

SÉMINAIRE DUBREIL. ALGÈBRE ET THÉORIE DES NOMBRES

R. DESCOMBES

Sur un problème d'approximation diophantienne non homogène

Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres, tome 8 (1954-1955), exp. n° 1, p. 1-11

http://www.numdam.org/item?id=SD_1954-1955__8__A1_0

© Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Dubreil. Algèbre et théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>).
Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

-:-:-:-

Séminaire, P. DUBREIL
(ALGÈBRE et THÉORIE DES NOMBRES)

Année 1954/55

-:-:-:-

Exposé n° 1SUR UN PROBLÈME D'APPROXIMATION DIOPHANTINNE NON HOMOGÈNE.

(Exposé de R. DESCOMBES, le 8 novembre 1954)

1.- Introduction : Énoncé du problème.

Dans tout cet exposé, ξ désigne un nombre irrationnel et η un nombre réel arbitrairement choisis tels que l'équation $v\xi - u + \eta = 0$ n'ait aucune solution en u, v entiers ordinaires.

L'étude des petites valeurs de la forme $v\xi - u + \eta$ a été abordée par Minkowski qui a établi (Ann. Ec. Norm. Sup., 1893) que, pour tout choix de ξ et η (avec les restrictions ci-dessus, évidemment destinées à écarter les cas triviaux), on a

$$\lim_{u,v} |v(v\xi - u + \eta)| \leq \frac{1}{4} \quad (u, v \text{ entiers quelconques, } v \neq 0).$$

Grace a montré par exemple (Proc. London Math. Soc. 1918) que la valeur $\frac{1}{4}$ est atteinte pour certains couples ξ, η .

Or on a

$$\lim |v(v\xi - u + \eta)| = \inf [\lim_{u,v} v|v\xi - u + \eta|, \lim_{u,v} v|v\xi - u - \eta|]$$

où les limites inférieures sont prises, au premier membre, pour tous les couples d'entiers u, v avec $v \neq 0$ et au second membre pour tous les couples u, v avec $v > 0$. Cette remarque évidente introduit le problème dont nous allons nous occuper : celui de l'étude des petites valeurs de la forme $v\xi - u + \eta$ lorsque u prend toutes les valeurs entières et v toutes les valeurs entières positives. Ce problème n'est identique à celui de Minkowski que dans le cas où $\eta \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$.

2.- Indication des résultats.

Posons

$$(2.1) \quad K(\xi, \eta) = \lim_{u,v} v|v\xi - u + \eta| \quad (u, v \text{ entiers quelconques, } v > 0),$$

et

$$(2.2) \quad K = \max k(\xi, \eta)$$

où le maximum est pris pour tous les irrationnels ξ et tous les réels η avec $v\xi - u + \eta \neq 0$ pour tout couple d'entiers u, v .

La recherche de la constante K , jouant pour notre problème le rôle de la constante $\frac{1}{4}$ pour celui de Minkowski, a donné lieu aux encadrements suivants :

$$\frac{3}{32} \leq K \quad (\text{Prasad, Proc. London Math. Soc., 1951}) \quad K \leq \frac{1}{\sqrt{5}} = 0,447... \quad (\text{Khinchine, Math. Ann., 1935})$$

$$0,352... = \frac{37}{10\sqrt{110}} \leq K \leq \frac{2}{5} = 0,4 \quad (\text{Poitou et Descombes C.R. Acad. Sc., 1952})$$

Enfin Cassels, dans un article (Math. Ann., 1954) qui est la source principale de cet exposé, vient de montrer que

$$K = \frac{27}{28\sqrt{7}} = 0,3644$$

et que ce maximum est "isolé", c'est-à-dire que

$$K(\xi, \eta) < K \text{ entraîne } k(\xi, \eta) \leq \frac{4}{11} = 0,3636...$$

3.- Indication de la méthode.

La méthode utilisée par Cassels consiste essentiellement à choisir parmi l'ensemble de tous les couples d'entiers u, v ($v > 0$) deux suites récurrentes de couples u_n, v_n et u'_n, v'_n telles que

$$(3.1) \quad k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [v_n |v_n \xi - u_n + \eta|, v'_n |v'_n \xi - u'_n + \eta|].$$

En outre, pour parvenir à un calcul commode des quantités entre crochets on rattache u_n, v_n et u'_n, v'_n à la réduite p_n/q_n de rang n dans le développement de ξ en fraction continue. Rappelons donc brièvement les résultats de cette dernière théorie, afin de préciser les notations.

4.- Rappel de la théorie des fractions continues.

