Gérard Lallement

Représentations irréductibles et algèbres de demi-groupes finis

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 21, nº 2 (1967-1968), exp. nº 16, p. 1-8

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1967-1968__21_2_A7_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
21e année, 1967/68, n° 16

22 avril 1968

REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET ALGÈBRES DE DEMI-GROUPES FINIS

par Gérard LALLEMENT

Rappelons qu'un facteur principal d'un demi-groupe est le quotient de Rees $J(a)/I(a)$ d'un idéal principal $J(a)$ par l'idéal $I(a)$ formé des éléments de $J(a)$ non générateurs de $J(a)$. Ces facteurs principaux sont soit 0-simples (ou simples), soit de carré nul. MUNN [8] a montré que pour un demi-groupe D fini (et même, plus généralement, vérifiant la condition minimale sur les idéaux principaux) il y a une correspondance bijective entre les représentations linéaires irréductibles de D et les représentations irréductibles Γ telles que $\Gamma^{-1}(0) = 0$ de ses facteurs principaux 0-simples. Par ailleurs, CLIFFORD [2], [3] a décrit toutes les représentations, et en particulier celles qui sont irréductibles, d'un demi-groupe complètement 0-simple en termes d'"extensions" des représentations de ces sous-groupes maximaux. Théoriquement, le problème des représentations irréductibles d'un demi-groupe fini est donc résolu. Pratiquement, un certain nombre de difficultés se présentent. Pour les montrer, indiquons brièvement le processus d'obtention des représentations irréductibles d'un demi-groupe fini 0-simple $S = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ selon CLIFFORD :

(a) On part d'une représentation irréductible γ de G qu'on étend à G^0 en posant $\gamma(0) = 0$.

(b) On forme une matrice Ω de format $\Lambda' \times I'$ composée de blocs de matrices

$$\Omega = [\gamma(p_{\lambda i}) - \gamma(p_{\lambda 1}\, p_{1i})] \qquad \text{où} \quad i \in I_1 = I \setminus 1 \quad \text{et} \quad \lambda \in \Lambda_1 = \Lambda \setminus 1 \quad .$$

(Le bloc indiqué entre les crochets est celui en position λ , i ; on a supposé que I et Λ ont un indice 1 en commun et que $p_{11} = e$ identité de G.)

(c) On détermine le rang h de la matrice Ω (on supposera $h \neq 0$).

(d) On factorise Ω sous la forme $\Omega = QR$ où $Q = \begin{pmatrix} \vdots \\ Q_\lambda \\ \vdots \end{pmatrix}$ est une matrice $\Lambda' \times h$ et $R = (\dots R_i \dots)$ une matrice $h \times I'$ (la factorisation est dite de largeur h). Alors :

$$\Gamma[(a ; i , \lambda)] = \begin{pmatrix} \gamma(p_{1i}\, a p_{\lambda 1}) & \gamma(p_{1i}\, a) Q_\lambda \\ R_i\, \gamma(a p_{\lambda 1}) & R_i\, \gamma(a)\, Q_\lambda \end{pmatrix}$$

définit une représentation irréductible de S , et elles s'obtiennent toutes de cette façon. Pratiquement, c'est assez long, et la factorisation de Ω peut parfois poser des problèmes difficiles.

Dans une première partie de l'exposé, on donne un procédé plus rapide d'obtention des représentations irréductibles pour les demi-groupes finis. Une seconde partie est consacrée à une étude de l'algèbre sur un corps (quelconque) d'un demi-groupe fini 0-simple : détermination du radical et étude des algèbres quotients. Les démonstrations complètes des résultats exposés paraîtront ultérieurement dans [6].

Les notations et la terminologie utilisées sont celles de [4] (chapitre 5). Signalons toutefois que si P est une matrice à éléments dans un groupe avec zéro G^0 et si γ est une représentation de G^0 , $\gamma(P)$ indique la matrice obtenue par remplacement des éléments de P par leur image par γ .

