

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

M. ZISMAN

Espaces fibrés à fibre vectorielle

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 10 (1956-1957), exp. n° 21, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SD_1956-1957__10__A19_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1956-1957, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Séminaire P. DUBREIL et C. PISOT
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1956/57

-:-:-:-

ESPACES FIBRÉS A FIBRE VECTORIELLE

(Exposé de M. ZISMAN, le 13.5.1957)

1.- DÉFINITIONS.

Les notations sont celles de l'exposé précédent. En particulier nous écrirons $H^1(X, G)$ au lieu de $H^1(X, G_c)$, resp. $H^1(X, G_d)$, resp. $H^1(X, G_\omega)$ quand les résultats sont valables dans les trois cas X étant alors un espace topologique quelconque resp. une variété différentiable C^∞ , resp. une variété analytique complexe.

Le groupe de Lie complexe $GL(n, C)$ des matrices $(n \times n)$ à coefficients dans C et inversibles, opère sur l'espace vectoriel C^n effectivement et de manière holomorphe. Si $\xi \in H^1(X, GL(n, C))$ il existe donc un espace fibré W associé à ξ de fibre C^n de groupe structural $GL(n, C)$. Les fibres de W sont alors des espaces vectoriels isomorphes à C^n . On dira que W est un espace fibré à fibre vectorielle associé à ξ . On construit alors facilement un espace fibré principal associé à ξ , soit E : si $x \in X$ la fibre E_x de E au-dessus de x est l'ensemble de tous les isomorphismes de C^n sur l'espace vectoriel W_x (fibre de W au-dessus de x). On définit de même des espaces fibrés à fibre vectorielle associés à $\xi \in H^1(X, GL(n, R))$ de fibre R^n . La construction de l'espace fibré principal associé à W est aussi la même que dans le cas complexe.

1.1.- Soient A et B des espaces vectoriels finis sur un corps K . On sait définir les espaces vectoriels suivants :

$A \oplus B$	(somme directe)
$A \otimes B$	(produit tensoriel)
$\text{Hom}(A, B)$	(ensemble des K -homomorphismes de A dans B)
$A^* = \text{Hom}(A, K)$	
$A^{(p)}$	(espace vectoriel des p -vecteurs)

Soient maintenant W et W' deux espaces fibrés à fibre vectorielle de fibre C^n et $C^{n'}$, de même base X ; W_x, W'_x désigneront les fibres de W et

W' au-dessus du point x .

On peut alors définir de manière naturelle les espaces fibrés suivants :

$$\begin{aligned} W \oplus W' & \quad (\text{somme de Whitney}) \\ W \otimes W' & \quad (\text{produit tensoriel}) \\ \text{Hom}(W, W') & \\ W^* & \quad (\text{espace fibré dual}) \\ W^{(p)} & \quad (\text{espace fibré des } p\text{-vecteurs}) \end{aligned}$$

les fibres de ces espaces au-dessus de x sont alors respectivement :

$$W_x \oplus W'_x, \quad W_x \otimes W'_x, \quad \text{Hom}(W_x, W'_x), \quad W_x^*, \quad W_x^{(p)}.$$

Si au-dessus de $U \subset X$, W (resp. W') est isomorphe à $U \times C^n$ (resp. $U \times C^{n'}$) $W \otimes W'$ est isomorphe à $U \times (C^n \otimes C^{n'})$, les propositions étant analogues dans les autres cas.

De manière précise, soit $U = \{U_i\}$ un recouvrement de X , soient g_{ij} et g'_{ij} les U -cocycles définissant W et W' . Le cocycle associé à $W \oplus W'$ est :

$$\begin{pmatrix} g_{ij}(x) & 0 \\ 0 & g'_{ij}(x) \end{pmatrix} \in GL(n + n', C) \quad \text{pour } x \in U_i \cap U_j.$$

Le cocycle associé à $W \otimes W'$ est :

$$g_{ij}(x) \otimes g'_{ij}(x) \in GL(n n', C) \quad \text{pour } x \in U_i \cap U_j$$

($\otimes$ représente le produit de Kronecker).

Le cocycle associé à W^* est :

$$g_{ij}^*(x) \in GL(n, C)$$

($g_{ij}^*(x)$ est la transposée de la matrice inverse de $g_{ij}(x)$).

