

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHÈLE FERRANDON

Ultraproduits et anneaux primitifs

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 19, n° 2 (1965-1966), exp. n° 16, p. 1-9

http://www.numdam.org/item?id=SD_1965-1966__19_2_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1965-1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ULTRAPRODUITS ET ANNEAUX PRIMITIFS

par Michèle FERRANDON

1. Filtres et ultrafiltres.

On rappelle que, étant donné un ensemble I , on appelle filtre sur I , une famille $\mathfrak{F}$ de sous-ensembles de I , non vide, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1° $\emptyset \notin \mathfrak{F}$,
- 2° $\forall S_1, S_2 \in \mathfrak{F} \Rightarrow S_1 \cap S_2 \in \mathfrak{F}$,
- 3° $\forall S \in \mathfrak{F}$, et $\forall T$ tel que $S \subseteq T$, alors $T \in \mathfrak{F}$.

L'ensemble des filtres sur I est ordonné par inclusion, et inductif. Un filtre maximal est appelé un ultrafiltre.

PROPRIÉTÉ. - Une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathfrak{F}$ soit un ultrafiltre est que $\forall T \subseteq I$, T ou $I - T \in \mathfrak{F}$.

On appelle base de filtre sur I , une famille $\mathcal{B}$ de parties de I , non vide, vérifiant les propriétés suivantes :

- 1° $\emptyset \notin \mathcal{B}$,
- 2° $\forall S_1, S_2 \in \mathcal{B}$, $\exists S_3 \in \mathcal{B}$ tel que $S_3 \subseteq S_1 \cap S_2$.

Etant donnée une base de filtre $\mathcal{B}$, l'ensemble des parties de I contenant un élément de $\mathcal{B}$ est un filtre (c'est le plus petit filtre contenant $\mathcal{B}$).

2. Ultraproduits.

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'ensembles indexés par un ensemble I . On considère $A = (\prod A_i)_{i \in I}$, leur produit. Soit $\mathfrak{F}$ un filtre sur I . La relation

$$a \equiv b \text{ modulo } \mathfrak{F} \iff \{i \mid a_i = b_i\} \in \mathfrak{F}$$

est une relation d'équivalence.

Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre, l'ensemble quotient $\alpha = A/\mathfrak{F}$ est appelé un ultraproduit (ou ultrapuissance, si tous les A_i sont identiques).

PROPOSITION 1. - Si les ensembles A_i sont des anneaux, et si $\mathfrak{F}$ est un filtre sur I , $A/\mathfrak{F}$ est un anneau.

Soit $S(a) = \{i \mid a_i \neq 0\}$ le support de a dans A :

$$O(a) = I - S(a) = \{i \mid a_i = 0\} .$$

$L = \{a \mid a \equiv 0 \ (\mathfrak{F})\}$ est un idéal bilatère dans A ,

$$a \in L \iff O(a) \in \mathfrak{F} .$$

$$- a, b \in L \iff O(a), O(b) \in \mathfrak{F} ,$$

$$O(a - b) \supseteq O(a) \cap O(-b) = O(a) \cap O(b) \implies a - b \in L ;$$

$$- a \in L, b \in A :$$

$$O(ab) \supseteq O(a), \quad O(ba) \supseteq O(a), \quad ab, ba \in L .$$

Donc $A/\mathfrak{F} = A/L$.

Dans toute la suite, $\mathfrak{F}$ désignera un ultrafiltre sur I .