Pour alléger le langage, nous supposerons dans toute la suite $\xi > 0$, ce qui ne restreint pas la généralité.

Soit $\left\{ \frac{p_n}{q_n} \right\}$ ($n = -1, 0, 1, 2, \dots$) la suite des réduites de ξ , rangées

dans l'ordre des $|q_n \xi - p_n|$ décroissants, en commençant par la réduite préliminaire $\frac{p_{-1}}{q_{-1}} = \frac{1}{0}$, suivie de $\frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}$, où $a_0 = [\xi]$ (partie entière de ξ).

La propriété fondamentale des réduites s'exprime par :

$$(P) \quad |q\xi - p| < |q_n \xi - p_n| \text{ entraîne } |q| \geq q_{n+1} \quad \text{sauf si les entiers } p \text{ et } q \text{ sont tous deux nuls.}$$

d'où il résulte que

$$(4.1) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |q(q\xi - p)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} |q_n(q_n \xi - p_n)|$$

où la limite inférieure du premier membre est prise pour tous les couples d'entiers p, q ($q \neq 0$).

Posant $\varepsilon_n = q_n \xi - p_n$, on a $\varepsilon_n > 0$ pour n pair, $\varepsilon_n < 0$ pour n impair, et

$$(4.2) \quad \varepsilon_n q_{n-1} - \varepsilon_{n-1} q_n = p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1} = (-1)^n :$$

de plus

$$(4.3) \quad p_{n+1} = a_{n+1} p_n + p_{n-1} \quad q_{n+1} = a_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

où les entiers a_n , tous strictement positifs pour $n \geq 1$, sont, avec a_0 , les quotients incomplets de ξ , ce qu'on note

$$(4.4) \quad \xi = (a_0 a_1 a_2 \dots a_n \dots) .$$

En introduisant enfin les quantités

$$(4.5) \quad x_n = \frac{\varepsilon_{n-2}}{\varepsilon_{n-1}} = - \frac{q_{n-2} \xi - p_{n-2}}{q_{n-1} \xi - p_{n-1}} , \quad y_n = - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \quad (n \geq 1) ,$$

on a

$$(4.6) \quad x_n > 1 , \quad -1 < y_n < 0 \quad (\text{sauf } y_1 = 0 , \text{ et, peut-être, } y_2 = -1)$$

et

$$(4.7) \quad x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} , \quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n} , \quad a_n = [x_n]$$

d'où, avec la notation (4.4) :

$$(4.8) \quad x_n = (a_n a_{n+1} \dots) \quad (n \geq 1)$$

$$(4.9) \quad y_n = - (0 a_{n-1} a_{n-2} \dots a_1) \quad (n \geq 2)$$

et, d'après (4.2) :

$$(4.10) \quad \frac{(-1)^n}{q_n \varepsilon_n} = x_{n+1} - y_{n+1}$$

d'où

$$(4.11) \quad \lim_n |q(q\xi - p)| = \frac{1}{\lim_n (x_n - y_n)} .$$

5.- Construction d'un algorithme.

Ces résultats étant rappelés, la suite $\{u_n, v_n\}$ annoncée au paragraphe 3 sera caractérisée par le théorème suivant, après avoir posé par définition $p_n = q_n \xi - u_n + \eta$:

Théorème 1. Pour tout $n \geq 0$, il existe un couple d'entiers u_n, v_n et un seul tel que :

ou bien : $(A_n) \quad 0 \leq v_n < q_n$ avec $\begin{cases} -\varepsilon_{n-1} < p_n < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 < p_n < -\varepsilon_{n-1} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

ou bien : $(B_n) \quad q_n \leq v_n < q_n + q_{n-1}$ avec $\begin{cases} \varepsilon_n < p_n < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 < p_n < \varepsilon_n & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

Unicité de u_n, v_n . Démontrons-la dans le cas n impair, pour fixer les idées.

- S'il existait deux couples solutions de A_n , on en déduirait par différence un couple u, v satisfaisant aux conditions

$$0 \leq v < q_n \quad |v\xi - u| < \varepsilon_{n-1}$$

qui contredisent (P) sauf pour $u = v = 0$.

- S'il existait deux couples solutions de B_n , on en déduirait par différence un couple satisfaisant aux conditions

$$0 \leq v < q_{n-1} \quad |v\xi - u| < |\varepsilon_n|$$

qui contredisent (P) sauf pour $u = v = 0$.

