Séminaire Dubreil.
Algèbre et théorie
des nombres

Ernest-August Behrens

Sur les anneaux admettant une représentation normale dans un module dont le treillis des sous-modules est distributif

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 11, n° 2 (1957-1958), exp. n° 17, p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=SD_1957-1958__11_2_A4_0>

Faculté des Sciences de Paris
-:-:-:-

Séminaire P. DUBREIL
M.-L. DUBREIL-JACOTIN et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)
Année 1957/58
-:-:-:-

10 mars 1958

SUR LES ANNEAUX ADMETTANT UNE REPRÉSENTATION NORMALE DANS UN MODULE DONT LE TREILLIS DES SOUS-MODULES EST DISTRIBUTIF

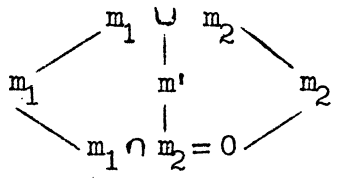
par Ernest-August BEHRENS

Les anneaux T, mentionnés dans le titre sont supposés semi-primaires et munis d'un élément unité. Ils sont une généralisation des anneaux simples ou mieux des anneaux primitifs, c'est-à-dire des anneaux T ayant un T-module normal et irréductible. En premier lieu, je donnerai un critère commode pour la distributivité du treillis $V(m)$ des T-sous-modules d'un T-module normal m (théorème 2). Puis je caractériserai les anneaux ci-dessus comme ceux qui sont représentables par des anneaux d'applications linéaires, qui sont "suffisamment denses" dans un sens précisé dans le théorème 3, supposant que T est une algèbre sur un corps commutatif K, qui est un corps de décomposition pour les algèbres $\overline{T}$ dans $T/W(T) = \overline{T}_1 \oplus \dots \oplus \overline{T}_q$.

1. Soit T un anneau semi-primaire ayant un élément unité 1, c'est-à-dire pour lequel la condition minimale pour les idéaux à droite est remplie. Soit m un module à droite par rapport à T, et unitaire. Soit $V(m)$ le treillis des sous-modules de m par rapport à T. En premier lieu supposons l'anneau T simple. Si le module m est irréductible, il est clair que le treillis V, se composant de 0 et de m, est distributif. D'autre part si m est réductible, il est la somme directe de sous-modules irréductibles m_ι, T-isomorphes entre eux. Au moyen de l'isomorphisme σ de m_1 sur m_2 nous formons l'ensemble

$$m' = \{x_1 + x_1\sigma \; ; \; x_1 \in m_1\} .$$

C'est un sous-module de m par rapport à T, et on voit que $V(m)$ contient un sous-treillis, ayant le diagramme suivant



Ceci montre que le treillis $V(m)$ n'est pas distributif, et nous avons, par conséquent, la

PROPOSITION 1. - Si T est simple, la distributivité de $V(m)$ est équivalente à l'irréductibilité de m.

Il n'est pas difficile de généraliser la proposition 1 à un anneau T primaire, c'est-à-dire à un anneau semi-primaire ayant la propriété suivante : le quotient $\overline{T}$ de l'anneau T par son radical de Wedderburn $W(T)$ est simple. Pour cela, nous formons la chaîne de Loewy pour le T-module m :

$$m \supset mW \supset mW^2 \supset \ldots \supset mW^r = 0 . \tag{1}$$

Puisque mW^{k+1} est le résultat de l'application de W à mW^k, chacun des groupes-quotients mW^k/mW^{k+1} est un module par rapport à l'anneau-quotient $\overline{T} = T/W$. Si le treillis $V(m)$ est distributif, le treillis $V(mW^k/mW^{k+1})$ est distributif aussi. Alors la proposition 1 a pour conséquence l'irréductibilité du quotient mW^k/mW^{k+1}, autrement dit, la chaîne (1) est maximale.

Réciproquement, si cette condition est remplie, les modules de la chaîne de Loewy constituent la totalité des T-sous-modules de m. Par conséquent, le treillis $V(m)$ distributif bien entendu, est une chaîne, ce qui démontre la

PROPOSITION 2. - Si T est primaire, la distributivité de $V(m)$ est équivalente à la maximalité de la chaîne de Loewy (1).

