

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

CLAUDE JOULAIN

**Sur les anneaux non commutatifs. II. Anneaux noethériens
et artiniens à gauche**

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 15, n° 2 (1961-1962), exp. n° 14,
p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1961-1962__15_2_A3_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1961-1962, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR LES ANNEAUX NON COMMUTATIFS
II. ANNEAUX NOETHÉRIENS ET ARTINIENS À GAUCHE.

par Claude JOULAIN

On trouvera, dans les deux premières parties de cet exposé, les définitions et des exemples d'anneaux, de modules et de demi-groupes noethériens et artiniens. La troisième partie est consacrée à l'étude de la structure d'un anneau premier, unitaire, artinien à gauche.

Cet exposé reprend, dans ses grandes lignes, un chapitre de l'ouvrage [5].

1. Anneaux, modules, et demi-groupes noethériens.

DÉFINITION 1.1. — Un anneau A est dit noethérien à gauche (resp. à droite, bilatère), s'il vérifie la condition de chaîne ascendante (finie) pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Si l'anneau A est noethérien à gauche et à droite, il est dit noethérien.

La condition de chaîne ascendante (finie) exprime que toute suite strictement croissante d'idéaux

$$X_1 \subset X_2 \subset \dots \subset X_n \subset \dots$$

est nécessairement finie.

Elle a été introduite par E. NOETHER en 1921 (cf. [7]) dans le cas commutatif.

Cette condition de chaîne ascendante, équivaut à la condition maximale, ou encore à la condition de base finie.

La condition maximale, signifie que tout ensemble d'idéaux de A possède un élément maximal dans cet ensemble.

La condition de base finie, signifie que tout idéal dans A possède un nombre fini de générateurs.

Donnons quelques exemples d'anneaux noethériens à gauche, ou noethériens.

1° Soit l'anneau des polynômes à deux variables non permutables X et Y , à coefficients dans un corps commutatif K , dont les éléments permutent avec X et Y , avec les relations

$$XY = 0, \quad Y^2 = 0$$

(cf. H. CARTAN et S. EILENBERG [2]).

C'est un anneau noethérien à gauche, et non à droite. Ce n'est pas un anneau premier.

2° Si on considère l'anneau des polynômes à une variable X et à coefficients dans le corps $K(Y)$ avec les relations

$$\forall f(Y) \in K(Y), \quad Xf(Y) = f(Y^2) X,$$

on obtient un anneau d'intégrité, donc premier, qui est noethérien à gauche et non à droite (cf. L. LESIEUR et R. GROISOT [6], exemple 1).

3° Dans le cas commutatif, on a un exemple important d'anneau noethérien : c'est l'anneau $K[X_1, \dots, X_n]$ des polynômes à n variables permutables. Le théorème de la base finie a été démontré, en 1890, par D. HILBERT [4].

4° Dans le cas non commutatif, on a comme exemple important d'anneau noethérien, l'algèbre enveloppante $U(L)$ d'une algèbre de Lie de dimension finie sur un corps commutatif K . Cet anneau s'obtient de la façon suivante :

On considère l'anneau A des polynômes à n variables X_i ($i = 1, 2, \dots, n$) non permutables, à coefficients dans un corps commutatif K . On impose la relation

$$X_i X_j - X_j X_i = L_{i,j}(X)$$

cà $L_{i,j}(X)$ est une forme linéaire donnée

$$\sum_{k=1}^n a_{ij}^k X_k \quad (i < j) \quad .$$

$U(L)$ est l'anneau quotient obtenu.

Si les formes $L_{i,j}(X)$ sont toutes nulles, $U(L)$ est un anneau commutatif, sinon $U(L)$ est un anneau non commutatif noethérien à gauche et à droite ; la méthode originale de Hilbert peut être utilisée pour démontrer que $U(L)$ est un anneau d'intégrité, noethérien à gauche et à droite.