- S'il existait un couple solution de A_n et un couple solution de B_n , on en déduirait de même un couple u, v satisfaisant aux conditions

$$0 \leq v < q_n + q_{n-1} \quad \varepsilon_n < v\xi - u < \varepsilon_{n-1}$$

qui, compte tenu de l'alternance du signe de ε_n , contredisent aussi (P) sauf pour $u = v = 0$.

Existence de u_n, v_n . On la prouve par récurrence.

Pour $n = 0$, les conditions imposées à v_0 par B_0 sont contradictoires. Au contraire A_0 admet la solution unique $v_0 = 0$, $u_0 = [\eta]$.

Supposons que u_n, v_n existe ;

- Si on a B_n , on vérifie que le couple

$$(5.1) \quad u_{n+1} = u_n - q_n, \quad v_{n+1} = v_n - q_n$$

est une solution de A_{n+1} , car $q_n \leq v_n < q_n + q_{n-1}$ implique $0 \leq v_{n+1} < q_{n-1} < q_{n+1}$.

- Si on a A_n , posons $b_{n+1} = [x_{n+1} - \frac{p_n}{\varepsilon_n}]$. Comme p_n a le signe de ε_n avec $|p_n| < |\varepsilon_{n-1}|$, on a $0 < \frac{p_n}{\varepsilon_n} < x_{n+1}$ d'où $0 \leq b_{n+1} \leq a_{n+1}$; on vérifie alors que le couple

$$(5.2) \quad u_{n+1} = u_n + b_{n+1} p_n + p_{n-1}, \quad v_{n+1} = v_n + b_{n+1} q_n + q_{n-1}$$

est une solution de A_{n+1} si $b_{n+1} \neq a_{n+1}$ et de B_{n+1} si $b_{n+1} = a_{n+1}$, ce

qui achève la démonstration du théorème 1.

Remarque. Le cas B_n n'intervient donc qu'encadré par A_{n-1} et A_{n+1} et il implique

$$u_n = u_{n-1} + a_n p_{n-1} + p_{n-2} = u_{n-1} + p_n, \quad v_n = v_{n-1} + q_n$$

d'où

$$(5.3) \quad u_{n+1} = u_n - p_n = u_{n-1}, \quad v_{n+1} = v_n - q_n = v_{n-1}$$

et, d'après (5.3) et la définition de A_{n+1}

$$(5.4) \quad 0 < -\frac{p_{n+1}}{\varepsilon_n} = -\frac{p_{n-1}}{\varepsilon_n} < 1$$

d'où l'on tire encore

$$0 < \frac{p_{n-1}}{\varepsilon_{n-1}} < 1 \quad \text{et} \quad 0 < \frac{p_{n+1} + \varepsilon_n}{\varepsilon_n} = \frac{p_n}{\varepsilon_n} < 1.$$

L'inégalité (5.4) montre qu'on ne peut pas avoir une alternance indéfinie de cas A et de cas B puisque $\varepsilon_k \rightarrow 0$ avec $1/k$; comme B_n implique $v_{n-1} = v_{n+1}$ et que A implique $v_{n+1} > v_n$, il en résulte que

$$(5.5) \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty.$$

Formules de récurrence. En posant

$$(5.6) \quad t_{n+1} = \frac{v_n}{q_n}, \quad z_{n+1} = \frac{p_n}{\varepsilon_n} \quad (\text{d'où } 0 < z_{n+1} < x_{n+1})$$

on peut traduire ces résultats par les formules de récurrence :

- Si A_{n-1} (c'est-à-dire $0 \leq t_n < 1$)

$$(5.7) \quad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n, \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n,$$

$$0 \leq b_n = [x_n - z_n] \leq a_n$$

- Si B_{n-1} (c'est-à-dire $1 \leq t_n < 1 - y_n$, ou encore $b_{n-1} = a_{n-1}$)

$$(5.8) \quad \frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = 1 - z_n, \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = 1 - t_n, \quad z_{n-1} < 1, \quad z_n < 1$$

avec : $z_1 = \frac{\eta - [\eta]}{\xi - [\xi]} \text{ et } t_1 = 0$

6.- Propriétés d'approximation de l'algorithme.

Comparons l'ensemble des couples d'entiers u, v ($v > 0$) à l'ensemble des couples u_n, v_n .