On prouve, dans la théorie des anneaux semi-primaires, qu'un tel anneau T, ayant un élément 1, est la somme des anneaux primaire $T_\varkappa$ et d'un sous-groupe additif N du radical $W(T)$:

$$T = T_1 + T_2 + \ldots + T_q + N . \tag{2}$$

(Cette somme est directe mais seulement en sa qualité de groupe additif). Il existe q éléments idempotents et orthogonaux $\varepsilon_\varkappa$ tel que $1 = \varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_q$ et $T_\varkappa = \varepsilon_\varkappa T \varepsilon_\varkappa$. En formant les $T_\varkappa$-modules $m\varepsilon_\varkappa$, nous voyons facilement que la distributivité de $V(m)$ implique la distributivité des $V(m\varepsilon_\varkappa)$. Donc, suivant la proposition 2 la maximalité des chaînes de Loewy

$$m\varepsilon_\varkappa \succ mW(T_\varkappa) \succ \ldots \succ mW(T_\varkappa)^{r_\varkappa} = 0 , \tag{3}$$

$\varkappa = 1, \ldots, q$, est une condition nécessaire pour la distributivité du treillis $V(m)$. Cette condition est suffisante aussi. Car 1 étant la somme des $\varepsilon_\varkappa$ nous avons la représentation univoque

$$u = u\varepsilon_1 + \ldots + u\varepsilon_q$$

pour chaque T-sous-module u de m, et la maximalité de la chaîne (3) implique $u\,\varepsilon_\varkappa = mW(T_\varkappa)^{k_\varkappa}$, comme on l'a remarqué ci-dessus, pour un exposant convenable $k_\varkappa$. Alors la représentation des modules

$$u = mW_1^{k_1} + \ldots + mW_q^{k_q}, \quad W_\varkappa = W(T_\varkappa),$$

entraîne la distributivité de $V(m)$. Nous avons prouvé le

THÉORÈME 1. - La distributivité de $V(m)$ est équivalente à la maximalité des chaînes de Loewy (3) pour $\varkappa = 1, \ldots, q$.

On peut trouver la démonstration détaillée du théorème 1 dans [1].

2. Si le module m est normal, c'est-à-dire, si l'annulateur du T-module m est zéro, l'exposant $r_\varkappa$, dans la formule (3), est égal à l'exposant $\rho_\varkappa$ du radical $W(T_\varkappa)$ de l'anneau primaire $T_\varkappa$, donc au plus petit nombre vérifiant $W(T_\varkappa)^\rho = 0$. Le nombre $\rho_\varkappa$ dépend de l'anneau $T_\varkappa$ seulement, mais non du module m. Soit $\ell_\varkappa = \ell(m\,\varepsilon_\varkappa)$ la longueur du treillis $V(m\,\varepsilon_\varkappa)$ des $T_\varkappa$-sous-modules de $m\,\varepsilon_\varkappa$. Il est clair que $\rho_\varkappa \leqslant \ell_\varkappa$ et que $\rho_\varkappa = \ell_\varkappa$ est équivalent à la maximalité de la chaîne (3). Soit $\ell = \ell(m)$ la longueur du treillis $V(m)$.

PROPOSITION 3.

$$\ell_1 + \ell_2 + \ldots + \ell_q = \ell.$$

DÉMONSTRATION. - Soit

$$(4) \qquad m = m_0 \succ m_1 \succ m_2 \succ \ldots \succ m_\ell = 0$$

une chaîne maximale de T-sous-modules de m. Chaque module-quotient $\overline{m}_i = m_i/m_{i+1}$ est un module irréductible et normal pour un et seulement un terme de la somme dans la représentation

$$(5) \qquad \overline{T} = T/W(T) = \overline{T}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{T}_q,$$

les $\overline{T}_\varkappa \simeq T_\varkappa/W(T_\varkappa)$ étant simples. De plus les autres termes de la somme dans la formule (5) sont annulés par cet $\overline{m}_i$. Les modules-quotients $\overline{m}_{i_1}, \ldots, \overline{m}_{i_{t_\varkappa}}$ de la chaîne (4), qui sont normaux par rapport à $\overline{T}_\varkappa$, constituent une chaîne $C^{(\varkappa)}$ de T-modules T-isomorphes entre eux. Il n'est pas difficile de démontrer, que la chaîne

$$(6) \qquad m\,\varepsilon_\varkappa = m_0\,\varepsilon_\varkappa \supseteq m_1\,\varepsilon_\varkappa \supseteq \ldots \supseteq m_\ell\,\varepsilon_\varkappa = 0$$

de $T_\varkappa$-sous-modules de $m\,\varepsilon_\varkappa$ est maximale (sans les répétitions bien entendu !) et que la longueur $\ell_\varkappa$ de cette chaîne est égale au nombre $t_\varkappa$ de modules dans la chaîne $C^{(\varkappa)}$. En conséquence la somme $\ell_1 + \ldots + \ell_q$ est égale au nombre ℓ de tous les modules $\overline{m}_i$ dans tous les ensembles $C^{(\varkappa)}$.

