

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

MICHEL ZISMAN

Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 12, n° 1 (1958-1959), exp. n° 10, p. 1-10

http://www.numdam.org/item?id=SD_1958-1959__12_1_A9_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1958-1959, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

12 janvier 1959

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1958/59

LE THÉOREME DE RIEMANN-ROCH-HIRZEBRUCH

par Michel ZISMAN

1. Caractéristique et genre de Todd.

Soient $c_1, \dots, c_j, \dots$ des variables. On pose formellement

$$1 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \prod_{i=1}^n (1 + \chi_i x)$$

et

$$T_n^p(c_1, \dots, c_n) = \chi_n \left[\sum \exp(-(\chi_{j_1} + \dots + \chi_{j_p})) \prod_{i=1}^n \frac{\chi_i}{1 - \exp(-\chi_i)} \right]$$

le $\sum$ étant étendu aux $\binom{n}{p}$ combinaisons $1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n$, et χ_n signifiant que l'on ne considère dans le crochet (qui est une série formelle en les χ_i) que les termes homogènes de degré n (χ_i est considéré comme étant de degré 1).

T_n^p est donc un polynôme de poids n en $c_1, \dots, c_n$. On pose

$$\begin{cases} T_n = T_n^0 \\ T_n(y; c_1, \dots, c_n) = \sum_{p=0}^n T_n^p(c_1, \dots, c_n) y^p \end{cases}$$

On remarque que $T_n(-1; c_1, \dots, c_n) = c_n$.

Soient V_{2n} une variété presque complexe, et $c_1, \dots, c_n$ ses classes de Chern (i. e. les classes de Chern du fibré vectoriel des vecteurs tangents muni de sa structure de $GL(n, \mathbb{C})$ -fibré) (cf. [5]).

On désignera par $[V_{2n}]$ la classe fondamentale de V_{2n} . Comme $c_i \in H^{2i}(V_{2n}, \mathbb{Z})$, si $j_1 + \dots + j_p = n$, $c_{j_1} \dots c_{j_p} \in H^{2n}(V_{2n}, \mathbb{Z})$. La valeur de cette classe de cohomologie pour la classe caractéristique $[V_{2n}]$ est un nombre entier que l'on désignera par $c_{j_1} \dots c_{j_p} [V_{2n}]$. Comme

$T_n(y; c_1, \dots, c_n)$ est un polynôme de poids n en $c_1, \dots, c_n$, on peut considérer sa valeur pour $[V_{2n}]$, et on pose :

$$\begin{cases} T_y(V_{2n}) = T_n(y; c_1, \dots, c_n)[V_{2n}] \\ T^p(V_{2n}) = T_n^p \\ T(V_{2n}) = T^0(V_{2n}) \end{cases}$$

On a, bien entendu,

$$T_y(V_{2n}) = \sum_{p=0}^n \frac{1}{p!} T^p(V_{2n}) y^p \quad \text{et} \quad T(V_{2n}) = T_0(V_{2n})$$

DEFINITION 1. - On appelle T_y - genre de Todd (resp. genre en Todd), de la variété presque complexe V_{2n} , le polynôme $T_y(V_{2n})$ (resp. le nombre $T(V_{2n})$).

THEOREME 1. :

- a. $T_{-1}(V_{2n}) = c_n[V_{2n}]$ = caractéristique d'Euler-Poincaré de V_{2n}
- b. $T_1(V_{2n})$ = indice de la variété V_{2n} (pour une variété compacte)

La démonstration de (a) est immédiate. Celle de (b) au contraire repose sur la théorie du cobordisme de Thom [3].

Soit maintenant ξ un $GL(q, \mathbb{C})$ -fibré sur V_{2n} dont les classes de Chern sont $d_1, \dots, d_q$; $c_1, \dots, c_n$ désignant de nouveau les classes de Chern de V_{2n} (cf. [5]).

On a :

$$d_i, c_i \in H^{2i}(V_{2n}, \mathbb{Z})$$

On pose formellement

$$\sum_{i=0}^q d_i x^i = \prod_{i=1}^q (1 + \delta_i x)$$

et

$$t(\xi) = e^{\delta_1} + \dots + e^{\delta_q} \quad ; \quad t_y(\xi) = e^{(1+y)\delta_1} + \dots + e^{(1+y)\delta_q}$$

avec ces notations, on pose

$$\begin{cases} T^p(V_{2n}, \xi) = \chi_n[t(\xi)] \sum \exp(-(\chi_{i_1} + \dots + \chi_{i_p})) \prod_{i=1}^n \frac{\chi_i}{1 - \exp(-\chi_i)} [V_{2n}] \\ T_y(V_{2n}, \xi) = \sum_{p=0}^n T^p(V_{2n}, \xi) y^p \\ T(V_{2n}, \xi) = T_0(V_{2n}, \xi) \end{cases}$$

où χ_n et $\sum$ ont les mêmes significations que dans la définition précédente.