5° Tout anneau quotient d'un anneau noethérien à gauche, tout produit fini d'anneaux noethériens à gauche, sont des anneaux noethériens à gauche.

Pour les modules, on a la définition suivante.

DÉFINITION 1.2. — Un A -module à gauche M est dit noethérien, s'il vérifie la condition de chaîne ascendante pour les sous-modules.

Un exemple assez général de A -module à gauche noethérien, est fourni par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 1.1. — Un A -module à gauche M , unitaire, de type fini sur un anneau A noethérien à gauche, est noethérien.

On raisonne par récurrence sur le nombre p des générateurs $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ de M .

1° $p = 1$. — Alors $M = Ax_1$; soit M_n un sous-module de M . Considérons l'idéal à gauche :

$$I_n = M_n \cdot x_1 = \{a \in A ; ax_1 \in M_n\} \quad .$$

On a : $I_n x_1 = M_n$.

Considérons une suite strictement croissante de sous-modules M_n , on a

$$M_n \subset M_{n+1} \implies I_n \subset I_{n+1} \quad .$$

La suite d'idéaux à gauche I_n est donc finie ; il en est de même de la suite de sous-modules M_n .

2° Supposons la propriété vraie pour $p - 1$. — Soit $M = Ax_1 + Ax_2 + \dots + Ax_p$.

M_n étant un sous-module de M , on considère l'idéal à gauche I_n , constitué par les a_i tels qu'il existe

$$a_2, a_3, \dots, a_n \in A \quad \text{avec} \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \in M_n \quad .$$

Si on considère une suite croissante de sous-modules M_n , les idéaux à gauche I_n forment une suite croissante, donc stationnaire à partir d'un certain rang m .

On a

$$k \geq m \implies I_k = I_m \quad .$$

Supposons $k \geq n$, et soit $x \in M_k$,

$$x = a_1 x_1 + \dots + a_p x_p \in M_k,$$

d'où

$$a_1 \in I_k \Rightarrow a_1 \in I_n \Rightarrow \exists b_2, b_3, \dots, b_p \in A$$

avec

$$y = a_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p \in M_n.$$

On a : $M_n \subseteq M_k$, d'où

$$x - y \in M_k \cap (Ix_2 + \dots + Ix_p)$$

et

$$M_k = M_n + M_k \cap (Ix_2 + \dots + Ix_p) \quad \forall k \geq n.$$

Une suite strictement croissante de sous-modules de M définit donc une suite strictement croissante de sous-modules de $Ix_2 + \dots + Ix_p$; une telle suite est finie, d'après l'hypothèse d'induction, la propriété en résulte pour p .

Pour un demi-groupe, on a la définition :

DÉFINITION 1.3. — Un demi-groupe D est dit noethérien à gauche (resp. à droite, bilatère), s'il vérifie la condition de chaîne ascendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Si le demi-groupe D est noethérien à gauche et à droite, il est dit noethérien.

Exemple. — Dans l'ensemble N des entiers naturels, on pose $ab = \max(a, b)$. On obtient un demi-groupe noethérien.

2. Anneaux, modules, et demi-groupes artiniens.

DÉFINITION 2.1. — Un anneau A est dit artinien à gauche (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche (resp. à droite, bilatères).

Un anneau artinien à gauche et à droite est dit artinien.

L'expression d'anneau artinien a été donnée en raison des travaux de E. ARTIN (cf. [1]) publiés en 1927. La condition de chaîne descendante exprime que toute suite strictement décroissante d'idéaux est nécessairement finie. Elle équivaut à la condition minimale : tout ensemble d'idéaux possède un idéal minimal dans cet ensemble. Elle équivaut également à la condition : toute intersection infinie d'idéaux est égale à une intersection finie.

Exemple. - L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n , sur un corps K , est un anneau artinien ; c'est également un anneau noethérien. En effet, M_n est un espace vectoriel E à gauche sur K de dimension finie n^2 . Un idéal à gauche de M_n est, en particulier, un sous-espace de E ; et les sous-espaces de E vérifient les conditions de chaîne ascendante et de chaîne descendante. De plus, M_n est un anneau premier, dans lequel le seul idéal bilatère propre est l'idéal nul.