Le cocycle associé à $W^{(p)}$ est :

$$g_{ij}^{(p)}(x) \in GL\left(\binom{n}{p}, C\right)$$

où $g_{ij}^{(p)}(x)$ est la matrice obtenue de la manière suivante :

soit (e_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ une base de C^n , et
 $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p})$ $1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$ une base de l'espace

vectoriel des p -vecteurs de C^n . A toute matrice $g \in GL(n, C)$ on associe la matrice $g^{(p)}$ telle que $g^{(p)}(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}) = g(e_{i_1}) \wedge \dots \wedge g(e_{i_p})$. Si

l'on change la base (e_i) $g^{(p)}$ est transformée par un automorphisme intérieur de $GL(\binom{n}{p}, \mathbb{C})$. La classe de cohomologie de $g_{ij}^{(p)}(x)$ est donc définie sans ambiguïté.

On voit sans peine que les cocycles ci-dessus restent dans la même classe de cohomologie quand g_{ij} ou g'_{ij} sont remplacés par des cocycles cohomologues. Le procédé ci-dessus définit donc la somme de Whitney, le produit tensoriel, etc.. non seulement pour les fibrés à fibre vectorielle W et W' , mais encore pour les classes d'équivalences de fibrés à groupe structural $GL(n, \mathbb{C})$. Ainsi par exemple si $\xi \in H^1(X, GL(n, \mathbb{C}))$ et $\xi' \in H^1(X, GL(n', \mathbb{C}))$, $\xi \otimes \xi'$ est un élément de $H^1(X, GL(nn', \mathbb{C}))$ etc...

PROPOSITION 1.2.— Soient W, W', W'' des espaces fibrés à fibre vectorielle de base X . On a :

$$(W \oplus W') \oplus W'' \approx W \oplus (W' \oplus W'') \quad W \oplus W' \approx W' \oplus W$$

$$(W \otimes W') \otimes W'' \approx W \otimes (W' \otimes W'') \quad W \otimes W' \approx W' \otimes W$$

$$(W \oplus W') \otimes W'' \approx (W \otimes W'') \oplus (W' \otimes W'')$$

$$(W \oplus W')^* \approx W^* \oplus W'^* \quad (W \otimes W')^* = W^* \otimes W'^*$$

$$(W^{(p)})^* \approx (W^*)^{(p)}$$

$$(W^*)^{(n)} \otimes W^{(p)} \approx W^{*(n-p)} \quad (\text{si } W \text{ a pour fibre } \mathbb{C}^n)$$

$$\text{Hom}(W, W') \approx W^* \otimes W'.$$

la démonstration est immédiate : il suffit de vérifier qu'on a des isomorphismes pour les fibres au-dessus de chaque point x , et la propriété découle alors des isomorphismes canoniques bien connus en algèbre linéaire.

REMARQUE.— Tout ce qui précède est encore valable pour les espaces fibrés à fibre vectorielle réelle.

2.- Espace fibré des vecteurs tangents aux points d'une variété différentiable.

2.1.— Soit V_n une variété différentiable C^∞ de dimension n , et U_i un ouvert de V_n où sont définies des fonctions coordonnées $x_1, \dots, x_n$. Si U_j est un autre ouvert de V_n , ayant des coordonnées $y_1, \dots, y_n$, le déterminant $\frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)}$ est non nul dans $U_i \cap U_j$.

La matrice $g_{ij}(x)$ de coefficients $\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) est donc un élément de $\Gamma(U_i \cap U_j, (GL(n, \mathbb{R}))_d)$.

On voit sans peine que g_{ij} est un cocycle qui définit donc un élément R^θ de l'ensemble de cohomologie $H^1(V_n, (GL(n, R))_d)$. Prenons comme recouvrement $U = \{U_i\}$ de V_n le recouvrement "maximal" intervenant dans la définition de V_n (Cf. exposé 7, paragraphe 1). Le fibré $R\mathcal{C}$ associé à R^θ défini par ce recouvrement, de fibre R^n et de groupe structural $GL(n, R)$ est appelé le fibré des vecteurs tangents à la variété V_n . Tout point de la fibre $R\mathcal{C}_x$ en $x \in V_n$ s'identifie canoniquement à un vecteur tangent en x à V ; une section de $R\mathcal{C}$ au-dessus d'un ouvert U s'identifie à un champ de vecteurs tangents à V_n aux points de U . $R^T = R\mathcal{C}^*$ est l'espace fibré des différentielles (ou covecteurs) de V_n , $(\mathcal{C}^*)(p)$ l'espace fibré des p -formes différentielles.