On voit immédiatement que

$$\begin{cases} T_y(V_{2n}, \xi) = \chi_n[t_y(\xi)] \sum_{j=0}^n T_j(y; c_1, \dots, c_j) [V_{2n}] \\ T(V_{2n}, \xi) = T^0(V_{2n}, \xi) . \end{cases}$$

DEFINITION 2. - On appelle T_y -caractéristique de Todd du fibré ξ (resp. caractéristique de Todd) le polynôme $T_y(V_{2n}, \xi)$ (resp. le nombre $T(V_{2n}, \xi)$).

PROPOSITION 1. - $T_{-1}(V_{2n}, \xi) = q \times$ (caractéristique d'Euler Poincaré de V_{2n})

PROPOSITION 2. - $T^p(V_{2n}, \xi) = T(V_{2n}, T^{(p)} \otimes \xi)$ où $T^{(p)}$ désigne le fibré vectoriel p -ième puissance extérieure du dual du fibré des vecteurs tangents muni de sa structure de $GL(n, C)$ -fibré.

Pour la démonstration, voir [3], paragraphe 12.

2. Caractéristique virtuelle.

Soient $v_1, \dots, v_r$ des 2-classes de cohomologies de $H^2(V_{2n}, \mathbb{Z})$. On désigne par $R(y; v_i)$ la série formelle en y

$$\frac{v_i(y+1)}{e^{v_i(y+1)}} = 1 + y$$

DEFINITION 3. - On appelle T_y -caractéristique virtuelle (resp. caractéristique virtuelle) du $GL(q, C)$ -fibré ξ associé à la sous-variété virtuelle $(v_1, \dots, v_r)$ le polynôme

$$T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V = \chi_n[t_y(\xi)] \prod_{i=1}^r R(y; v_i) \sum_{j=0}^{\infty} T_j(y; c_1, \dots, c_j) [V_{2n}],$$

resp. le nombre

$$T((v_1, \dots, v_r), \xi)_V = T_0((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$$

Si ξ est le fibré linéaire trivial, on écrit $T_y((v_1, \dots, v_r))_V$ au lieu de $T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$, et on appelle ce polynôme le T_y -genre virtuel associé à la sous-variété virtuelle $(v_1, \dots, v_r)$. Si $y = 0$ on a le genre virtuel etc.

PROPOSITION 3. - $T_y((v_1, \dots, v_r), \xi)_V$ est un polynôme de degré $n - r$ en y ; il est identiquement nul si $r > n$.

(Démonstration immédiate sur les définitions).

THEOREME 2. - Soient $v_1, \dots, v_r, u, v \in H^2(V_{2n}, \mathbb{Z})$, V_{2n} étant une variété presque complexe compacte.

a. on a

$$\begin{aligned} T_y((v_1, \dots, v_r, u+v), \xi)_V &= T_y((v_1, \dots, v_r, u), \xi)_V \\ &+ T_y((v_1, \dots, v_r, v), \xi)_V + (y-1) T_y((v_1, \dots, v_r, u, v), \xi)_V \\ &- y T_y((v_1, \dots, v_r, u, v, u+v), \xi)_V \end{aligned}$$

b. Soit $V' \subset V$ une sous-variété presque complexe compacte de dimension $2n-2$, $j: V' \rightarrow V$ l'injection canonique, v la 2-classe de cohomologie de V définie par V' alors

$$T_y((j^* v_2, \dots, j^* v_r), j^* \xi)_{V'} = T_y((v, v_2, \dots, v_r), \xi)_V$$

en particulier

$$T_y(V', (j^* \xi)) = T_y((v), \xi)_V$$

c. $T_y((v_1, \dots, v_n), \xi)_V = q \cdot v_1, \dots, v_n [V_{2n}]$

d. si V est une Δ -variété, et si a_i désigne la classe de Chern du i -ième fibré diagonal,

$$(1+y)^n T(V) = \sum_{\ell=0}^n y^\ell \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_\ell \leq n} T_y((a_{i_1}, \dots, a_{i_\ell}))_V$$

démonstration : voir [3] paragraphes 12 et 13.