Etant donnés un couple d'entiers u, v et un indice $n \geq 0$ quelconques, on peut, en vertu de $|p_{n-1} q_n - p_n q_{n-1}| = 1$, définir les nombres $\alpha_n, \beta_n, \alpha, \beta$ par les égalités

$$(6.1) \quad \begin{aligned} u_n - \eta &= \alpha_n p_{n-1} + \beta_n p_n & u - \eta &= \alpha p_{n-1} + \beta p_n \\ v_n &= \alpha_n q_{n-1} + \beta_n q_n & v &= \alpha q_{n-1} + \beta q_n \end{aligned}$$

et, puisque u_n, v_n, u, v sont entiers, on obtient par ces formules tous les couples d'entiers u, v en donnant à α, β tous les couples de valeurs définis par

$$(6.2) \quad \alpha \equiv \alpha_n \quad \beta \equiv \beta_n \quad (\text{mod. } 1).$$

Posons

$$\alpha - \alpha_n = r \quad \beta - \beta_n = s \quad (r, s \text{ entiers})$$

et étudions pour n fixé les couples u, v satisfaisant à

$$(6.3) \quad q_n \leq v < q_{n+1}.$$

Si on est dans le cas A_n , c'est-à-dire si $0 \leq v_n < q_n$, (6.3) entraîne

$$0 < r q_{n-1} + s q_n < q_{n+1}$$

c'est-à-dire d'après (4.5)

$$(6.4) \quad 0 < s - r y_{n+1} < a_{n+1} - y_{n+1}$$

qui implique que r et s ne peuvent pas être tous deux négatifs ou nuls.

Si $v_n = v_0 = 0$ (ce qui n'arrive d'après (5.5) que pour un nombre fini de valeurs de n), on a évidemment $v|v\xi - u + \eta| > v_n |p_n|$. En écartant ce cas trivial, on a d'après (6.1), (4.5) et (5.6) :

$$\frac{v|v\xi - u + \eta|}{v_n |p_n|} = \left(1 + \frac{s - r y_{n+1}}{t_{n+1}}\right) \left| \frac{r x_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1 \right|.$$

Le premier terme du second membre est supérieur à 1 d'après (6.4) et $t_{n+1} < 1$; examinons le second terme.

- Si r est négatif ou nul et s positif, le second terme est supérieur à 1.

- Si $r \geq 2$, les inégalités $x_{n+1} > z_{n+1}$ et (6.4) entraînent (en omettant l'indice $n+1$ pour x, y, a et z) :

$$\left| \frac{r x - s}{z} - 1 \right| = \frac{r x - s}{z} - 1 > \frac{r(x-y) - (a-y)}{z} - 1 > (r-1) \frac{x-y}{z} - 1$$

qui est supérieur à 1 dès que $r \geq 3$.

En résumé, les inégalités

$$q_n \leq v < q_{n+1} \quad v | v \xi - u + \eta | \leq v_n | p_n |$$

ne peuvent être satisfaites simultanément que pour $r = 1$ ou 2 .

- Si $r = 1$, l'expression

$$\frac{v | v \xi - u + \eta |}{v_n | p_n |} = \left(1 + \frac{s - y_{n+1}}{z_{n+1}} \right) \left| \frac{x_{n+1} - s}{z_{n+1}} - 1 \right|$$

prend pour les entiers s définis par (6.4) c'est-à-dire par $0 < s < a_{n+1}$ une valeur au moins égale à la plus petite de celles qui correspondent à $s = 0$, $s = b_{n+1}$ et $s = b_{n+1} + 1$ (car $x_{n+1} - s - z_{n+1}$ change de signe quand on passe de $s = b_{n+1}$ à $s = b_{n+1} + 1$). Or :

- pour $r = 1$ et $s = b_{n+1}$ on a d'après (5.2)

$$u = u_n + b_{n+1} p_n + p_{n-1} = u_{n+1} \quad v = v_{n+1} ;$$

- pour $r = 1$ et $s = 0$, nous poserons

$$(6.5) \quad u = u_n + p_{n-1} = u'_n, \quad v = v_n + q_{n-1} = v'_n, \quad p'_n = v'_n \xi - u'_n + \eta ;$$

- pour $r = 1$ et $s = b_{n+1} + 1$, on a donc, d'après (6.5)

$$u = u'_{n+1} \quad v = v'_{n+1}$$

- Si $r = 2$, enfin, des calculs analogues permettent de montrer que les valeurs entières s définies par (6.4) correspondent à des valeurs de $v | v \xi - u + \eta |$ supérieures au plus petit des deux produits $v_n | p_n |$ et $v_{n+1} | p_{n+1} |$.

