Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Guy Renault

Sur les anneaux non commutatifs. III. Enveloppe injective d'un module

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 15, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A4_0>

Séminaire DUBREIL-PISOT
(Algèbre et Théorie des nombres)
15e année, 1961/62, n° 15

19 mars 1962

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS
III. ENVELOPPE INJECTIVE D'UN MODULE.

par Guy RENAULT

1. Immersion d'un module dans un module injectif.

Dans tout cet exposé, les anneaux dont il sera question seront supposés posséder un élément unité, et tous les modules seront supposés unitaires. Tous les modules considérés seront des modules à gauche.

DÉFINITION 1. - Un A-module M est dit injectif si, pour tout A-module Q, tout sous-module P de Q et tout homomorphisme f de P dans M, il existe un homomorphisme f de Q dans M prolongeant f.

On en déduit les conséquences suivantes :

- une somme directe de deux modules est un module injectif $\Leftrightarrow$ ces deux modules sont injectifs ;

- un produit direct de modules est injectif $\Leftrightarrow$ chaque facteur est injectif.

THÉORÈME 1. - Pour qu'un A-module M soit injectif, il faut et il suffit que, pour tout idéal à gauche I de A et tout homomorphisme f de I dans M, f soit réalisé par une homothétie, c'est-à-dire qu'il existe $x_0 \in M$ tel que $f(a) = ax_0$ pour tout $a \in I$.

La condition est nécessaire car f se prolonge en un homomorphisme $\bar{f}$ de A dans M, et l'on a

$$\bar{f}(a) = f(ae) = a\bar{f}(e) \quad .$$

Montrons que la condition est suffisante. Soient un A-module Q, P un sous-module de Q et f un homomorphisme de P dans M. Soit $\mathfrak{F}$ la famille des couples (P_i , f_i) où P_i est un sous-module de Q contenant P, et f_i un homomorphisme de P_i dans M. Soit la relation d'ordre définie par

$$(P_1 , f_1) \leqslant (P_2 , f_2) \Leftrightarrow P_1 \subset P_2 \text{ et } f_2/P_1 = f_1 \quad .$$

$\mathfrak{F}$ est non vide, car elle contient le couple (P , f) , et cette famille est réductive. Elle admet donc un élément maximal (P_0 , f_0) d'après le théorème de Zorn.

On va prouver que $P_0 = Q$; sinon, il existe $x \in Q$, $x \notin P_0$. Soient $I = P_0 \cdot x$ et $i \to f_0(ix)$ l'homomorphisme de I dans M . Par hypothèse, il existe $m \in M$ tel que $f_0(ix) = im$. Pour $x_0 \in P_0$ et $\lambda \in \Lambda$, on pose

$$f(x_0 + \lambda x) = f_0(x_0) + \lambda m \quad ;$$

il est clair que $(P_0 , f_0) < (P_0 + \Lambda x , \bar{f})$ ce qui est contraire au choix de (P_0 , f_0) .

Conséquences.

a. Soit Λ un anneau noethérien à gauche. On a les propriétés suivantes : toute somme directe de Λ-modules injectifs est un Λ-module injectif et toute limite inductive de Λ-modules injectifs est un Λ-module injectif.

b. Un Λ-module M est divisible si, quels que soient $x \in M$ et $\alpha \neq 0$ dans Λ , il existe $y \in M$ tel que $x = \alpha y$. Un module injectif est divisible. Le théorème 1 prouve, d'autre part, qu'un module M sur un anneau principal est injectif $\iff$ il est divisible.

c. On démontre le résultat suivant : un domaine d'intégrité Λ est un anneau de Dedekind $\iff$ tout Λ-module divisible est injectif.

Exemples.

a. Le $\underset{\sim}{Z}$-module $\underset{\sim}{Q}$;

b. Soient A un anneau principal, K son corps des fractions ; on note K_Λ le Λ-module K . Λ est le sous-module de K engendré par 1 . Le module quotient K_Λ/Λ est divisible ; soit π un élément extrémal de Λ , on notera V_π le sous-module de V formé des éléments annulés par une puissance de π . V_π est un module divisible (donc injectif) et indécomposable, et on a

$$V = \bigotimes_{\pi \in P} V_\pi \quad ,$$

P étant un système représentatif d'éléments extrémaux de Λ .