1. Représentations irréductibles d'un demi-groupe fini.

Soient D un demi-groupe fini et J une $\mathcal{J}$-classe de Green de D $(\mathcal{J} = \mathcal{D})$. On note M_J la représentation de Schützenberger de D définie par J ([4], 3.5).

DÉFINITION 1.1. - Soient J une $\mathcal{J}$-classe régulière de D fini et G le sous-groupe maximal de J . Pour une représentation γ de G^0 par des matrices sur un corps Φ on définit $\Gamma(x)$ pour tout $x \in D$ par

$$\Gamma(x) = \gamma[M_J(x)] .$$

Alors, Γ est une représentation de D par des matrices sur Φ appelée représentation standard définie par J et γ .

On démontre qu'en fait la représentation standard Γ définie par J et γ est la représentation induite par la représentation γ de G , c'est-à-dire

$$M_\Gamma = \Phi_0[S] \bigotimes_{\Phi[G]} M_\gamma ,$$

où M_Γ (resp. M_γ) est le $\Phi_0[S]$-module (resp. $\Phi[G]$-module) associé à la représentation Γ (resp. γ) ; $\Phi_0[S]$ et $\Phi[G]$ désignent respectivement l'algèbre contractée de D et de G sur Φ .

Pour les raisons exposées dans l'introduction, on s'intéresse d'abord au cas où D est un demi-groupe fini 0-simple. On prendra $D = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ où G est un groupe fini, $\mathrm{card}\ I = m$, $\mathrm{card}\ \Lambda = n$. Dans ce cas la représentation de Schützenberger définie par $J = D\backslash 0$ s'écrit

$$M_J[(a ; i , \lambda)] = P(a ; i , \lambda)$$

où $P(a ; i , \lambda)$ est le produit de la matrice P par la matrice $(a ; i , \lambda)$ de format $I \times \Lambda$ dont le seul élément non nul est a en position (i , λ). La représentation standard définie par $D\backslash 0$ et γ est

$$\Gamma(a ; i , \lambda) = \gamma[P(a ; i , \lambda)] .$$

La proposition suivante précise la nature de cette représentation standard dans le cadre de la théorie de CLIFFORD.

PROPOSITION 1.2. - <u>La représentation standard de</u> $D = \mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda , P)$ <u>définie par une représentation propre de</u> G <u>de degré</u> r <u>correspond à la factorisation</u> $\Omega = I_{r(n-1)} \Omega$ <u>où</u> $I_{r(n-1)}$ <u>est la matrice unité d'ordre</u> $r(n - 1)$.

Pour le démontrer, on effectue un changement de base de l'espace vectoriel V sur lequel agissent les $\Gamma(a ; i , \lambda)$, défini par la matrice

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 & \cdots & & 0 \\ -\gamma(p_{21}) & I_r & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\gamma(p_{n1}) & 0 & 0 \cdots & 0 & I_r \end{pmatrix}$$

La représentation Γ devient Γ' telle que

$$\Gamma'(e ; i , 1) = \begin{pmatrix} \gamma(p_{1i}) & 0 \\ R_i & 0 \end{pmatrix}$$

et le calcul donne

$$R_i = \begin{pmatrix} \gamma(p_{2i}) - \gamma(p_{21}\ p_{1i}) \\ \vdots \\ \gamma(p_{ni}) - \gamma(p_{ni}\ p_{ii}) \end{pmatrix}$$

d'où $R = [R_2 , \dots , R_i , \dots , R_m] = \Omega$.

Le résultat suivant est essentiel pour la suite :

THÉORÈME 1.3. - <u>Soient</u> $D = \mathcal{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ <u>un demi-groupe fini</u> 0-<u>simple</u>, γ <u>une représentation irréductible de</u> G <u>et</u> Γ <u>la représentation standard définie par</u> γ. <u>Alors</u> Γ <u>a un seul constituant irréductible non nul. Ce constituant</u> Γ^* <u>définit une représentation irréductible de</u> D <u>et toutes les représentations irréductibles de</u> D <u>s'obtiennent ainsi</u>.