3. Conservation de certaines propriétés dans les ultraproducts.

Remarque. - Soit une propriété P , vérifiée par tous les A_i , et telle que $\mathcal{A}$ vérifie P . En fait, il suffit que l'ensemble d'indices des anneaux qui vérifient P appartienne à $\mathfrak{F}$.

$$J = \{i \mid A_i \text{ vérifie } P\} \quad J \in \mathfrak{F} ,$$

$$\mathfrak{F}' = \{S \mid S \subseteq J, S \in \mathfrak{F}\} ;$$

$\mathfrak{F}'$ est un ultrafiltre sur J .

$$A = (\prod A_i)_{i \in I} \quad A' = (\prod A_i)_{i \in J} .$$

Il existe une injection canonique de A' dans A :

$$\mathcal{A} = A/\mathfrak{F} \quad \mathcal{A}' = A'/\mathfrak{F}' .$$

Soit $a \in A$, $a = (a_i)_{i \in I}$; on lui fait correspondre

$$a' \in A' , \quad a' = (a'_i)_{i \in J}, \quad a'_i = a_i .$$

On voit que, si $a \equiv b \ (\mathfrak{F})$, alors $a' \equiv b' \ (\mathfrak{F}')$. On a ainsi une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{A}'$, qui est un isomorphisme.

On notera à l'image dans $\mathcal{A}$ d'un élément a de A par la surjection canonique $A \longrightarrow \mathcal{A}$.

PROPOSITION 2. - Un ultraproduit de corps est un corps.

$$\hat{a} \in \mathcal{A}, \quad \hat{a} \neq 0. \quad \text{Ceci équivaut à} \quad S(a) \in \mathfrak{F}.$$

Soit $b \in A$ tel que :

- si $i \in S(a)$, $b_i = a_i^{-1}$;
- si $i \notin S(a)$, $b_i = 0$.

$$O(ab - 1) = O(ba - 1) = S(a) \in \mathfrak{F},$$

$$\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a} = 1.$$

On montre de même qu'un ultraproduit d'anneaux premiers (respectivement sans diviseurs de 0) est un anneau premier (respectivement sans diviseurs de 0).

PROPOSITION 3. - Si tous les A_i sont des corps ordonnés, $\mathcal{A}$ est un corps ordonné.

Soit $\omega(a, b) = \{i \mid a_i \leq b_i\}$. Supposons $a \equiv a' \pmod{\mathfrak{F}}$, $b \equiv b' \pmod{\mathfrak{F}}$, $\omega(a, b) \in \mathfrak{F}$. Alors :

$$\omega(a, b) \cap O(a - a') \cap O(b - b') \subseteq \omega(a', b') \in \mathfrak{F}.$$

On pose

$$\hat{a} \leq \hat{b} \iff \omega(a, b) \in \mathfrak{F}.$$

On a bien une relation d'ordre :

- réflexivité : $\omega(a, a) = I \in \mathfrak{F}$;
- anti-symétrie : $\omega(a, b) \cap \omega(b, a) \subseteq O(a - b) \in \mathfrak{F}$;
- transitivité : $\omega(a, b) \cap \omega(b, c) \subseteq \omega(a, c) \in \mathfrak{F}$.

On vérifie facilement que l'on a une structure de corps ordonnés.

Remarque. - Si, sur chaque A_i , la relation d'ordre est totale, il en est de même de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 4. - Si tous les A_i sont des corps commutatifs algébriquement clos, il en est de même de $\mathcal{A}$.

PROPOSITION 5. - Un ultraproduit d'espace vectoriel est un espace vectoriel.

Soit V_i un espace vectoriel à droite sur un corps K_i . On considère les ultraproduits :

$$\mathcal{V} = (\prod V_i) / \mathfrak{F}, \quad \mathcal{K} = (\prod K_i) / \mathfrak{F}.$$

$\mathcal{V}$ est un groupe commutatif sur lequel on fait opérer $\mathcal{K}$ de la manière suivante :

$$\hat{v} \in \mathcal{V}, \quad \hat{k} \in \mathcal{K}, \quad \hat{v} \cdot \hat{k} = (\overline{v_i k_i})_{i \in I}.$$

Cette définition est indépendante des éléments v et k appartenant aux classes $\hat{v}$ et $\hat{k}$, et donne une structure d'espace vectoriel.

