$, $\omega'_j = \omega'$, $\omega''_k = \omega''$, ... , on écrit $A^{\omega n}\ B^{\omega' m}\ C^{\omega'' p} \dots$. Par exemple :

$$A^{\leftarrow n}\ A^{\rightarrow m} = \underbrace{A \leftarrow \dots \leftarrow A}_{n} \rightarrow A \rightarrow \dots \rightarrow A \ .$$

Enfin :

$$A^{\omega_i} B^{\omega'_j} C^{\omega''_k} \ldots = \bigcup_{n,m,p,\ldots;\omega_i,\omega'_j,\omega''_k,\ldots} A_i^n B_j^{\prime m} C_k^{\prime\prime p} \ldots ,$$

de sorte que, par exemple, $A^{\omega_i} A^{\omega_i} = A^{\omega_i}$, et que :

(6') $X \subseteq F \Longrightarrow X^{\omega_i} \subseteq F$.

PROPOSITION 1.5. - $(X) = X^{\omega_i} = X^{\leftarrow} X^{\rightarrow}$.

PROPOSITION 1.6. - $a \in bX^{\omega_i}$ est une relation d'équivalence.

2. Prégroupes de mots.

Soient G un groupe, et $A = \{a_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un ensemble indexé d'éléments $a_\alpha \in G$; $(r_i) = (r_1 , \ldots , r_n)$ avec $r_i \equiv a_{\alpha_i}^{\varepsilon_i}$, $\alpha_i \in I$, $\varepsilon_i \in \{1 , -1\}$ est dite A-suite ; si $r_1 r_2 \ldots r_n = r \in G$, le couple $((r_i) , r)$ est dit A-mot défini par (r_i) de valeur r , qu'on note R ou encore $r_1 r_2 \ldots r_n$. Si S est le mot défini par $(s_j) = (s_1 , \ldots , s_m)$ avec $s_j \equiv a_{\beta_j}^{n_j}$, de valeur s :

$$R \equiv S \iff (r_i) = (s_i) \iff n = m , \ \alpha_i = \beta_i , \ \varepsilon_i = \eta_i ;$$

$$R = S \iff r = s ; \quad R \equiv S \Longrightarrow R = S ;$$

$$RS \equiv r_1 \ldots r_n \, s_1 \ldots s_m ; \quad R^{-1} \equiv r_n^{-1} \ldots r_1^{-1} .$$

Si $i \leqslant j$, $(r_i , r_j) \equiv r_i r_{i+1} \ldots r_j$ est dit segment de R . Un sous-mot S de R (on écrit $S \subseteq R$) est cosegment de R si l'on a $S \equiv (r_i , r_j)$ ou $R - (r_i , r_j)$; n est la longueur de R , notée $\lambda(R)$; $(\emptyset , 1)$ est le mot vide, noté 1 ; $\lambda(1) = 0$. Un cosegment S est majeur si $\lambda(S) \geqslant \frac{1}{2} \lambda(R)$.

On note $R \leftarrow S$ l'ensemble des $n + 1$ A-mots

$$SR , \ldots , r_1 \ldots r_i \, S \, r_{i+1} \ldots r_n , \ldots , RS$$

obtenus par insertion de S dans R ; en particulier

$$R \xleftarrow{r_i} S \equiv r_1 \ldots r_i \, S \, r_{i+1} \ldots r_n .$$

Si $S_1 , \ldots , S_p$ sont les segments de R avec $S_1 \equiv \ldots \equiv S_p \equiv S$, on note $R \rightarrow S$ l'ensemble des A-mots

$$R - S_1 , \ldots , R - S_p$$

obtenus par expulsion d'un segment $\equiv S$ de R ; si de tels segments n'existent pas, $R \rightarrow S \equiv \emptyset$.