Ceci résulte de la propriété suivante :

$$\text{Si } a \neq 0, \exists x_i, y_i \text{ tels que } 1 = \sum_{i=1}^n x_i a y_i$$

(cf. B. L. VAN DER WAERDEN [8]).

En résumé, on a :

PROPRIÉTÉ 2.1. - L'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n , sur un corps quelconque K , est un anneau artinien premier, unitaire.

DÉFINITION 2.2. - Un A -module à gauche est dit artinien, s'il vérifie la condition de chaîne descendante, pour les sous-modules.

Un exemple de A -module à gauche, artinien, est fourni par la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 2.2. - Un A -module à gauche, unitaire, de type fini, sur un anneau artinien à gauche est artinien.

La démonstration est analogue à celle de la propriété 1.1 dans le cas noethérien.

DÉFINITION 2.3. - Un demi-groupe D est dit artinien à gauche (resp. à droite, bilatère) s'il vérifie la condition de chaîne descendante pour les idéaux à gauche (à droite, bilatères).

Un demi-groupe est dit artinien, s'il est artinien à gauche et à droite.

Exemple. -- Dans l'ensemble D des entiers naturels, complétés par ∞ , on pose :

$$ab = \min(a, b) \quad ,$$

on obtient un demi-groupe artinien avec élément unité, et non noethérien.

Le demi-groupe obtenu en posant

$$ab = \max(a, b)$$

est noethérien, mais n'est pas artinien.

3. Structure d'un anneau premier, unitaire, artinien à gauche.

On a donné dans la deuxième partie (propriété 2.1), un exemple d'anneau premier, unitaire, artinien : l'anneau M_n des matrices carrées d'ordre n sur un corps K (ou encore l'anneau $\mathcal{L}_K(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie sur K).

Nous allons montrer que réciproquement, tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, peut être obtenu de cette façon.

THÉOREME. -- Pour qu'un anneau A soit premier, unitaire, artinien à gauche, il faut et il suffit qu'il soit isomorphe à l'anneau des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie n , sur un corps K .

On doit donc montrer que tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, est isomorphe à l'anneau $\mathcal{L}_K(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E , de dimension finie, sur un corps K .

Soit A un anneau premier, unitaire, artinien à gauche, et soit M un idéal minimal de A . Considéré comme A -module à gauche, M est un A -module simple. D'après le lemme de Schur, l'anneau $\mathcal{L}_A(M)$ des endomorphismes de M est donc un corps K .

$\forall \alpha \in K$ et $\forall x \in M$, posons $\alpha(x) = x\alpha$. M devient alors un espace vectoriel à droite E , sur le corps K .

Si $a \in A$, l'homothétie $f_a : x \rightarrow ax$ est un endomorphisme de l'espace vectoriel E sur K . Nous allons montrer que l'application $a \rightarrow f_a$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{L}_K(E)$. C'est évidemment un homomorphisme.

1° $a \rightarrow f_a$ est une surjection.

Démontrons d'abord le lemme de densité qui s'énonce :

LEMME de densité. - Soient $x_1, x_2, \dots, x_n$ des éléments de E , linéai-
rement indépendants sur K , et soient $y_1, \dots, y_n$ des éléments quelconques
de E . Il existe $a \in A$ tel que :

$$ax_i = y_i \quad i = 1, 2, \dots, n \quad .$$

La démonstration de ce lemme utilise la relation suivante :

$$(1) \quad 0 \circ \left(\bigcap_{i=1}^n 0 \circ x_i \right) = x_1 K + x_2 K + \dots + x_n K$$

dans laquelle $0 \circ x_i$ représente l'annulateur de x_i dans A et $0 \circ S$ représente l'annulateur de $S \subseteq A$ dans E .