Comme toute matrice réelle à déterminant non nul peut être considérée comme une matrice à coefficients complexes (et à déterminant $\neq 0$), on a une application canonique $GL(n, R) \longrightarrow GL(n, C)$. $g_{ij}(x) \in GL(n, R)$ pour $x \in U_i \cap U_j$ étant considéré comme élément de $GL(n, C)$ définit alors un espace fibré $R\mathcal{C}_C$ de fibre C^n , de groupe structural $GL(n, C)$ appelé le complexifié de $R\mathcal{C}$.

2.2.- Soit maintenant V_n une variété analytique complexe de dimension n . On définit comme précédemment un cocycle $g_{ij} \in \Gamma(U_i \cap U_j, (GL(n, C))_\omega)$, $g_{ij}(x)$ étant la matrice de coefficients $\frac{\partial z_\alpha}{\partial z'_\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, \dots, n$) $\{z_\alpha\}$ (resp. $\{z'_\beta\}$ étant un système de coordonnées dans U_i (resp. U_j)). Ce cocycle définit un élément $\theta \in H^1(V_n, (GL(n, C))_\omega)$. Le fibré associé à θ défini par un recouvrement maximal, de fibre C^n et groupe structural $GL(n, C)$ sera désigné par $\mathcal{C}$. Soit $\bar{\mathcal{C}}$ le fibré associé au cocycle $g_{ij}(x)$ (matrice complexe conjuguée de $g_{ij}(x)$); soient enfin T et $\bar{T}$ les fibrés duaux de $\mathcal{C}$ et $\bar{\mathcal{C}}$. Remarquons que $\mathcal{C}$ et $\bar{T}$ ne sont pas des fibrés analytiques complexes. V_n peut être considéré comme une variété différentiable réelle de dimension $2n$; $GL(n, C)$ se plonge naturellement dans $GL(2n, R)$.

θ peut alors être considéré comme un élément de $H^1(V_n, (GL(2n, R))_d)$ auquel on peut attacher les fibrés $R\mathcal{C}$, $R\mathcal{C}_C$ etc...

On a alors des isomorphismes canoniques :

- (1) $R\mathcal{C}_C \approx \mathcal{C} \oplus \bar{\mathcal{C}}$
- (2) $R\mathcal{C}^* \approx T \oplus \bar{T}$
- (3) $(R\mathcal{C}_C)^{(r)} \approx \sum_{p+q=r} T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$ ($\sum$ représente une somme de Whitney).

$T^{(p)}$ est l'espace fibré analytique complexe des "p formes différentielles holomorphes". Une forme de $T^{(p)} \otimes \bar{T}^{(q)}$ sera dite de type (p, q) ; dans un voisinage de coordonnées $z_1, \dots, z_n$, elle est somme d'expressions de la forme $a(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) dz_{\alpha_1} \wedge \dots \wedge dz_{\alpha_p} \wedge d\bar{z}_{\beta_1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{\beta_q}$ grâce à l'identification (3).

La vérification des propriétés (1), (2) et (3) est immédiate : il suffit encore une fois de regarder ce qui se passe dans chaque fibre.

2.3.- V_n étant comme précédemment une variété analytique complexe de dimension complexe n , ${}_R\mathcal{C}$ est associé à ${}_R\Theta$ où ${}_R\Theta$ est l'image de Θ par l'application $H^1(V_n, (GL(n, C))_d) \longrightarrow H^1(V_n, (GL(2n, R))_d)$; en d'autre terme, on peut restreindre le groupe structural $GL(2n, R)$ de ${}_R\mathcal{C}$ à $GL(n, C)$.

Inversement soit V_{2n} une variété différentiable C^∞ de dimension réelle $2n$, ${}_R\mathcal{C}$ l'espace fibré des vecteurs tangents à V_{2n} , et supposons que l'on puisse restreindre le groupe structural à $GL(n, C)$. On dira qu'une telle variété est munie d'une structure presque complexe.

Une variété V_{2n} presque complexe est toujours orientable dans le sens suivant : V_n est dite orientable si on peut restreindre le groupe structural de ${}_R\mathcal{C}$ à $GL^+(n, R)$, le groupe des matrices inversibles (n, n) à déterminant > 0 . Comme V_{2n} est presque complexe, on peut choisir le cocycle $g_{ij}(x)$ définissant ${}_R\mathcal{C}$ de manière à ce qu'il prenne ses valeurs dans l'image de $GL(n, C)$ par l'application $GL(n, C) \longrightarrow GL(2n, R)$. Mais l'image de $A + iB \in GL(n, C)$ (A et B réelles) est $\begin{pmatrix} A & B \\ -B & A \end{pmatrix}$ et cette matrice $\in GL^+(2n, R)$.