L'ensemble des A-mots avec $\equiv$ comme égalité, muni des opérations $\leftarrow$ et $\rightarrow$, est un prégroupe unitaire (l'unité est 1) dans lequel

$$S \leqslant R \iff S \text{ est } \equiv \text{ à un segment de } R \ .$$

On note R^0 l'ensemble des n A-mots obtenus par permutations circulaires des éléments de R ; en particulier

$$R^{0r_i} = r_i \dots r_n \, r_1 \dots r_{i-1} \ .$$

Si $S \subseteq R$, S^{0r_i} est le mot de S^0 commençant par le premier élément de S après r_i , dans R . Si X est un ensemble de A-mots, $X^0 = \bigcup_{R \in X} R^0$; X est circulaire si $X^0 = X$; $X^{00} = X^0$ de sorte que X^0 est circulaire.

PROPOSITION 2.1.

$$(R \leftarrow S)^0 \subseteq (R^0 \leftarrow S) \cup (S^0 \leftarrow R^0) \ , \qquad (R \rightarrow S)^0 \subseteq R^0 \rightarrow S \ ,$$

$$R \in (R_1 \, \omega_1 \, R_2 \dots \omega_{n-1} \, R_n)^0 \implies R \in R^0_{i_1} \, \omega'_1 \, R^0_{i_2} \dots \omega'_{n-1} \, R^0_{i_n} \ ,$$

$$R \in (R_1 \leftarrow R_2 \dots \leftarrow R_n)^0 \implies R \in R^0_{i_1} \leftarrow R^0_{i_2} \dots \leftarrow R^0_{i_n} \ ,$$

$$(X^{\omega_i})^0 \subseteq (X^0)^{\omega_i} \ , \qquad (X^{\leftarrow})^0 \subseteq (X^0)^{\leftarrow} \ .$$

3. Mots segmentés.

Soit ρ' un ensemble de sous-mots non vides $S' \subseteq R$. Si $S' \equiv r_{i_1} \, r_{i_2} \dots r_{i_p}$, on considère le segment $S \equiv (r_{i_1} \, , \, r_{i_p}) \leqslant R$, et l'on dit que S' est le support de S . On note ρ l'ensemble des $S \subseteq R$ supportés par les $S' \leqslant R$. Tout $r_i \in R$ appartient à un $S' \in \rho'$ unique, noté $(r_i)_{\rho'}$, donc au support d'un $S \in \rho$ unique, noté $(r_i)_\rho$.

On appelle inter-support S^k de $S \in \rho$, le segment $S^k \equiv (r_{i_k+1} \, , \, r_{i_{k+1}-1})$ de manière que :

$$S \equiv r_{i_1} \, S^1 \, r_{i_2} \, S^2 \dots S^{p-1} \, r_{i_p} \ , \qquad S' \equiv r_{i_1} \, r_{i_2} \dots r_{i_p} \ .$$

R est segmenté par ρ' (ou ρ est une segmentation de R) si pour tout $S \in \rho$:

(1') $r_i \in S \implies (r_i)_{\rho'} \subseteq S$,

$\iff$ (1) $r_i \in S \implies (r_i)_{\rho} \subseteq S$,

$\iff$ (1^k) $r_i \in S^k \implies (r_i)_{\rho} \subseteq S^k$,

$\iff$ (1°) $S_1 \cap S_2 \equiv 1$ ou $S_1 \subseteq S_2^k$ ou $S_2 \subseteq S_1^k$, pour tout couple S_1 , $S_2 \in \rho$ avec $S_1 \neq S_2$.

Si X est un ensemble de A-mots et si R est segmenté par $\rho' \subseteq X$, on dit que R est segmenté dans X .

PROPOSITION 3.1. - $\rho'_0 \subseteq \rho'$, $R_0 \equiv \bigcup_{S' \in \rho'_0} S' \implies R_0$ est segmenté par ρ'_0 . On dit que le sous-mot R_0 est permis, et que la segmentation ρ_0 est induite par ρ dans R_0 .

PROPOSITION 3.2. - Soient R et S segmentés par ρ' et σ' . Tout élément appartenant à $R \leftarrow S$ est segmenté par $\rho' \cup \sigma'$. Si S est un segment permis et σ' induite par ρ' dans S , l'élément $R - S \in R \rightarrow S$ est segmenté par $\rho' - \sigma'$.