On établit cette relation (1) en raisonnant par récurrence sur n .

$n = 1$. - On a

$$x_1 K \subseteq 0 \circ (0 \circ x_1) \quad ,$$

car

$$ax_1 = 0 \implies ax_1 \alpha = 0, \quad \forall \alpha \in K \quad ,$$

d'où

$$x_1 \alpha \in 0 \circ (0 \circ x_1) \quad .$$

On a

$$0 \circ (0 \circ x_1) \subseteq x_1 K \quad .$$

Soit $y \in 0 \circ (0 \circ x_1)$,

$$ax_1 = 0 \implies ay = 0 \quad .$$

Ceci permet la définition de l'application $\alpha : ax_1 \rightarrow ay$ qui est un automorphisme de M ; en effet, $Ax_1 = M$. $\forall a \in A$, on a donc $ax_1 \alpha = ay$, et, si a est l'unité de A ,

$$x_1 \alpha = y \quad y \in x_1 K \quad .$$

La relation (1) est supposée vraie pour $n - 1$.

On a

$$x_1 K + x_2 K + \dots + x_n K \subseteq 0 \cdot \left(\bigcap_{i=1}^n 0 \cdot x_i \right) \quad ;$$

en effet,

$$ax_i = 0 \Rightarrow ax_i \alpha_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n \quad .$$

Inversement, montrons que

$$0 \cdot \left(\bigcap_{i=1}^n 0 \cdot x_i \right) \subseteq x_1 K + \dots + x_n K \quad .$$

Soit $y \in 0 \cdot \left(\bigcap_{i=1}^n 0 \cdot x_i \right)$, alors

$$ax_1 = ax_2 = \dots = ax_n = 0 \Rightarrow ay = 0 \quad .$$

On considère $I_n = \bigcap_{i=1}^{n-1} (0 \cdot x_i)$; pour tous les $a \in I_n$, c'est-à-dire vérifiant $ax_1 = ax_2 = \dots = ax_{n-1} = 0$, on peut définir l'application $\alpha : ax_n \rightarrow ay$. α est un automorphisme de M ; en effet, on a $I_n x_n = M$, sinon, on aurait $I_n x_n = 0$ et $ax_n = 0$, $\forall a \in I_n$, ce qui entraînerait $x_n \in 0 \cdot I_n = x_1 K + \dots + x_{n-1} K$ (d'après l'hypothèse d'induction). Ceci est contraire à l'hypothèse " $x_1, x_2, \dots, x_n$ linéairement indépendants sur K ". On a donc $\forall a \in I_n$,

$$ax_n \alpha = ay \Rightarrow a(y - x_n \alpha) = 0$$

$$\Rightarrow y - x_n \alpha \in 0 \cdot I_n \Rightarrow y \in x_1 K + \dots + x_n K \quad .$$

La relation (1) est ainsi démontrée.

Le lemme de densité en résulte ; $\forall i$, on peut choisir a_i tel que

$$a_i x_i \neq 0 \quad a_i x_j = 0 \quad i \neq j \quad .$$

De plus, comme $Aa_i x_i = M$, on peut choisir, $\forall i$, un élément b_i tel que $b_i a_i x_i = y_i$.

En posant

$$a = \sum_{i=1}^n b_i a_i \quad ,$$

on a alors $y_i = ax_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$).

D'où le lemme de densité.

E est de dimension finie sur K. En effet, la relation (1) montre qu'à la suite strictement croissante de sous-espaces, $x_1 K + x_2 K + \dots + x_n K$, correspond la suite strictement décroissante d'idéaux à gauche $\bigcap_{i=1}^n 0 : x_i$.

Une telle suite est donc finie, et E est de dimension finie sur K.

E étant de dimension finie sur K, il résulte du lemme de densité que tout endomorphisme de E est une homothétie et, par conséquent, que

$$a \rightarrow f_a \text{ est une surjection} \quad .$$

2° $a \rightarrow f_a$ est une bijection.