3.- Fibrés induits, Fibrés quotients, Fibrés diagonaux.

$GL(r, q-r; C)$ désigne le sous-groupe de $GL(q, C)$ des matrices de la forme $A = \begin{pmatrix} A' & B \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ où $A' \in GL(r, C)$, $A'' \in GL(q-r, C)$ et B une matrice rectangulaire à r lignes et $q-r$ colonnes. On définit de même $GL(r, q-r; R)$.

$\Delta(q, C)$ désigne le sous-groupe de $GL(q, C)$ des matrices triangulaires dont tous les coefficients sont nuls au-dessous de la diagonale principale. On a $\Delta(q, C) \cap U(q) = T^q =$ tore maximal de $U(q)$.

3.1.- Soit $A \in GL(r, q-r; C)$ $A \longrightarrow \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$ est un homomorphisme $h : GL(r, q-r; C) \longrightarrow GL(r, C) \times GL(q-r, C)$ dont le noyau est formé des matrices de la forme $\begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

(pour simplifier l'écriture nous dirons qu'un élément de $H^1(X, G)$ est un G -fibré).

L'homomorphisme h associe à tout $GL(r, q-r; C)$ - fibré ξ deux fibrés ξ' et ξ'' où ξ' est un $GL(r, C)$ - fibré et ξ'' un $GL(q-r, C)$ - fibré. ξ' est le fibré induit, ξ'' le fibré quotient de ξ .

Par abus de langage on dira que le $GL(q, C)$ - fibré ξ a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient s'il existe un $GL(r, q-r; C)$ - fibré dont l'image par $GL(r, q-r; C) \longrightarrow GL(q, C)$ est ξ et qui a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient. Soit ξ un $GL(q, C)$ - fibré différentiable (ou continu) :

PROPOSITION 3.1.- Si ξ a ξ' et ξ'' pour fibré induit et fibré quotient
 $\xi = \xi' \oplus \xi''$.

En effet $GL(r, C) \times GL(q-r, C)$ et $GL(r, q-r; C)$ ont tous deux comme groupe compact maximal $U(r) \times U(q-r)$ donc (théorème 5.5, exposé 17)
 $H^1(X, (GL(r, C) \times GL(q-r, C))_d) \approx H^1(X, (GL(r, q-r; C))_d)$; on peut donc prendre pour définir ξ un cocycle prenant ses valeurs dans le groupe $GL(r, C) \times GL(q-r, C)$, c'est-à-dire de la forme

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} g'_{ij} & 0 \\ 0 & g''_{ij} \end{pmatrix}$$

comme ici $hg_{ij} = g_{ij}$ la proposition s'en déduit par définition même de ξ' , ξ'' et de la somme de Whitney.

3.2.- Soit $A \in \Delta(q, C)$. L'application qui fait correspondre à A le k -ième élément de la diagonale principale de A est un homomorphisme φ_k :

$\Delta(q, C) \longrightarrow C^*$ ou $C^* = GL(1, C)$ est le groupe multiplicatif du corps des complexes C . L'application φ_k fait correspondre à tout $\Delta(q, C)$ -fibré ξ un C^* -fibré $\varphi_k \cdot \xi$. $\xi_1, \dots, \xi_q$ sont appelés les fibrés diagonaux de ξ .

Par abus de langage, on dira que le $GL(q, C)$ -fibré ξ a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux s'il existe un $\Delta(q, C)$ fibré dont l'image par $\Delta(q, C) \longrightarrow GL(q, C)$ est ξ et qui a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux.

Soit ξ un $GL(q, C)$ fibré différentiable (ou continu).

PROPOSITION 3.2.- Si ξ a $\xi_1, \dots, \xi_q$ pour fibrés diagonaux,

$$\xi = \xi_1 \oplus \dots \oplus \xi_q$$

En effet $C^* \times \dots \times C^*$ q fois et $\Delta(q, C)$ ont tous deux comme groupe compact maximal le tore T^q . Donc (théorème 5.5, exposé 17)

$$H^1(X, (C^* \times \dots \times C^*))_d \approx H^1(X, (\Delta(q, C))_d).$$

On peut donc prendre pour définir ξ un cocycle prenant ses valeurs dans le groupe $C^* \times \dots \times C^*$ c'est-à-dire de la forme

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & g_{ij}^1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & g_{ij}^q \end{pmatrix}$$

comme ici $\psi_k g_{ij} = g_{ij}^k$, la proposition est démontrée par définition même de ξ_k et de la somme de Whitney.