PROPOSITION 3.3. - Si $\rho' = \{R_q\}$, $1 \leqslant q \leqslant p$,

$$R \in R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow \ldots \leftarrow R_p \iff 1 \in R \rightarrow R_p \rightarrow \ldots \rightarrow R_1$$

$\iff$ R est segmenté par ρ' .

$X^{\leftarrow}$ est l'ensemble des mots segmentés dans X .

4. Mots réduits.

On note A_0 l'ensemble des A-mots de la forme $a_\alpha^\varepsilon \, a_\alpha^{-\varepsilon}$. D'après la proposition 1.6, $R \in SA_0^{\omega_i}$ est une relation d'équivalence, notée $\simeq$. R est réduit si $R \rightarrow A_0 \equiv R$, et circulairement réduit si $R^0 \rightarrow A_0 = R^0$.

PROPOSITION 4.1. - R réduit $\iff$ R de longueur minimum dans sa classe $RA_0^{\omega_i}$. Toute classe $RA_0^{\omega_i}$ contient un mot réduit unique, noté R^* , et appelé le réduit de R .

PROPOSITION 4.2. - $A_0^{\omega_i} = A_0^{\leftarrow}$; $R \simeq S \iff R \in SA_0^{\omega_i} \iff S^{-1} R \in A_0^{\leftarrow}$; $RA_0^{\omega_i} = R^* A_0^{\leftarrow}$.

Ainsi, $R \in R^* A_0^{\leftarrow}$, donc d'après la proposition 3.3, R est segmenté par $R^* \cup \gamma'$, $\gamma' \subseteq A_0$. On dit que R est réduit par γ' (ou γ est une réduction de R) ; une réduction n'est pas unique. On appelle reste de R suivant γ, le sous-mot $R_\gamma = \bigcup_{S' \in \gamma'} S' \subseteq R$, et l'on a $R_\gamma \equiv R^*$ pour toute réduction γ de R.

5. Systèmes de relateurs.

On note A_1 l'ensemble des A-mots unitaires (de valeur 1), et si X est un ensemble de A-mots, $X_A = X \cup X^{-1} \cup A_0$. A est relié par X (ou X est un système de relateurs de A) si $A_1 = X_A^{\omega_i}$; A est libre s'il est relié par $\emptyset$, autrement dit si $A_1 = A_0^{\omega_i}$, ou encore, d'après la proposition 4.2, si $A_1 = A_0^{\leftarrow}$.

Parmi les réduits des A-mots de R^0, il en existe de cycliquement réduit, soit par exemple R_1. On note $R^{*0} = R_1^0$ (qui ne dépend pas du choix de R_1), et $X^{*0} = \bigcup_{R \in X} R^{*0}$.

PROPOSITION 5.1. - A relié par $X \implies A$ relié par X^{*0}.

Dans la suite, on peut donc supposer que $X = X^{*0}$, c'est-à-dire que X est un ensemble circulaire de A-mots circulairement réduits.

PROPOSITION 5.2. - $X_A^{\omega_i} = X_A^{\leftarrow} A_0^{\rightarrow}$; $R = S \iff R \in S X_A^{\omega_i} \iff S^{-1} R \in X_A^{\leftarrow} A_0^{\rightarrow}$.

6. Mots propres.

A étant relié par X, on considère $R \in X_A^{\leftarrow}$, ce qui revient à dire, d'après la proposition 3.3, que R est segmenté par $\rho' \subseteq X_A$. On suppose que R est réduit par γ', que le couple $r_i\, r_j \in \gamma'$ et, en permuttant au besoin i et j, on peut supposer que $(r_i)_\rho \cap (r_j)_\rho \equiv 1$ ou $(r_j)_\rho \subseteq (r_i)_\rho^k$, d'après la formule (1°) du paragraphe 3. Si σ est la segmentation induite par ρ dans $(r_j)_\rho = (r_{j_1}, r_{j_2})$ et δ la réduction induite par γ dans (r_{i+1}, r_{j-1}), on note