La démonstration se fait ainsi :

(a) On montre qu'il existe un changement de base de V défini par une matrice A telle que pour tout $(a ; i , \lambda) \in D$

$$A\Gamma(a\ ;\ i\ ,\ \lambda)A^{-1} = \begin{pmatrix} \Gamma^*(a\ ;\ i\ ,\ \lambda) & \Delta_{12}(a\ ;\ i\ ,\ \lambda) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

où $\Gamma^*(a\ ;\ i\ ,\ \lambda)$ est une matrice $t \times t$ avec t = rang de $\gamma(P)$. Il suffit pour cela de prendre pour A une matrice adaptée à l'espace nul de $\gamma(P)$; on a alors $A\Gamma(a\ ;\ i\ ,\ \lambda)A^{-1} = A\gamma(P)\gamma[(a\ ;\ i\ ,\ \lambda)]A^{-1}$ et la matrice $A\gamma(P)$ a des 0 dans les $nr - t$ dernière lignes (r = degré de γ) .

(b) On établit que

$$\text{degré } \Gamma^* = \text{rang } \gamma(P) = \text{rang } \Omega + r$$

(Ω a été définie dans l'introduction).

(c) On applique le résultat de CLIFFORD ([4], théorème 5.51) indiquant qu'il y a une, et une seule, extension de γ à D de degré rang $\Omega + r$, que cette extension est une représentation irréductible de D et qu'on les obtient toutes ainsi.

Ce théorème étant établi, on l'applique ainsi que les résultats de MUNN ([4], théorème 5.33) pour obtenir le théorème suivant :

THÉORÈME 1.4. - Soient D un demi-groupe fini, Γ la représentation standard de D définie par J et une représentation irréductible γ du sous-groupe maximal de J . Alors Γ a un seul constituant irréductible non nul Γ^* tel que $[\Gamma^*(S)]$ coïncide avec $[\Gamma^*(J)]$. (Pour $T \subseteq S$, $[\Gamma^*(T)]$ indique le sous-espace de l'algèbre des matrices engendré par $\Gamma^*(T)$.) Réciproquement, toute représentation irréductible de D est équivalente au constituant Γ^* d'une représentation standard Γ définie comme précédemment.

La démonstration de ce résultat est assez longue et nous renvoyons le lecteur à [6]. Indiquons seulement qu'elle met en évidence une formule simple donnant Γ^* en fonction de γ :

Pour tout $x \in D$

(1) $$\Gamma^*(x) = I_{t,nr}\, A\gamma[M_J(x)]A^{-1}\, I_{nr,t} \ .$$

Dans cette formule :

- A est une matrice de changement de base adaptée à l'espace nul de $\gamma(P)$, P étant la matrice médiane du facteur principal de J (ce facteur principal est isomorphe à $\mathfrak{M}^0(G\ ;\ I\ ,\ \Lambda\ ;\ P)$;
- t est le rang de $\gamma(P)$, r le degré de γ , $n = \text{card } \Lambda$ = card de $\mathcal{R}$-classe de J ;
- $I_{p,q}$ est la matrice de format $p \times q$ dont les élément en position $(i\ ,\ j)$ sont nuls si $i \neq j$ et égaux à 1 si $i = j$.

2. Algèbre d'un demi-groupe fini 0-simple sur un corps.

Soit $D = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ un demi-groupe 0-simple fini et soit Φ un corps. On désigne par $\Phi_0[D]$ l'algèbre contractée de D sur Φ (c'est une algèbre de base $D\backslash 0$ et on identifie le 0 de D au 0 du corps). Rappelons que $\Phi_0[D]$ est isomorphe à l'algèbre de Munn [4],

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{M}(\Phi[G] ; I , \Lambda ; P) \quad .$$

$\mathfrak{B}$ est l'algèbre sur Φ des matrices $m \times n$ à éléments pris dans $\Phi[G]$, avec un produit $\otimes$ défini par

$$X \otimes Y = XPY \ \ldots$$

De préférence à $\Phi_0[D]$, c'est sur cette algèbre $\mathfrak{B}$ qu'on travaille.