Remarque. - Si $\mathfrak{F}$ est un ultrafiltre contenant une partie finie de I , alors :

$$\mathfrak{F} = \{S \mid S \subseteq I, i_0 \in S\},$$

i_0 étant un élément fixe de I .

Alors $\alpha \simeq A_{i_0}$ au moyen de la bijection qui à $\hat{a}$ fait correspondre a_{i_0} .

4. Application aux anneaux primitifs.

DÉFINITION. - Un anneau A est primitif s'il existe un A -module simple et fidèle V .

Le commutant de A sur V , $\mathcal{L}_A(V)$ est un corps K , et A est un sous-anneau dense de l'anneau $\mathcal{L}_K(V)$.

THÉORÈME. - Un ultraproduit d'anneaux primitifs est un anneau primitif.

Soient A_i primitif, V_i un A_i -module simple et fidèle :

$$\mathcal{V} = (\prod V_i) / \mathfrak{F}, \quad \alpha = (\prod A_i) / \mathfrak{F}.$$

$\mathcal{V}$ est un α -module au moyen de $\hat{a} \cdot \hat{v} = \widehat{(a_i v_i)}$:

C'est un α -module simple. Soient $\hat{y}, \hat{x} \in \mathcal{V}$,

$$\hat{x} \neq 0 \iff S(x) \in \mathfrak{F}.$$

- Si $i \in S(x)$, $\exists a_i \in A_i$ tel que $y_i = a_i x_i$;

- si $i \in 0(x)$, posons :

$$a_i = 0, \quad a = (a_i)_{i \in I}, \quad 0(y - ax) \supseteq S(x) \in \mathfrak{F},$$

$$\hat{y} = \hat{a} \cdot \hat{x}.$$

C'est un α -module fidèle.

$$\hat{a} \neq 0 \iff S(a) \in \mathfrak{F}.$$

- Si $i \in S(a)$, $\exists x_i \in V_i$ tel que $a_i x_i \neq 0$;

- si $i \notin S(a)$, posons :

$$x_i = 0, \quad x = (x_i)_{i \in I}, \quad S(ax) = S(x) \in \mathfrak{F},$$

$$\hat{a} \cdot \hat{x} \neq 0.$$

Le commutant de $\mathcal{U}$ sur $\mathcal{V}$ est isomorphe à l'ultraproduit des commutants.

$$\mathcal{K} = (\prod K_i) / \mathfrak{F}, \quad \mathcal{L}_A(\mathcal{V}) = \Delta.$$

Soit $\hat{k} \in \mathcal{K}$; $k = (k_i)_{i \in I}$.

L'application qui à $\hat{x} \in \mathcal{V}$ fait correspondre $\widehat{(x_i \ k_i)_{i \in I}} \in \mathcal{V}$ est un élément δ de Δ .

$\hat{k} \longrightarrow \delta$ est un homomorphisme de $\mathcal{K}$ dans Δ ; il est surjectif.

Soit $\delta \in \Delta$. $\mathcal{V}$ étant un $\mathcal{U}$ -module simple, δ est déterminé par l'image d'un élément non nul de $\mathcal{V}$, $\hat{x}$:

$$\hat{x} \cdot \delta = \hat{y}.$$

Soit $J = \{i \mid \exists a_i \in A_i, a_i x_i = 0, a_i y_i \neq 0\}$. Supposons que $J \in \mathfrak{F}$.

Soit $a \in A$, $a = (a_i)_{i \in I}$, défini par :

- si $i \notin J$, $a_i = 0$,
- si $i \in J$, $a_i x_i = 0$, $a_i y_i \neq 0$.

$$I = O(ax), \quad \hat{a} \cdot \hat{x} = 0,$$

$$J \subseteq S(ay), \quad \hat{a} \cdot \hat{y} \neq 0;$$

mais $\hat{y} = \hat{x} \cdot \delta$ exige que si $\hat{a} \cdot \hat{x} = 0$, on ait $\hat{a} \cdot \hat{y} = 0$. Donc :

$$J \notin \mathfrak{F} \iff I - J \in \mathfrak{F}, \quad \text{pour } i \in I - J.$$

L'application $x_i \longrightarrow y_i$ définit un A_i -endomorphisme de V_i , $k_i \in K_i$.