Utilisant les inégalités $\rho_\varkappa \leq \ell_\varkappa$, $\varkappa = 1, \ldots, q$, valables pour chaque T-module normal m, et l'équivalence des q équations $\rho_\varkappa = \ell_\varkappa$ à la maximalité des chaînes (3), la proposition 3 et le théorème 1 entraînent le théorème suivant :

THÉORÈME 2. - Soit m un module normal de T, T semi-primaire, $1 \in T$. Le treillis $V(m)$ des T-sous-modules de m est distributif si et seulement si la longueur $\ell(m)$ du treillis $V(m)$ remplit la condition

$$\ell(m) = \rho_1 + \rho_2 + \ldots + \rho_q .$$

J'attire votre attention sur le fait que la somme des $\rho_\varkappa$ dépend seulement de l'anneau T des opérateurs, mais non du module m, et que le nombre $\ell(m)$ a une signification très simple dans la théorie des treillis.

3. N. JACOBSON a donné une définition des anneaux primitifs : l'anneau T est primitif, s'il existe un T-module normal et irréductible. (Voir par exemple [2], définition 2, p. 4). On peut décrire ces anneaux comme les anneaux denses des applications linéaires d'un module sur un corps K. Si la condition minimale pour les idéaux à droites dans T est remplie, on peut exprimer cela en disant : T est isomorphe à l'anneau des matrices carrées sur K. Les anneaux admettant une représentation normale dans un module dont le treillis des sous-modules est distributif, sont une généralisation des anneaux primitifs ; en effet, un module irréductible n'a que zéro et lui-même comme sous-modules.

Existe-t-il pour ces anneaux une description analogue à la représentation ci-dessus des anneaux primitifs ?

Soit T une algèbre de rang fini n sur le corps commutatif K. En premier lieu je suppose que T soit primaire et que K soit le corps de décomposition pour l'anneau quotient $\overline{T} = T/W(T)$, c'est-à-dire que $\overline{T}$ est isomorphe à l'anneau $K_{n\times n}$ des matrices carrées sur K. Soit m un module normal par rapport à T et supposons le treillis $V(m)$ distributif.

T étant primaire et $V(m)$ étant distributif, la chaîne de Loewy

$$m = mW^0 \supset mW^1 \supset \ldots \supset mW^\rho = 0$$

est maximale (proposition 2). Utilisant les désignations $m_k = mW^k$ et $\overline{m}_k = m_k/m_{k+1}$,

chaque élément α de $W(T)$ induit une application A, linéaire par rapport à K, du module quotient $\overline{m}_k$ sur $\overline{m}_{k+1}$. Ces applications A forment le groupe additif $L(\overline{m}_k, \overline{m}_{k+1}, W(T))$. Parce que le radical $W(T)$ est un idéal bilatère de T, le groupe L vérifie la relation $\overline{T}.L.\overline{T} \subseteq L$, dont on peut tirer la conséquence que L est le groupe dense des applications K-linéaires de $\overline{m}_k$ sur $\overline{m}_{k+1}$, puisque $\overline{T}$ est simple et les $\overline{m}_k$ sont des $\overline{T}$-modules irréductibles ayant le corps K comme centralisateur. (Voir par exemple [2], théorème 1, p. 31). D'une façon plus précise soient $n = \text{rang}_K \overline{m}_k$, et k_o un nombre compris entre 0 et $\rho - 1$, soient donnés n éléments $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ de $\overline{m}_{k_o}$, linéairement indépendants par rapport à K, et n éléments $\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n$ de $\overline{m}_{k_o+1}$, il existe alors un élément α de l'anneau T ayant les propriétés suivantes :

$$(7) \qquad \begin{cases} m_k \alpha \subseteq m_{k+1} & \text{pour } k = 0, 1, \ldots, \rho - 1, \\ \overline{x}_i \alpha = \overline{y}_i & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n. \end{cases}$$