REMARQUE 1.— Les propositions 3.1 et 3.2 sont en général fausses dans le cas analytique complexe.

REMARQUE 2.— Le paragraphe 3.1 et la proposition 3.1 sont valables sans changement dans le cas réel à condition de remplacer partout C par R .

3.3.— Appliquons maintenant le théorème 5.2 de l'exposé précédent pour savoir quand un $GL(q, C)$ -fibré ξ (continu, différentiable analytique complexe) est l'image d'un $GL(r, q-r; C)$ -fibré ou d'un $\Delta(q, C)$ -fibré.

Soit W un espace fibré à fibre vectoriel associé à ξ (fibre C^q) et E l'espace fibré principal des isomorphismes de C^q dans W_x . Soit $[r]_W = E/GL(r, q-r; C)$ la fibre $[r]_{W_x}$ est homéomorphe à $GL(q, C)/GL(r, q-r; C) \approx U(q)/U(r) \times U(r-q) = \mathcal{G}(r, q-r; C)$: c'est une grassmannienne. Les trois fibrés $W, E, [r]_W$ sont tous associés à ξ . Supposons que $[r]_W$ ait une section s (continue, différentiable ou analytique complexe). Pour tout $x \in X$, $s(x) \in [r]_{W_x}$. Or $\mathcal{G}(r, q-r; C)$ peut être identifié à l'espace des r -plans de C^q . A tout x , la section s fait donc correspondre un sous-espace W'_x de W_x à r -dimensions. L'ensemble des W'_x est un fibré W'_x ; posons $W''_x = W_x/W'_x$, et soit W'' le fibré réunion de ξ à $GL(r, q-r; C)$, ξ admet donc un fibré induit ξ' et un fibré quotient ξ'' . W' est associé à ξ' , W'' à ξ'' . De même soit $\Delta_W = E/\Delta(q, C)$ de fibre $GL(q, C)/\Delta(q, C) = U(q)/T^q$; un point de cette variété peut s'identifier à une suite d'espaces vectoriels emboîtés $L_0 \subset L_1 \subset \dots \subset L_q = C^q$ avec $\dim L_r = r$, $L_0 = 0$.

Supposons que Δ_W ait une section $s(x)$ (continue, différentiable ou analytique complexe) : $s(x)$ est une suite $L_{0,x} \subset L_{1,x} \subset \dots \subset L_{q,x} = W_x$. L'ensemble des $L_{r,x}$ est un fibré sur X de fibre C^r , soit $W_{(r)}$.

Soit A_r le fibré, de fibre C^* ensemble des $L_{r+1,x}/L_{r,x}$. D'après le théorème 5.2, on peut restreindre le groupe structural de ξ à $\Delta(q, C)$, ξ admet donc des fibrés diagonaux $\xi_1, \dots, \xi_q$ et A_r est associé à ξ_r .

3.4.- Dans le cas réel on peut toujours appliquer la proposition 3.1. On peut donc résumer l'étude précédente dans la proposition suivante

PROPOSITION 3.4.- Soit ξ un $GL(q, R)$ -fibré (continue ou différentiable) sur X , W un espace fibré à fibre R^q associé à ξ , E l'espace fibré principal associé des isomorphismes de R^q dans W_x . L'espace fibré $[r]W = E/GL(r, q-r; R)$ a pour fibre au-dessus de x la variété de Grassmann des r -plans non orientés de W_x . Si $[r]W$ a une section $s(x)$, c'est-à-dire si W a un champ continu (resp. différentiable) de r -plans, l'ensemble des $s(x)$ est un espace fibré W' sur X de fibre R^r ; l'ensemble des $W_x/s(x)$ est un fibré W'' de fibre R^{q-r} . W' est associé à un $GL(r, R)$ -fibré ξ' , W'' est associé à un $GL(q-r, R)$ -fibré ξ'' et $\xi = \xi' \oplus \xi''$, $W = W' \oplus W''$.

Dans cette proposition on peut remplacer partout non orienté par orienté à condition de remplacer $GL(q, R)$ par $GL^+(q, R)$ etc... $\mathcal{G}(r, q-r; R)$ par $\mathcal{G}^+(r, q-r; R) = SO(q)/SO(r) \times SO(q-r)$.