Pour $i \in J$, posons $k_i = 0$,

$$k = (k_i)_{i \in I}, \quad y' = (x_i \ k_i)_{i \in I}, \quad \hat{y}' = \hat{y}.$$

δ est l'image de $\hat{k}$ dans l'homomorphisme précédent qui est un isomorphisme.

Soit C_i le centre de K_i , et soit Γ le centre de $\mathcal{K}_i$:

$$\Gamma \simeq \mathcal{C} = \prod C_i / \mathfrak{F}.$$

$\mathcal{C}$ peut être considéré comme un sous-corps de Γ , au moyen de l'application :

$$(\overline{c_i}) \in \prod C_i / \mathfrak{F} \longrightarrow (\widehat{c_i}) \in \prod K_i / \mathfrak{F}.$$

Montrons que $\mathcal{C} = \Gamma$.

Soit $\hat{\gamma} \in \Gamma$, $\gamma = (\gamma_i)_{i \in I}$, $\gamma_i \in K_i$. Soit $J = \{i \mid \gamma_i \notin C_i\}$.

Supposons que $J \in \mathfrak{F}$:

- si $i \in J$, $\exists k_i \in K_i : k_i \gamma_i - \gamma_i k_i \neq 0$,
- si $i \notin J$, soit $k_i = 0$;

$$k = (k_i)_{i \in I}, \quad S(k\gamma - \gamma k) = J \in \mathfrak{F}.$$

$\hat{k} \cdot \hat{\gamma} - \hat{\gamma} \cdot \hat{k} \neq 0$ est en contradiction avec le fait que $\hat{\gamma} \in \Gamma$. Donc, $J \in \mathfrak{F}$.

$$\begin{aligned} \hat{\gamma} &= \hat{\gamma}', \quad \gamma'_i = 0 && \text{si } i \in I, \\ \gamma'_i &= \gamma_i && \text{si } i \notin I, \quad \hat{\gamma} \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

PROPOSITION 6. - Posons :

$$S_n = \{i \mid (V_i : K_i) = n\}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad S_n \in \mathfrak{F} \iff (\mathcal{V} : \mathbb{K}) = n.$$

Remarque. - Si $n \neq p$, $S_n \cap S_p = \emptyset$, donc il y a au plus un S_n qui appartient à $\mathfrak{F}$.

Supposons que $S_n \in \mathfrak{F}$:

- si $i \in S_n$, soit $e_i^1, \dots, e_i^n$ une base de V_i sur K_i ;
- si $i \notin S_n$, posons $e_i^j = 0$, $j = 1, \dots, n$,

$$e^j \in V, \quad e^j = (e_i^j)_{i \in I}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Les éléments $\hat{e}^j$ sont linéairement indépendants sur $\mathbb{K}$: Soient $\hat{\lambda}^j \in \mathbb{K}$, tels que

$$\sum_{j=1}^n \hat{e}^j \hat{\lambda}^j = 0 \iff J = \{i \mid \sum_{j=1}^n e_i^j \lambda_i^j = 0\} \in \mathfrak{F}, \quad J \cap S_n \in \mathfrak{F}.$$

Pour $i \in J \cap S_n$,

$$\lambda_i^j = 0, \quad j = 1, \dots, n, \quad 0(\lambda_i^j) \in \mathfrak{F}, \quad \hat{\lambda}^i = 0.$$

Les éléments $\hat{e}^j$ sont des générateurs de $\mathcal{V}$ sur $\mathbb{K}$: Soit $\hat{x} \in \mathcal{V}$;

$$\text{- pour } i \in S_n, \quad x_i = \sum_{j=1}^n \lambda_i^j e_i^j;$$

- pour $i \notin S_n$, posons :

$$\lambda_i^j = 0, \quad \lambda^j = (\lambda_i^j)_{i \in I}, \quad 0(x - \sum_{j=1}^n \lambda^j e^j) \supseteq S_n,$$

donc

$$\hat{x} = \sum_{j=1}^n \hat{e}^j \hat{\lambda}^j.$$

Réciproquement, on suppose que $(\mathcal{V} : \mathbb{K}) = n$.