REMARQUE. - Dans l'exposé précédent, on a démontré un théorème analogue pour la χ_y -caractéristique virtuelle d'un $GL(q, \mathbb{C})$ -fibré analytique sur une variété algébrique (plongée sans singularité dans un espace projectif). χ_y est un polynôme à coefficients entiers. T_y est un polynôme à coefficients rationnels. Le théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch dit que $\chi_y = T_y$ sur une variété algébrique ; il exprime donc, en particulier, des propriétés de divisibilité des classes de Chern des variétés algébriques. Les généralisations du théorème de Riemann-Roch au cas où V n'est plus algébrique ni même analytique complexe (et alors χ_y ne peut plus être défini) se présentent alors comme des théorèmes de divisibilité des coefficients des polynômes T_y ou de polynômes analogues (cf. [1] et [4]).

3. Deux théorèmes sur la χ_y -caractéristique et le χ_y -genre d'une variété algébrique (cf. [7]).

NOTATIONS. - Dans toute la suite, V désigne une variété algébrique de dimension n , $F_1, \dots, F_r, A, B$ des fibrés linéaires analytiques complexes sur V , et W un fibré vectoriel analytique complexe sur V .

THEOREME 3. - Soit G une application qui, à toute variété V , toute sous-variété virtuelle $(F_1, \dots, F_r)$ de V , tout fibré W sur V fait correspondre une série formelle à coefficients rationnels notée $G((F_1, \dots, F_r), W)_V$ telle que

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad & G((F_1, \dots, F_r, A \otimes B), W)_V = G((F_1, \dots, F_r, A, W)_V \\ & + G((F_1, \dots, F_r, B), W)_V + (y - 1) G((F_1, \dots, F_r, A, B), W)_V \\ & - y G((F_1, \dots, F_r, A, B, A \otimes B), W)_V. \end{aligned}$$

(ii) si $F_1 = \{S\}$ où S est un diviseur sans singularité alors

$$G((F_1, \dots, F_r), W)_V = G((F_2)_S, \dots, (F_r)_S, W_S)_S$$

(iii) $G((), W)_V = \chi_y(V, W)$ (où $()$ désigne la sous-variété virtuelle vide)

alors, pour tous $V, F_1, \dots, F_r, W$ on a

$$G((F_1, \dots, F_r), W)_V = \chi_y((F_1, \dots, F_r), W)_V$$

en particulier G est un polynôme à coefficients entiers.

DEMONSTRATION. - Comme χ_y vérifie les conditions (i), (ii), (iii),
 $G' = \chi_y - G$ vérifie les conditions (i), (ii), (iii)' où

$$(iii)' : \quad G'((), W)_V = 0 .$$

Par récurrence sur la dimension de V on va montrer que cela entraîne que
 $G' = 0$ identiquement.

Par récurrence sur la dimension de V on va montrer que cela entraîne que
 $G' = 0$ identiquement.

D'après le théorème 4 de [7] on peut poser $\{S\} = F_1 \otimes \{T\}$ où S et T sont
des diviseurs sans singularités. En appliquant (i), (ii) (où (iii)' si $r = 1$)
 $G'(\{S\}, F_2, \dots, F_r, W)_V = G'((F_2)_S, \dots, (F_r)_S, W_S)_S$

$$\begin{aligned} &= G'((F_1, \dots, F_r), W)_V + G'((F_2)_T, \dots, (F_r)_T, W_T)_T \\ &+ (y - 1)G'((F_1)_T, (F_2)_T, \dots, (F_r)_T, W_T)_T \\ &- y G'((F_1)_S, (F_2)_S, \dots, (F_r)_S, (T)_S, W_S)_S \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence tous les termes autres que
 $G'((F_1, \dots, F_r), W)_V$ sont nuls. L'égalité précédente entraîne que ce
terme est nul.

C. Q. F. D.

THEOREME 4. - Soit G une application qui à toute variété V , toute sous-
variété virtuelle $(F_1, \dots, F_r)$ de V fait correspondre un nombre rationnel
 $G(F_1, \dots, F_r)_V$ tel que

$$(i) \quad G(F_1, \dots, F_r, A \otimes B)_V = G(F_1, \dots, F_r, A)_V + G(F_1, \dots, F_r, B)_V \\ + (y - 1)G(F_1, \dots, F_r, A, B)_V - y G(F_1, \dots, F_r, A, B, A \otimes B)_V$$

$$(ii) \quad G(F_1, \dots, F_r)_V = G((F_2)_S, \dots, (F_r)_S)_S \quad \text{si } F_1 = \{S\}$$

(iii) il existe un nombre rationnel y_0 tel que

$$G()_V = \chi_{y_0}(V)$$

alors

$$\chi_{y_0}(F_1, \dots, F_r)_V = G(F_1, \dots, F_r)_V$$

démonstration analogue à la démonstration du théorème 3.