THÉORÈME 2.1. - $\operatorname{rad} \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid PXP \in (\operatorname{rad} \Phi[G]\}_{n\times m}$.

(Ici, comme dans la suite, $(\mathfrak{A})_{n\times m}$ désigne l'ensemble des matrices de format $n \times m$ à coefficients pris dans $\mathfrak{A}$.)

Pour établir ce résultat, on utilise la formule (1) pour montrer que $X \in \operatorname{rad} \mathfrak{B}$, si, et seulement si,

$$(2) \qquad I_{t,nr}\, A\gamma(P)\, \gamma(X) A^{-1}\, I_{nr,t} = 0$$

pour toute représentation irréductible γ de G . On montre ensuite que (2) est équivalent à

$$(3) \qquad \gamma(PXP) = 0$$

pour toute représentation irréductible γ de G , d'où le théorème.

On en déduit immédiatement :

COROLLAIRE 2.2 (MUNN [7]). -

$$\operatorname{rad} \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid M \otimes X \otimes N \in (\operatorname{rad} \Phi[G])_{m\times n} \ \underline{\text{pour tout}}\ M , N \in \mathfrak{B}\} \quad .$$

En particulier, si $\operatorname{car} \Phi = 0$, en revenant à $\mathfrak{A} = \Phi_0[D]$ et en posant $\mathfrak{N} = \operatorname{rad} \Phi_0[D]$, on a

$$\mathfrak{A}\mathfrak{N}\mathfrak{A} = 0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{A}x\mathfrak{A} = 0 \implies x \in \mathfrak{N} \qquad (\text{cf. [7], [10]}) \quad .$$

- Si D est simple à gauche (c'est-à-dire $P = (e\ e\ \ldots\ e)$)

$$\operatorname{rad} \mathfrak{B} = \{X \in \mathfrak{B} \mid PX \in \operatorname{rad} \Phi[G]\} \quad .$$

En caractéristique 0 cela signifie que le radical de $\Phi_0[D]$ est l'annihilateur à gauche de $\Phi_0[D]$.

- Si D est un groupe rectangulaire (c'est-à-dire $P = (p_{\lambda i})$ avec $p_{\lambda i} = e$ pour tout $\lambda \in \Lambda$ et $i \in I$) et si car $\Phi = 0$, on a

$$\operatorname{rad} \Phi_0[D] = \{x \in \Phi_0[D] \mid x = \sum_{\substack{a\in G\\ i\in I\\ \lambda\in\Lambda}} \alpha_{(a;i,\lambda)} (a\,;\,i\,,\,\lambda) \quad \text{avec}$$

$$\sum_{\substack{i\in I\\ \lambda\in\Lambda}} \alpha_{(a;i,\lambda)} = \theta \qquad \text{pour tout} \quad a \in G\} \ .$$

(Ces deux résultats sont dus à M. TEISSIER [9].)

La question qui se pose maintenant est la suivante : Quels liens y-a-t'il entre les algèbres semi-simples $\Phi_0[D]/\operatorname{rad} \Phi_0[D]$ et $\Phi[G]/\operatorname{rad} \Phi[G]$?

Du théorème 2.1, on déduit sans difficulté le résultat de MUNN-PONIZOVSKY ([4], théorème 5.19).

THÉORÈME 2.3. - $\Phi_0[D]$ <u>est semi-simple si, et seulement si,</u> card Φ <u>ne divise pas l'ordre de</u> G <u>et si</u> P <u>est non singulière (c'est-à-dire est une unité) sur</u> $\Phi[G]$.