Nous allons montrer qu'un Λ-module quelconque peut être plongé dans un Λ-module injectif.

THÉORÈME 2. - Tout Λ-module M peut être plongé dans un Λ-module injectif.

On utilisera la méthode qui consiste à plonger d'abord M considéré comme un

groupe abélien dans un groupe abélien injectif.

LEMME 1. - Tout groupe abélien peut être plongé dans un groupe abélien injectif.

Soit G un groupe abélien ; on sait que G est groupe quotient d'un groupe abélien libre F.

$$G \simeq F/R \ , \quad F = \bigotimes_k \underset{\sim}{Z}_k \quad \text{où} \quad \underset{\sim}{Z}_k \simeq \underset{\sim}{Z} \quad \text{pour tout} \quad k \ .$$

F est plongé canoniquement dans le groupe

$$\tilde{F} = \bigotimes_k \underset{\sim}{Q}_k \quad \text{où} \quad \underset{\sim}{Q}_k \simeq \underset{\sim}{Q} \ ,$$

et, par suite, on a $G \subset \tilde{F}/R$, $\tilde{F}/R$ groupe abélien divisible donc injectif.

Pour tout anneau Λ et tout groupe abélien G, on considère l'ensemble des Z-homomorphismes de Λ dans G, que l'on note $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$. Pour tout élément f de $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$, nous notons $(a)f$ l'élément de G transformé de $a \in \Lambda$ par f, et nous définissons, pour tout $b \in \Lambda$, l'élément bf de $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$ par

$$(a)(bf) = (ab)f = f(ab) \ .$$

On définit de manière évidente sur $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$ une structure de Λ-module. On a les propriétés suivantes :

- si G est un sous-groupe du groupe abélien G', $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$ est un sous-module de $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$;

- si G est un Λ-module M, $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , M)$ possède un sous-module isomorphe à M ; il suffit de considérer l'ensemble des homothéties de Λ dans M.

LEMME 2. - Si G est un groupe abélien injectif, $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$ est un Λ-module injectif.

En effet, soient Q un Λ-module et P un sous-module de Q ; soit φ un Λ-homomorphisme de P dans $\mathrm{Hom}_Z(\Lambda , G)$. On a donc

$$\varphi(\lambda x) = \lambda \varphi(X)$$

pour tout $\lambda \in \Lambda$ et tout $x \in P$. On en déduit

$$\varphi(\lambda x) = (\lambda)\ \varphi(X) \ .$$

Posons

(1) $$\varphi(X) = \psi(X) \in G \quad .$$

ψ est un $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme de P dans G qui peut être prolongé en un $\underset{\sim}{Z}$-homomorphisme $\bar{\psi}$ de Q dans G. Pour tout $y \in Q$, définissons $\bar{\varphi}(y)$ comme étant l'élément suivant de $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Z}}(A , G)$.

$$a \to (a)\ \bar{\varphi}(y) = \bar{\psi}(ay) \quad .$$

L'application $\bar{\varphi} : y \to \bar{\varphi}(y)$ est un A-homomorphisme de Q dans $\mathrm{Hom}_{\underset{\sim}{Z}}(A , G)$. qui coïncide avec φ sur P.

Nous sommes en mesure maintenant de prouver le théorème. Soit M un A-module et $\bar{M}$ un groupe abélien injectif contenant le groupe abélien M. On a

$$M \leqslant \mathrm{Hom}_{Z}(A , M) \leqslant \mathrm{Hom}_{Z}(A , \bar{M})$$

avec $\mathrm{Hom}_{Z}(A , \bar{M})$ qui est un A-module injectif (lemme 2).

2. Enveloppe injective d'un module.

DÉFINITION 2. - M étant un sous-module du A-module E, E est une **extension essentielle** de M ; si X est un sous-module de E la relation $M \cap X = 0$ implique $X = 0$.

Remarque. - Si trois A-modules M, P, E sont tels que $M \subset P \subset E$, E est extension essentielle de M si et seulement si E est extension essentielle de P, et P extension essentielle de M.