REMARQUE. - χ_y étant un polynôme en y , il est licite de parler de la valeur de ce polynôme pour une valeur particulière y_0 de y .

4. Théorème de Riemann-Roch-Hirzebruch (R-R-H) pour un fibré linéaire.

Soit V une variété algébrique $F_1, \dots, F_r$ des fibrés analytiques-complexes linéaires sur V , W un fibré vectoriel de dimension q analytique complexe associé au $GL(q, \mathbb{C})$ -fibré ξ , $c(F_i) = f_i$ la classe de Chern du fibré F_i ($f_i \in H^2(V, \mathbb{Z})$).

On pose

$$\begin{cases} T_y((F_1, \dots, F_r), W)_V = T_y((f_1, \dots, f_r), \xi)_V \\ T_y(V, W) = T_y(V, \xi) \end{cases}$$

Comme on a

$$c(F_1 \otimes F_2) = c(F_1) + c(F_2) \quad \text{et}$$

$c(F_S) = j^* c(F)$ si $j : S \rightarrow V$ est l'injection canonique (cf. [5]), on en déduit que les conditions (i) (ii) des théorèmes 3 et 4 sont vérifiées.

Mais comme de plus

$$\begin{cases} T_{-1}(V) = \chi_{-1}(V) = \text{caractéristique d'Euler-Poincaré} \\ T_1(V) = \chi_1(V) = \text{indice} \end{cases}$$

On déduit du théorème 4 le théorème suivant :

$$\text{THEOREME 5. - } \chi_1(F_1, \dots, F_r)_V = T_1(f_1, \dots, f_r)_V$$

$$\chi_{-1}(F_1, \dots, F_r)_V = T_{-1}(f_1, \dots, f_r)_V$$

pour déduire de ce théorème le théorème R-R-H, on considère une Δ -variété V^Δ associée à V (on rappelle que V^Δ est algébrique si V est algébrique), ce qui est intéressant car on a les deux lemmes suivants :

LEMME 1. - Si V est une Δ -variété, alors $\chi(V) = T(V)$.

LEMME 2. - $\chi(V) = \chi(V^\Delta)$ et $T(V) = T(V^\Delta)$.

Donc $\chi(V) = \chi(V^\Delta) = T(V^\Delta) = T(V)$ soit :

THEOREME 6. - $\chi(V) = T(V)$.

COROLLAIRE. - $\chi(F_1, \dots, F_r)_V = T(F_1, \dots, F_r)_V$ en effet d'après le théorème 6, on peut appliquer le théorème 4 à $G = T$ et $y_0 = 0$.

Cas particulier : supposons $r = 1$: $\chi(F)_V = T(F)_V$ mais

$$\chi(F)_V = \chi(V) - \chi(V, F^{-1}) \quad ([7] \text{ paragraphe } 2)$$

$$T(F)_V = T(V) - T(V, F^{-1}) \quad (\text{définition } 3)$$

Par conséquent :

$$\chi(V, F) = T(V, F) .$$

Explicitons le résultat obtenu :

THÉOREME 7. - (R-R-H) Soient $V(= V_n)$ une variété algébrique, F un fibré linéaire analytique complexe de classe de Chern $f \in H^2(V, \mathbb{Z})$, $\mathcal{F}$ le faisceau des germes de sections holomorphes du fibré F .

a. Les espaces vectoriels $H^i(V, \mathcal{F})$ sont de dimension finie, et sont nuls pour $i > n$.

b. $\chi(V, F) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(V, \mathcal{F})$ est un polynôme en f et en les classes de Chern de V . Si on pose $1 + c_1 x + \dots + c_n x^n = \prod_{i=1}^n (1 + \gamma_i x)$ on a

$$\chi(V, F) = \chi_n \left[e^f \prod_{i=1}^n \frac{\gamma_i}{1 - \gamma_i} \right] [V]$$

DÉMONSTRATIONS DES LEMMES. - Pour la démonstration (longue et assez technique) du lemme 2, voir [3]. Pour le lemme 1 on remarque que

$$(1 + y)^n T(V) = \sum_{\ell=0}^n y^\ell \sum T_y(A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell})_V \quad (\text{Théorème 2 d.})$$

$$(1 + y)^n \chi(V) = \sum_{\ell=0}^n y^\ell \sum \chi_y(A_{i_1}, \dots, A_{i_\ell})_V \quad ([7] \text{ proposition } 5)$$

T_y et χ_y étant des polynômes, on peut donner à y la valeur 1. Le lemme résulte alors du théorème 5.