Supposons qu'il existe un entier p tel que

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_p \in \mathfrak{F}, \quad S_1 \cup \dots \cup S_{p-1} \notin \mathfrak{F},$$

donc $I - (S_1 \cup \dots \cup S_{p-1}) \in \mathfrak{F}$, ce qui entraîne

$$(S_1 \cup \dots \cup S_p) \cap [I - (S_1 \cup \dots \cup S_{p-1})] = S_p \in \mathfrak{F},$$

et la partie précédente montre que $p = n$, $S_n \in \mathfrak{F}$.

Supposons donc que

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n \notin \mathfrak{F} \implies I - (S_1 \cup \dots \cup S_n) = J \in \mathfrak{F}.$$

Pour $i \in J$, $(V_i : K_i) > n$, donc $\exists n+1$ vecteurs linéairement indépendants sur K_i , $e_i^1, \dots, e_i^{n+1}$.

Pour $i \notin J$, posons $e_i^1 = \dots = e_i^{n+1} = 0$.

Soient $e^j = (e_i^j)_{i \in I}$, $j = 1, \dots, n+1$; les éléments $\hat{e}^j$ sont linéairement indépendants sur K , or $(V : K) = n$, ce qui est en contradiction.

PROPOSITION 7. - Soit $T_n = \{i \mid (K_i : C_i) = n^2\}$, $n = 1, 2, \dots$ Alors :

$$T_n \in \mathfrak{F} \iff (K : C) = n^2.$$

La démonstration est analogue à la précédente.

THÉOREME. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit complet $\prod A_i$. Alors, il existe un ultrafiltre $\mathfrak{F}$ tel que B soit injecté dans $\prod A_i / \mathfrak{F}$.

$\mathcal{B} = \{S(a)\}_{a \in B - \{0\}}$ est une base de filtre.

- $\mathcal{B} \neq \emptyset$ et $\emptyset \notin \mathcal{B}$.

- Soient a et $c \in B$, a et $c \neq 0$. B étant premier, $\exists x \in B$ tel que $axc \neq 0$ et $S(axc) \subseteq S(a) \cap S(c)$.

Soit $\mathfrak{F}$ un ultrafiltre contenant $\mathcal{B}$. L'application canonique de A dans $\mathcal{A}$, restreinte à B , est une injection :

Soit $a \in B$, $a \neq 0$: cela équivaut à $S(a) \in \mathfrak{F}$, et par conséquent

$$\hat{a} \neq 0.$$

COROLLAIRE 1. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit direct d'anneaux de matrices d'ordre $\leq n$, à coefficients dans des corps ; alors il existe une injection de B dans un anneau de matrices d'ordre $\leq n$, à coefficients dans un corps.

En effet,

$$S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = I \in \mathfrak{F} ,$$

donc $\exists m \leq n$ tel que $S_m \in \mathfrak{F}$.

COROLLAIRE 2. - Soit B un anneau premier, sous-anneau d'un produit direct d'algèbres quasi-simples de dimension $\leq n^2$ sur leur centre. Alors, il existe une injection de B dans une algèbre quasi-simple de dimension $\leq n^2$ sur son centre.

Soit A_i une algèbre quasi-simple. Son centre C_i est un corps, et $(A_i : C_i)$ étant fini, A_i est un anneau de matrices à coefficients dans un corps K_i dont le centre est C_i :

$$(A_i : C_i) = (A_i : K_i)(K_i : C_i) \leq n^2 ,$$

$$(A_i : K_i) = (V_i : K_i)^2 ,$$

donc $(V_i : K_i) \leq n$.