PROPOSITION 1. - Si M est un sous-module d'un module injectif N, toute extension essentielle E de M est isomorphe à un sous-module de N contenant M. En particulier, si M est injectif, il ne possède pas d'extension essentielle propre.

Le plongement canonique de M dans N se prolonge en un homomorphisme f de E dans N.

$$\mathrm{Ker}\ f \cap M = 0$$

et par suite

$$\mathrm{Ker}\ f = 0 \quad .$$

La proposition précédente montre que l'on peut se limiter à l'étude des extensions essentielles de M contenues dans N.

THÉORÈME 3. - Soit M un Λ-module, il existe un Λ-module E contenant M, défini à un isomorphisme près relativement à M et ayant les propriétés équivalentes suivantes :

a. E est une extension essentielle maximale de M ;

b. E est une extension essentielle de M et E est facteur direct dans toute extension de E ;

c. E est une extension essentielle injective de M ;

d. E est une extension injective minimale de M.

Soit N une extension injective de M ; considérons la famille des sous-modules de N qui constituent des extensions essentielles de M. Cette famille est inductive et possède donc un élément maximal E.

(a) $\Rightarrow$ (b). - Soit F une extension de E, et soit E' un sous-module maximal tel que $E \cap E' = 0$ (existence assurée par le théorème de Zorn).

$$F/E' \geq (E + E')/E' \overset{\sim}{=} E \quad ;$$

par construction, F/E' est une extension essentielle de $(E + E')/E' \overset{\sim}{=} E$ et, par suite,

$$F/E' \overset{\sim}{=} E , \quad E + E' = F , \quad E \cap E' = 0 \quad .$$

(b) $\Rightarrow$ (c). - Soit N une extension injective de E, E est facteur direct dans N et, par suite, est injectif.

(c) $\Rightarrow$ (d). - Soit P une extension injective de M telle que $P \leqslant E$, alors E est une extension essentielle de P et, par suite, $P = E$.

(d) $\Rightarrow$ (a). - Si E n'était pas extension essentielle de M, E contiendrait en propre une extension essentielle de M qui serait injective [(a) $\Rightarrow$ (d)], contrairement à la minimalité de E. D'autre part, E ne possède pas d'extension essentielle propre et constitue donc une extension maximale de M.

Soient E et E' deux extensions de M, ayant les propriétés précédentes. La proposition 1 entraîne que E' est isomorphe, relativement à M, à un sous-module E'' de E ; la minimalité de E entraîne $E = E''$.

En cours de démonstration, on a prouvé le résultat suivant :

PROPOSITION 2. - Pour qu'un A-module soit injectif, il faut et il suffit qu'il soit facteur direct dans toutes ses extensions.

On va en déduire un nouvel exemple de modules injectifs.

Rappelons qu'un A-module est semi-simple s'il vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes :

a. M est somme directe de modules simples.

b. Tout sous-module de M est facteur direct.

Un anneau A est semi-simple s'il vérifie les deux propriétés équivalentes suivantes :

a. Le A-module A_s est semi-simple ;

b. Tout A-module est semi-simple.

Si A est un anneau semi-simple, tout A-module est injectif.

DÉFINITION 3. - Un module E satisfaisant aux propriétés du théorème 3 s'appelle l'enveloppe injective de M et se note $E(M)$.

Exemples. - $\underset{\sim}{Q}$ enveloppe injective de $\underset{\sim}{Z}$.

1° Soit G groupe libre. $\underset{\sim}{Q} \underset{Z}{\otimes} G$ enveloppe injective de G .

2° Soit A un anneau non commutatif sans diviseurs de zéro et tel que l'intersection de deux idéaux à gauche de A soit $\{0\}$. On sait que A admet un corps des quotients à gauche K , K enveloppe injective de A .

3° On a le résultat plus général suivant (théorème de L. LESIEUR et R. CROISOT).

Soit A un anneau premier vérifiant les conditions suivantes

a. Chaque somme directe d'idéaux à gauche de A possède un nombre fini de composantes ;

b. L'ensemble des idéaux annulateurs à gauche vérifie la condition maximale.

A admet un corps des quotients à gauche $Q(A)$, et $Q(A)$ est l'enveloppe injective de A .