Notons que dans ce cas, conformément à la formule (1), les représentations irréductibles sont exactement les représentations standard, et $\Phi_0[D] \cong (\Phi[G])_{n\times n}$.

Les théorèmes qui suivent ont pour but de répondre à la question suivante : Dans quels cas a-t-on

$$\Phi_0[D]/\operatorname{rad} \Phi_0[D] \cong (\Phi[G]/\operatorname{rad} \Phi[G])_{t\times t} \quad ? \tag{4}$$

THÉORÈME 2.4. - $\Phi_0[D]/\operatorname{rad} \Phi_0[D] \cong \Phi[G]/\operatorname{rad} \Phi[G]$ <u>si, et seulement si, tous les éléments</u> $p_{\lambda i}$ <u>de la matrice</u> P <u>de</u> D <u>sont tels que</u> $p_{\lambda i} - e \in \operatorname{rad} \Phi[G]$.

Si Φ est de caractéristique 0 cela signifie que D est un groupe rectangulaire. Nous donnons ici une idée sommaire de la démonstration en supposant car $\Phi = 0$. Supposons que l'isomorphisme de l'énoncé ait lieu. $X = (x_{k\nu}) \in \operatorname{rad} \mathfrak{B}$ si, et seulement si, $PXP = 0$, ce qui est équivalent à

$$\sum_{k,\nu} p_{\lambda k}\, x_{k\nu}\, p_{\nu i} = 0 \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \Lambda \quad \text{et} \quad i \in I\ . \tag{5}$$

En écrivant chacune des équations (5) à l'aide des inconnues $\eta^i_{k\nu}$ où $x_{k\nu} = \sum_1^k \eta^i_{k\nu} g_i$ ($g_i \in G$ et $O(G) = h$) , chacune des équations (5) fournit $O(g)$ équations linéairement indépendantes en les $\eta^i_{k\nu}$. D'après l'hypothèse, $O(G) = \operatorname{codim} \operatorname{rad} \Phi_0[D]$. Donc l'une quelconque des équations (5) (par exemple, celle relative à $\lambda = 1$, $i = 1$) suffit pour déterminer $\operatorname{rad} \Phi_0[D]$. On montre alors que si $p_{\mu t} \neq e$ pour un couple μ , t , l'équation (5) écrite avec $\lambda = \mu$ et i quelconque ne peut pas être équivalente à l'équation (5) écrite avec $\lambda = 1$ et $i = 1$, ce qui est une contradiction, donc $p_{\mu t} = e$. La réciproque résultera de la situation plus générale évoquée au théorème 2.8.

Pour étudier l'isomorphisme (4) dans le cas $t > 1$, on introduit les deux définitions suivantes :

DÉFINITION 2.5. - Soit P une matrice $n \times m$ sur une algèbre Ω avec unité e sur un corps Φ . Le rang d'invertibilité ou i-rang de P est le plus grand entier t tel que P ait une sous-matrice inversible $t \times t$.

(Le i-rang de P est inférieur ou égal au rang de P tel qu'on le définit habituellement [1].)

DÉFINITION 2.6. - Soit P une matrice $n \times m$ sur Ω de i-rang $t > 0$ et soit M une sous-matrice inversible $t \times t$ de P . Supposons que $P = \begin{pmatrix} M & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$ et posons $Q = \begin{pmatrix} M^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ de format $m \times n$. On dira que P est une Φ-matrice si, et seulement si, $PQP - P \in (\text{rad } \Omega)_{n\times m}$.

Toutes les matrices à éléments dans un corps Φ sont des Φ-matrices ; ce n'est pas le cas, en général, lorsque les éléments sont pris par exemple dans une algèbre de groupe. On démontre que :

LEMME 2.7. - P est une Φ-matrice si, et seulement si, pour chaque représentation irréductible γ de Ω , de degré r sur Φ , la matrice $\gamma(P)$ a pour rang rt , où t est le i-rang de P .