REMARQUE. - La démonstration précédente utilise donc la théorie du cobordisme. Il n'est malheureusement pas possible de donner à y la valeur -1 (cas où la démonstration du théorème 5 est triviale) puisque le premier membre des égalités écrites s'annule.

5. R-R-H pour un fibré vectoriel de dimension $q \geq 1$.

Soient W un fibré vectoriel analytique complexe de dimension q , ξ un $GL(q, C)$ -fibré associé à W et E un fibré associé à ξ de fibre $F(q) = GL(q, C)/\Delta(q, C)$. Soit φ la projection $E \rightarrow V$. Le fibré $\varphi^* W$, image inverse de W par l'application φ , est donc un $GL(q, C)$ -fibré dont le groupe structural peut être réduit à $\Delta(q, C)$ (comme fibré analytique complexe) : la construction de $\varphi^* W$ à partir de W est une généralisation de la construction de V^Δ à partir de V . De plus, la base du fibré $\varphi^* W$ c'est-à-dire E , est une variété algébrique comme on l'a vu dans la démonstration du théorème 3 de [7].

Le lemme 2 se généralise alors et donne :

LEMME 3. - a. $T(V, W) = T(E, \varphi^* W)$

b. $\chi(V, W) = \chi(E, \varphi^* W)$

La démonstration de a. est facile (voir [3]). Celle de b. utilise des suites spectrales (voir [2]).

Soient $A_1, \dots, A_q$ les fibrés diagonaux de $\varphi^* W$. On a

$$\chi(E, \varphi^* W) = \sum_{i=1}^q \chi(E, A_i) \quad ([6] \text{ proposition 10})$$

$$T(E, \varphi^* W) = \sum_{i=1}^q T(E, A_i) \quad ([3] \text{ paragraphe 12-1-6})$$

Comme E est algébrique et A_i linéaire, on peut appliquer R-R-H. Après utilisation du lemme 3, on trouve

THEOREME 8. - $\chi(V, W) = T(V, W)$.

Comme $\chi^p(V, W) = \chi(V, W \otimes T^p)$ par définition

$$T^p(V, W) = T(V, W \otimes T^p) \quad (\text{proposition 2})$$

le théorème 8 entraîne l'égalité $\chi^p(V, W) = T^p(V, W)$, soit en multipliant par y^p et sommant sur p : $\chi_y(V, W) = T_y(V, W)$. On peut alors appliquer le théorème 3 à $G = T_y(V, W)$:

THEOREME 9. - (R-R-H) Soit V une variété algébrique $F_1, \dots, F_r$ des fibrés analytiques complexes linéaires, W un fibré analytique complexe à fibre vectorielle on a

$$\chi_y((F_1, \dots, F_r), W)_V = T_y((F_1, \dots, F_r), W)_V$$

(en particulier χ_y ne dépend que de la structure continue de W).

BIBLIOGRAPHIE

- [1] ATIYAH (M. F.) and HIRZEBRUCH (F.). - Some non embeddability theorems for differentiable manifold, Colloque international [1959. Lille], Bull. Soc. math. France, t. 87, 1959 (à paraître).
 - [2] BOREL (A.) and HIRZEBRUCH (F.). - Characteristic classes and homogeneous spaces, I : Amer. J. et Math., t. 80, 1958, p. 458-538. II, III : à paraître.
 - [3] HIRZEBRUCH (Friedrich). - Neue topologische Methoden in der algebraischen Geometrie. - Berlin, Springer, 1956 (Ergebnisse der Mathematik ..., Neue Folge, 9).
 - [4] HIRZEBRUCH (Friedrich). - A riemann-Roch theorem for differentiable manifolds, Séminaire Bourbaki, t. 11, 1958/59, n° 177.
 - [5] ZISMAN (Michel). - Classes de Chern, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 10, 1956/57, n° 23.
 - [6] ZISMAN (Michel). - Cohomologie des variétés analytiques complexes, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 11, 1957/58, n° 21.
 - [7] ZISMAN (Michel). - La χ_y -caractéristique virtuelle d'après F. Hirzebruch, Séminaire Dubreil-Pisot, t. 12, 1958/59, n° 4.
-