Soit $ax = bx$, $\forall x \in E$, alors $(a - b)M = 0$; soit $(a - b)AM = 0$ et, A étant premier, ceci entraîne $a = b$.

$a \rightarrow f_a$ est un isomorphisme de A sur $\mathcal{L}_K(E)$, et le théorème est établi.

COROLLAIRE 1. - Si A est un anneau unitaire artinien à gauche, et si $\mathcal{P}$ est un idéal bilatère premier, $\mathcal{P}$ est un idéal bilatère maximal.

En effet, $A/\mathcal{P}$ est unitaire, premier, artinien à gauche, donc isomorphe à l'anneau M_n , et l'idéal 0 est un idéal bilatère maximal de $A/\mathcal{P}$.

COROLLAIRE 2. - Tout anneau premier, unitaire, artinien à gauche, est artinien et noethérien.

DÉFINITION 3.1. - Un anneau premier, unitaire, artinien à gauche est appelé anneau simple.

PROPRIÉTÉ 3.1. - Tout anneau artinien unitaire est un anneau de Jacobson (c'est-à-dire un anneau dans lequel le radical $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ de Baer et McCoy d'un idéal bilatère est égal au radical de Jacobson $\mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$). On a déjà $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) \subseteq \mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$ (cf. exposé n° 13 : I. Radical). D'après le corollaire 1, tout idéal bilatère premier est maximal ; de plus, tout idéal bilatère maximal est primitif, $\mathfrak{A}$ étant unitaire. $\mathcal{R}(\mathfrak{J})$ est donc une intersection d'idéaux bilatères primitifs, et contient donc $\mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$. D'où $\mathcal{R}(\mathfrak{J}) = \mathcal{R}_J(\mathfrak{J})$.

On démontre une propriété plus forte que le corollaire 2 :

Tout anneau unitaire artinien à gauche est noethérien à gauche (cf. L. LESIEUR et R. CROISOT [5]). Ce qui est faux pour les demi-groupes, comme le montre l'exemple du § 2.

La structure d'un anneau premier noethérien à gauche n'est pas aussi simple.

A. W. GOLDIE [3] a montré qu'un anneau premier noethérien à droite et à gauche possède un anneau de quotients à droite et à gauche qui est un anneau M_n premier artinien, unitaire.

L. LESIEUR et R. CROISOT ont montré qu'un anneau premier, noethérien à gauche, possède un anneau de quotients à gauche qui est un anneau M_n .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ARTIN (Emil). - Zur Theorie der hyperkomplexen Zahlen, Abh. math. Sem. Hamburg. Univ., t. 5, 1927, p. 251-260.
- [2] CARTAN (H.) and EILENBERG (S.). - Homological algebra. - Princeton, Princeton University Press, 1956 (Princeton mathematical Series, 19).
- [3] GOLDIE (A. W.). - The structure of prime rings with maximum conditions, Proc. Nat. Acad. Sc. U. S. A., t. 44, 1958, p. 584-586.
- [4] HILBERT (David). - Über die Theorie der algebraischen Formen, Math. Annalen, t. 36, 1890, p. 473-534.
- [5] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Algèbre noethérienne non commutative. - Paris, Gauthier-Villars (Mémoires des Sciences mathématiques) (à paraître).
- [6] LESIEUR (L.) et CROISOT (R.). - Sur les anneaux premiers noethériens à gauche, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 76, 1959, p. 161-183.
- [7] NOETHER (Emmy). - Idealtheorie in Ringbereichen, Math. Annalen, t. 83, 1921, p. 24-66.
- [8] VAN DER WAERDEN (B. L.). - Algebra. Teil 1., 4te Auflage und Teil 2., 3te Auflage der "Modernen Algebra". - Berlin, Springer-Verlag, 1955 (Grund lehren der mathematischen Wissenschaften, 33 und 34).