$$\overline{R} \equiv R - (r_j)_\rho \xleftarrow{r_i} (r_j)_\rho^{{}^0 r_j} \equiv R - (r_{i+1}, r_{j-1}) \xleftarrow{r_{j_2}} (r_{i+1}, r_{j-1})^{{}^0 r_{j_1}},$$

$$\overline{\rho'} = (\rho' - \sigma') \cup \{S'^{{}^0 r_{j_1}}\}_{S' \in \sigma'}, \qquad \overline{\gamma'} = (\gamma' - \delta') \cup \{S'^{{}^0 r_{j_1}}\}_{S' \in \delta'}.$$

PROPOSITION 6.1. - $\overline{R}$ est segmenté par $\overrightarrow{\rho'}$ et réduit par $\overrightarrow{\gamma'}$; $\overline{R} \simeq R$.

Parmi les supports $S' \in \rho' \subseteq X_A = X \cup X^{-1} \cup A_0$, on distingue les A_0-supports $S' \in A_0$ et les $X \cup X^{-1}$-supports $S' \in X \cup X^{-1}$.

Le couple $r_i\ r_j \subseteq R$ est dit <u>propre</u> si les trois relations suivantes sont incompatibles :

$$(1) \qquad \begin{cases} r_i\ r_j \simeq 1\ , \quad (r_i\ ,\ r_j) \simeq 1\ , \\ (r_i)_{\rho'} \xleftarrow{r_i} (r_j)_{\rho'}^{0r_j} \simeq 1 \quad \text{ou} \quad (r_i)_{\rho'} \quad \text{ou} \quad (r_j)_{\rho'}^{0r_j}\ . \end{cases}$$

R est <u>propre</u> si tous les couples $r_i\ r_j \subseteq R$ sont propres.

PROPOSITION 6.2. - R <u>propre</u> $\iff$ <u>Pour toute réduction</u> γ <u>de</u> R, <u>un couple de réduction</u> $r_i\ r_j \in \gamma'$ <u>est tel que</u> $(r_i)_{\rho'}$ <u>et</u> $(r_j)_{\rho'}$ <u>sont des</u> $(X \cup X^{-1})$-<u>supports avec</u> $(r_i)_{\rho'} \xleftarrow{r_i} (r_j)_{\rho'}^{0r_j} \not\simeq 1$.

On considère maintenant dans $X_A^{\leftarrow}$, les classes d'équivalence $RA_0^{\omega_i} \cap X_A^{\leftarrow}$, suivant $\simeq$.

PROPOSITION 6.3. - R <u>de longueur minimum dans sa classe</u> $RA_0^{\omega_i} \cap X_A^{\leftarrow} \implies R$ <u>propre</u>.

De la sorte, tout mot de $X_A^{\leftarrow}$ a une présentation propre, en ce sens que : $\forall\ R \in X_A^{\leftarrow}$, $\exists\ R^{pr}$ propre $\in X_A^{\leftarrow}$: $R \simeq R^{pr}$. On a :

$R = 1 \iff R \in A_1 \iff R \in X_A^{\omega_i} \iff R^* \in X_A^{\omega_i}$ (proposition 4.2)

$\iff R^* \in X_A^{\leftarrow} A_0^{\rightarrow}$ (proposition 5.2)

$\iff R^* \simeq S \in X_A^{\leftarrow} \iff R^* \simeq S^{pr} \in X_A^{\leftarrow}$ (proposition 6.3).

On note $X_A^{\leftarrow pr}$ l'ensemble des mots propres de $X_A^{\leftarrow}$.

<u>Problème des mots</u> : A étant relié par X et B un A-mot réduit :

Décider si $B = 1 \iff$ Décider si B est le réduit d'un $R \in X_A^{\leftarrow pr}$.