Dans les dernières formules, j'ai désigné par α l'élément A de L, qui est induit par α. Il est clair que l'itération d fois de ce procédé donne l'existence d'un élément τ de T vérifiant

$$(8) \qquad \begin{cases} m_k \tau \subseteq m_{k+d} & \text{pour } k = 0, 1, \ldots, \rho - d, \\ \overline{x}_i \tau = \overline{y}_i & \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n, \end{cases}$$

en quoi k_o est un nombre entre 0 et $\rho - d - 1$. De nouveau la lettre τ désigne un élément de T et simultanément l'élément de $L(\overline{m}_k, \overline{m}_{k+d}, W(T)^d)$, qui est induit par τ dans ce groupe L. Parce que $\overline{m}_k$ est un $\overline{T}$-module irréductible, les formules (8) sont remplies aussi pour $d \neq 0$. L'inverse de ce résultat est démontrable sans difficulté. Nous avons la

PROPOSITION 4. - *Soit T une algèbre sur le corps commutatif K, soit $\overline{T} = T/W(T) \cong K_{n\times n}$. T admet un T-module m normal et unitaire, ayant son treillis $V(m)$ distributif, si et seulement si T est représentable par un anneau d'applications K-linéaires, où existe un élément τ remplissant les conditions (8), pour chaque choix du nombre d entre 0 et $\rho - 1$, du nombre k_o entre 0 et $\rho - d - 1$, des n éléments $\overline{x}_i$, K-linéairement indépendants dans $\overline{m}_k$, et des éléments $\overline{y}_i$ dans $\overline{m}_{k+d}$.*

Si l'algèbre T sur le corps K n'est pas primaire et si le corps K est le corps de décomposition pour les termes $\overline{T}_\varkappa$ dans la somme $\overline{T} = \overline{T}_1 + \ldots + \overline{T}_q$

on peut réduire ce cas à la proposition 4. De nouveau, il faut remplacer la chaîne (1) par les chaînes (3) pour les divers $\varkappa$ et appliquer la proposition 4. Comme dans la démonstration de la proposition 3, il est meilleur d'utiliser, au lieu de la chaîne (3), la sous-chaîne $C^{(\varkappa)}$ de la chaîne des modules quotients de (4), qui est constituée par les modules $\overline{n}_{i_k}$, qui sont T-isomorphes entre-eux, $k = 1, 2, \ldots, \ell_\varkappa$.

Alors nous pouvons dire :

THÉORÈME 3. - Soit T une algèbre de rang fini sur le corps commutatif K. Dans l'équation $\overline{T} = T/W(T) = \overline{T}_1 \oplus \ldots \oplus \overline{T}_q$, supposons chaque $\overline{T}_\varkappa \simeq K_{n\times n}$.

Alors T admet un module n normal et unitaire, ayant son treillis V(n) distributif, si et seulement si T est représentable par un anneau d'applications K-linéaires, qui est "suffisamment dense" dans le sens suivant : pour chaque chaîne

$$C^{(\varkappa)} = \left\{ \overline{n}_{i_k} \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, \ell_\varkappa,$$

de ces modules quotients $\overline{n}_i$ de la chaîne (4), qui sont T-isomorphes entre eux, les conditions de la proposition 4 sont vérifiables par un élément convenable de l'anneau. Il y a lieu de remplacer le nombre ρ par les nombres $\rho_\varkappa$ et les modules $\overline{n}_k$ et $\overline{n}_{k+d}$ par les modules $\overline{n}_{i_k}$ et $\overline{n}_{i_{k+d}}$ de la chaîne $C^{(\varkappa)}$.

Si l'algèbre T est simple ($q = \rho_1 = 1$), on retrouve dans le théorème 3 la représentation bien connue des algèbres simples, ayant un corps de décomposition comme corps de base.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BEHRENS (Ernest-August). - Eine Charakterisierung der T-moduln mit distributiven Untermodulverband bei halbprimären T, Archiv Math., t. 8, 1957, p. 265-273.

[2] JACOBSON (Nathan). - Structure of rings. - Providence, American mathematical Society, 1956 (Amer. math. Soc. Coll. Publ., n° 37).