Il existe m et p tels que T_m et $S_p \in \mathfrak{F}$:

$$(K : C) = m^2 \quad (V : K) = p ;$$

or α est quasi-simple, donc C est le centre de α :

$$(\alpha : C) = (\alpha : K)(K : C) = p^2 m^2 .$$

$T_m \cap S_p \in \mathfrak{F}$, donc $\exists i$ tel que $(V_i : K_i) = p$, $(K_i : C_i) = m^2$, ce qui entraîne $p^2 m^2 \leq n^2$ et $(\alpha : C) \leq n^2$.

THÉOREME. - Soit B un anneau sans diviseur de 0, sous-anneau d'un produit direct de corps. Alors il existe une injection de B dans un corps.

Si de plus B est un sous-anneau d'un produit de corps ordonné, alors il existe une injection de B dans un corps ordonné.

Application. - Toute algèbre associative libre peut être injectée dans un corps.

Soit T une algèbre associative libre sur un corps Γ commutatif, et soit D un corps qui est une algèbre sur Γ et de dimension infinie sur son centre.

Soit $I = \{i\}$, l'ensemble de tous les homomorphismes d'algèbre de T dans D : on a une application de T dans D^I au moyen de l'application :

$$a \in T \longrightarrow a_i = i(a) .$$

Cette application est un homomorphisme d'algèbre, et est injective.

$$(a_i)_{i \in I} = 0 \iff i(a) = 0, \quad \forall i \in I,$$

ce qui veut dire que a est appliquée en 0 par tout homomorphisme de T dans D , et si $a \neq 0$, cela signifie que D vérifie une identité polynomiale, ce qui ne peut avoir lieu que si D est de dimension finie sur son centre.

On peut montrer qu'il existe un corps qui soit une algèbre sur Γ de dimension infinie sur son centre.

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ une suite dénombrable d'indéterminées. Soit $\Gamma(x) = E$, le corps de fractions de l'anneau de polynômes $\Gamma[x_1, \dots, x_n, \dots]$.

On a, dans E , l'application définie symboliquement par $\sum_{i=1}^{\infty} x_{i-1} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)$, en posant $x_0 = 1$. Cette application est une dérivation : $a \longrightarrow a'$.

On considère l'anneau $E[X]$ des polynômes en X , la multiplication étant définie par la relation : $Xa = aX + a'$.

L'anneau $E[X]$ est un anneau euclidien, et donc un anneau principal à gauche et à droite. Il est intègre, donc il admet un corps de fractions, Q , et Q est de dimension infinie sur son centre : les éléments x_i , $i > 0$, n'appartiennent pas au centre, car $X \cdot x_i = x_i \cdot X + x_{i-1}$. Les éléments $x_0, x_1, \dots, x_n, \dots$ sont linéairement indépendants sur le centre de Q . Sinon il existe q_i appartenant au centre de Q , $q_n \neq 0$, tel que $\sum_{i=0}^n q_i x_i = 0$, et nous choisissons n minimal, $X \cdot q_i = q_i \cdot X$. Donc,

$$0 = X \left(\sum_{i=0}^n q_i x_i \right) = \left(\sum_{i=1}^n q_i x_i \right) X + \sum_{i=1}^n q_i x_{i-1} = \sum_{i=0}^n q_{i+1} x_i,$$

ce qui est une relation de dépendance, avec seulement n termes, ce qui est impossible.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] AMITZUR (S. A.). - Generalized polynomials identities and pivotal monomials, Trans. Amer. math. Soc., t. 114, 1965, p. 210-226.
- [2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1964 (American mathematical Society, Colloquium Publications, 37).
- [3] KÖCHEN (Simon). - Ultraproducts in the theory of models, Annals of Math., t. 74, 1961, p. 221-261.