7. Résidu. Mots simples.

On considère $R \in X_A^{\leftarrow}$, donc segmenté par $\rho' = \{R_1\ ,\ \dots\ ,\ R_q\ ,\ \dots\ ,\ R_p\} \subseteq X_A$; p est le <u>degré</u> de R, noté $\delta(R)$. Si p est une réduction de R, le sous-mot $R_q \cap R_\gamma \subseteq R$ est dit γ-<u>résidu</u> de R_q. Le γ-résidu $R_q \cap R_\gamma$ est <u>simple</u> s'il est

cosegment de R_q , R_γ et R (ce qui implique qu'il est, soit segment, soit complément de segment des trois). R est γ-simple si tous les γ-résidus sont simples ; il est simple s'il est γ-simple pour toute réduction γ .

Soient U et U_q les segments supportés par $R_q \cap R_\gamma$ dans R et R_q ; r_i le premier élément de U ; V_q tel que $U_q V_q \in R_q^0$. On considère

$$S \equiv UV_q , \qquad T \equiv R - U \xleftarrow{r_{i-1}} U_q ,$$

ainsi que σ' , $\tau' \subseteq \rho'$ définis par

$$\sigma' = \{S'\}_{R_q \not\equiv S' \subseteq U} , \qquad \tau' = \{S'\}_{R_q \not\equiv S' \subseteq R-U} .$$

PROPOSITION 7.1. - S , T sont segmentés par $R_q^{Or_i} \cup \sigma'$, $R_q \cup \tau'$.

PROPOSITION 7.2. - R propre $\Longrightarrow$ S , T propres.

Il s'ensuit que :

$$\left.\begin{array}{l} R \in X_A^{\leftarrow pr} \\ R_q \cap R_\gamma \text{ multiple} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow S , T \in X_A^{\leftarrow pr} \text{ avec } \delta(S) , \delta(T) < \delta(R) ,$$

de sorte que, si M est l'ensemble comprenant $X \cup X^{-1}$, et les $R \in X_A^{\leftarrow pr}$ ayant, pour une certaine réduction γ , deux γ-résidus simples majeurs, on a la proposition suivante :

PROPOSITION 7.3. - Un mot $R \in X_A^{\leftarrow pr} - M$ de degré minimum (qu'on appellera primitif) est simple, n'ayant que des $(X \cup X^{-1})$-supports.

On remarque que $R \in M$ a de toute façon un γ-résidu simple majeur qui est segment de $(X \cup X^{-1})$-support.

Un mot simple $R \in (X \cup X^{-1})^{\leftarrow pr} - M$ est singulier. Le système de relateurs X est régulier, si :

$X_A^{\leftarrow pr} = M \Longleftrightarrow (X \cup X^{-1})^{\leftarrow pr}$ ne contient pas de mots primitifs (prop. 7.3) ;

$X_A^{\leftarrow pr} = M \Longleftrightarrow (X \cup X^{-1})^{\leftarrow pr}$ ne contient pas de mots singuliers (prop. 7.3).

8. Relateurs progressifs et réguliers.

$R \in X_A^{\leftarrow pr}$ est progressif si $\lambda(R^*) \geqslant \lambda(R_q)$, $1 \leqslant q \leqslant p$; X est progressif, si :

Tout $R \in X_A^{\leftarrow pr}$ est progressif $\Longleftrightarrow$ Tout $R \in (X \cup X^{-1})^{\leftarrow pr}$ est progressif (proposition 6.2).

PROPOSITION 8.1. - X progressif $\Longrightarrow$ $\lambda(S^*)$, $\lambda(T^*) \leqslant \lambda(R^*)$.

Algorithme de Dehn. - Soient B un A-mot réduit, X un système de relateurs de A et $R_i \in X \cup X^{-1}$. On détermine les couples (R_1 , B_1) tels que B_1 soit réduit d'un élément de $B \leftarrow R_1$ avec $\lambda(B) \geqslant \lambda(B_1)$. Pour chaque couple (R_1 , B_1) , on détermine les couples (R_2 , B_2) tels que B_2 soit réduit d'un élément de $B_1 \leftarrow R_2$ avec $\lambda(B_1) \geqslant \lambda(B_2)$, etc.