THÉORÈME 2.8. - Soient $D = \mathfrak{M}^0(G ; I , \Lambda ; P)$ un demi-groupe fini 0-simple et Φ un corps. Soit t le i-rang de P sur $\Phi[G]$.

(a) Si P est une Φ-matrice, alors $\Phi_0[D]/\text{rad } \Phi_0[D]$ est isomorphe à $(\Phi[G]/\text{rad } \Phi[G])_{t\times t}$.

(b) Réciproquement, si l'isomorphisme a lieu et si Φ est algébriquement clos, alors P est une Φ-matrice.

(a) Partie directe : On démontre que l'application δ de l'algèbre de Munn $\mathfrak{B}$ dans $(\Phi[G]/\text{rad } \Phi[G])_{t\times t}$ définie par

$$X\delta = I_{t,n}\, PXPI_{m,t}\, M^{-1} + (\text{rad } \Phi[G])_{t\times t}$$

est un homomorphisme surjectif d'algèbres dont le noyau est précisément rad $\mathfrak{B}$.

(b) Réciproque : On utilise le lemme 2.7 ; on établit que, pour chaque représentation irréductible γ_σ de G de degré r_σ, $\gamma_\sigma(P)$ a pour rang $r_\sigma t$ où t est le i-rang de P. Si t_σ est le rang de $\gamma_\sigma(P)$, on a en général $t_\sigma > r_\sigma t$. On démontre que l'égalité a lieu en établissant que

$$\sum_{\sigma=1}^{s} t_\sigma^2 = t^2 \sum_{\sigma=1}^{s} r_\sigma^2 \quad . \tag{6}$$

L'entier du membre de gauche de (6) est précisément la dimension sur Φ de $(\Phi[G]/\text{rad}\ \Phi[G])_{t\times t}$. Pour établir (6), il suffit donc de montrer que le système d'équations linéaires sur Φ permettant d'obtenir rad $\mathfrak{A}$ est de rang $\sum_{\sigma=1}^{s} t_\sigma^2$.
Pour cela, on fait usage notamment du théorème de Frobenius-Schur ([5], p. 183-184) qui impose Φ algébriquement clos.

Il est probable (cf. théorèmes 2.3 et 2.4) que ce théorème 2.8 est valable sans l'hypothèse Φ algébriquement clos.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CHEVALLEY (Claude). - Fundamental concepts of algebra. - New York, Academic Press, 1956 (Pure and applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 7).

[2] CLIFFORD (A. H.). - Matrix representations of completely simple semigroups, Amer. J. of Math, t. 64, 1942, p. 327-342.

[3] CLIFFORD (A. H.). - Basic representations of completely simple semigroups, Amer. J. of Math, t. 82, 1960, p. 430-434.

[4] CLIFFORD (A. H.) and PRESTON (G. B.). - The algebraic theory of semigroups, Vol. I. - Providence, American mathematical Society, 1961 (Mathematical Surveys, 7).

[5] CURTIS (Charles W.) and REINER (Irving). - Representation theory of finite groups and associative algebras. - New York, London, Interscience Publishers, 1962 (Pure and applied Mathematics. A Series of Texts and Monographs, 11).

[6] LALLEMENT (Gérard) and PETRICH (M.). - Irreducible matrix representations of finite semigroups, Trans. Amer. math. Soc. (à paraître).

[7] MUNN (W. D.). - Semigroups and their algebras (Dissertation, Cambridge University, 1955).

[8] MUNN (W. D.). - Irreducible matrix representations of semigroups, Quaterly J. of Math., Oxford Series, t. 11, 1960, p. 295-309.

[9] TEISSIER (Marianne). - Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2413-2414.

[10] TEISSIER (Marianne). - Sur l'algèbre d'un demi-groupe fini simple, II : Cas général, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 234, 1952, p. 2511-2513.