Si X est progressif, cet algorithme est fini, en ce sens que pour un certain n : soit $\not\exists\, B_n$ (l'algorithme est négatif), soit $B_n \equiv 1$ (l'algorithme est positif). B est un mot de Dehn si l'algorithme relatif à B est positif, et alors $B \simeq R \in X_A^{\leftarrow}$, donc $B = 1$.

Si R est simple, on a pour toute réduction γ : $R^* \equiv S_1 S_2 \dots S_m$; S_j γ-résidus simples de $R_{q_j} \in \rho' \subseteq X \cup X^{-1}$, en remplaçant au besoin R par un autre mot de R^0 . On suppose de plus que parmi les présentations simples de R^* , R comporte un γ-résidu S_j de R_{q_j} de longueur maximum. Si r_{i_j} est le premier élément de S_j et T_j tel que $S_j T_j \in R^0_{q_j}$, on note

$$P \equiv R - S_j \xleftarrow{r_{i_j}^{-1}} T_j^{-1} ,$$

et alors

$$P_j^* \equiv S_1 \dots S_{j-1} T_j^{-1} S_{j+1} \dots S_m .$$

PROPOSITION 8.2. - P_j est segmenté par $\{R^c_{q_1} , \dots , R^c_{q_{j-1}} , R^c_{q_{j+1}} , \dots , R^c_{q_m}\}$ où $R^c_q \in R^0_q$, de sorte que $\delta(P_j) < \delta(P)$.

PROPOSITION 8.3. - R propre $\Longrightarrow$ P_j propre.

PROPOSITION 8.4. - Un mot non-progressif de degré minimum est singulier, de sorte que : X régulier $\Longrightarrow$ X progressif .

PROPOSITION 8.5. - X régulier $\Longleftrightarrow$ X tel que le problème des mots est résoluble par l'algorithme de Dehn.

9. Mots primitifs.

On suppose maintenant que parmi les présentations primitives (donc simples) de R^*, R comporte un nombre de γ-résidus $S_j \neq \emptyset$ minimum. Puisque, d'après les propositions 8.2 et 8.3, $P_j \in (X \cup X^{-1})^{\leftarrow pr}$ avec $\delta(P_j) < \delta(R)$, P_j a deux γ-résidus simples majeurs, qui, étant donné la forme de P_j^*, sont nécessairement :

$$S_{j-1} V_j^{-1} \quad \text{et} \quad U_j^{-1} S_{j+1} \qquad \text{où} \quad T_j = U_j Q_j V_j \ .$$

PROPOSITION 9.1. - On a, à une permutation circulaire près :

$$(2) \quad R_{q_1} \equiv S_1 U_2 Q_1 U_1^{-1}, \quad R_{q_2} \equiv S_2 U_3 Q_2 U_2^{-1}, \ \ldots,$$

$$R_{q_j} \equiv S_j U_{j+1} Q_j U_j^{-1}, \ \ldots, \ R_{q_m} \equiv S_m U_j Q_m U_m^{-1},$$

avec $S_j U_{j+1}$, $U_{j+1} Q_j U_j^{-1}$, $U_j^{-1} S_j$ segments majeurs de R_{q_j}, sauf peut-être $U_{j+1} Q_j U_j^{-1}$ pour un certain j.

Si

$$P \equiv R - S_1 \xleftarrow{r_{i_1}-1} T_1^{-1} - \ldots - S_m \xleftarrow{r_{i_m}-1} T_m^{-1} \ ,$$

on a

$$P^* \equiv (Q_1^{-1} \ldots Q_m^{-1})^* \simeq T_1^{-1} \ldots T_m^{-1}, \qquad \delta(P) < \delta(R) \ .$$

PROPOSITION 9.2. - L'algorithme de Dehn relatif à P^* est positif. En particulier, P^* contient deux cosegments majeurs de $R_q \neq R_{q_j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

D'après les propositions 9.1 et 9.2 :

X régulier $\Longleftrightarrow$ Pour toute suite (2) de mots de $X \cup X^{-1}$, l'algorithme de Dehn relatif à $(Q_1^{-1} \ldots Q_m^{-1})^*$ est négatif.

Si la condition est vérifiée pour tout $m \leqslant \nu$, on peut décider par l'algorithme de Dehn relatif à B si :

$$B \simeq R \in Y_A^{\leftarrow} \qquad \text{ou} \qquad Y \in (X \cup X^{-1})^{\leftarrow \nu}$$

(par exemple si B s'écrit comme produit de $\leqslant \nu$ conjugués de mots de $X \cup X^{-1}$).

On a

$$(R_{q_i}^{-1} \xleftarrow{U_{i+1}^{-1}} R_{q_{i+1}}^{-1} \xleftarrow{U_{i+2}^{-1}} \dots \xleftarrow{U_i^{-1}} R_{q_j}^{-1})_* \simeq U_i\, Q_i^{-1} \dots Q_j^{-1}\, U_j^{-1}\, S_j^{-1} \dots S_j^{-1} ,$$

et d'après la proposition 9.2, $\exists\, i , j , R_q , x$:

$$(R_{q_i}^{-1} \xleftarrow{U_{i+1}^{-1}} \dots \xleftarrow{U_i^{-1}} R_{q_j}^{-1} \xleftarrow{x} R_q)_*^* \equiv V_i^{-1}\, Q V_j^{-1}\, S_j^{-1} \dots S_i^{-1} ,$$

où $V_i^{-1} S_i^{-1}$, $V_j^{-1} S_j^{-1}$, Q sont γ-résidus simples de $R_{q_i}^{-1}$, $R_{q_j}^{-1}$, R_q avec $\lambda(V_i^{-1} S_i^{-1}) \geqslant \lambda(R_{q_i})$, $\lambda(V_j^{-1} S_j^{-1}) \geqslant \lambda(R_{q_j})$, $\lambda(Q) \leqslant \lambda(R_q)$. On remarque que $Q_i , \dots , Q_j \neq \emptyset \implies j - i + 1 \leqslant \lambda(R_q)$, et l'on note $\lambda = \sup_{R \in X} \lambda(R)$. D'autre part $(R_1 \leftarrow \dots \leftarrow)_*^s$ est un mot simple appartenant à $(R_1 \leftarrow \dots \leftarrow R_i)_*$ avec $R_i \in X \cup X^{-1}$. On considère les conditions <u>finies</u> (en ce sens qu'on peut les vérifier par un nombre fini d'essais) :

(C) Pour tout $i \leqslant \lambda + 1$, $(R_1 \leftarrow \dots \leftarrow R_i)_*^s$ a <u>trois</u> γ-résidus majeurs (dont un strictement majeur).

(C_n) Il existe $n \leqslant \lambda$ tel que $(R_1 \leftarrow \dots \leftarrow R_i)_*^s$ ait <u>trois</u> γ-résidus majeurs (dont un strictement pour $i \leqslant n - 1$, et <u>quatre</u> γ-résidus majeurs pour $i = n$).

(C_4) $(R_1 \leftarrow R_2 \leftarrow R_3 \leftarrow R_4)_*^s$ n'a que des γ-résidus majeurs.

Soient maintenant S , S_i des segments de R , $R_i \in X \cup X^{-1}$ tels que $\{S_i\}$ n'est pas une partition de S , et les conditions :

(C_4') $S \equiv S_1\, S_2\, S_3 \implies \lambda(S) \leqslant \frac{1}{2} \lambda(R)$,

(C_3') $S \equiv S_1\, S_2 \implies \lambda(S) \leqslant \frac{1}{4} \lambda(R)$,

(C_2') $S \equiv S_1 \implies \lambda(S) \leqslant \frac{1}{6} \lambda(R)$.

PROPOSITION 9.3. - (C_2') <u>ou</u> (C_3') $\implies$ (C_4') $\implies$ (C_4) .
(C_n) $\implies$ (C) $\implies$ X <u>régulier</u> .