En résumé, les inégalités $0 \leq v_n < q_n$ (cas A_n) et $q_n \leq v < q_{n+1}$ (6.3) entraînent, en tenant compte de la définition (6.5) :

$$v | v \xi - u + \eta | \geq \inf [v_n | p_n |, v'_n | p'_n |, v_{n+1} | p_{n+1} |, v'_{n+1} | p'_{n+1} |] .$$

Si on est dans le cas B_n , c'est-à-dire si $q_n \leq v_n < q_n + q_{n-1}$, avec $v_{n+1} = v_{n-1} = v_n - q_n$, des comparaisons analogues à celles qui viennent d'être faites pour le cas A_n montrent que (6.3) entraîne

$$v | v \xi - u + \eta | \geq \inf [v_n | p_n |, v_{n-1} | p_{n-1} |] .$$

En rassemblant tous ces résultats, on peut donc énoncer le théorème suivant, analogue à la propriété (P) des réduites :

Théorème 2. A tout couple d'entiers u, v ($v > 0$), on peut associer un indice $n \geq 0$ tel que

$$v | v \xi - u + \eta | \geq \inf [v_n | p_n |, v'_n | p'_n |] .$$

Comme, d'après (5.5) et (6.5) on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v'_n = +\infty$,
il en résulte, comme il a été annoncé par (3.1), le

Théorème 3.

$$K(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [v_n | \rho_n | , v'_n | \rho'_n |] .$$

7.- Calcul de $v_n | \rho_n |$ et de $v'_n | \rho'_n |$.

On a, d'après les définitions (4.5), (5.6) et (6.5) et la formule (4.10) :

$$v_n | \rho_n | = t_{n+1} z_{n+1} q_n | \varepsilon_n | = \frac{t_{n+1} z_{n+1}}{x_{n+1} - y_{n+1}}$$

$$v'_n | \rho'_n | = (v_n + q_{n-1}) | \rho_n + \varepsilon_{n-1} | = \frac{(t_{n+1} - y_{n+1})(x_{n+1} - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}} .$$

D'après le théorème 3, ces formules permettent donc le calcul de $k(\xi, \eta)$ en utilisant les relations de récurrence (5.7) et (5.8).

8.- Exclusion de B_n pour $k(\xi, \eta)$ assez grand.

Supposons qu'au rang n on soit dans le cas B_n , c'est-à-dire que $1 \leq t_{n+1} < 1 - y_{n+1}$. On a alors d'après (5.8) $0 < z_{n+1} < 1$ et, d'après (5.1)

$$\begin{aligned} v_{n+1} | \rho_{n+1} | &= (v_n - q_n) | \rho_n - \varepsilon_n | = (t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})q_n | \varepsilon_n | \\ &= \frac{(t_{n+1} - 1)(1 - z_{n+1})}{x_{n+1} - y_{n+1}} \end{aligned}$$

En sous-entendant l'indice $n+1$ pour x, y, z et t , les deux fonctions de z , toutes deux positives

$$v_n | \rho_n | = \frac{t z}{x - y} \quad \text{et} \quad v_{n+1} | \rho_{n+1} | = \frac{(t - 1)(1 - z)}{x - y}$$

sont, pour $0 \leq z \leq 1$, l'une croissante, l'autre décroissante, la première s'annulant pour $z = 0$ et la seconde pour $z = 1$; la plus petite d'entre elles est donc au plus égale, quel que soit z dans cet intervalle, à la valeur commune unique qu'elles prennent pour $z = \frac{t-1}{2t-1}$ et qui vaut $\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)}$.

Cette dernière fonction de t est croissante pour $1 \leq t \leq 1-y$; donc :

$$\frac{t(t-1)}{(x-y)(2t-1)} \leq \frac{-y(1-y)}{(x-y)(1-2y)} < \frac{-y}{1-2y} < \frac{1}{3}$$

puisque $x > 1$ et $y > -1$.

Ainsi, d'après le théorème 3, la réalisation du cas B_n pour une infinité de valeurs de n implique $k(\xi, \eta) \leq \frac{1}{3}$; d'après les encadrements donnés au paragraphe 2, $k(\xi, \eta)$ est alors assez éloigné de K .

9.- Caractérisation de $k(\xi, \eta)$ par les suites $\{a_n\}, \{b_n\}$.

Les expressions (4.8) et (4.9) de x_n et y_n montrent que les valeurs d'accumulation de $x_n - y_n$ lorsque $n \rightarrow +\infty$ ne sont pas influencées par les p premiers quotients incomplets, quel que soit p arbitrairement fixé. De même, si, pour $n \geq p$, on a toujours A_n , comme les produits $x_{n+1} \dots x_{n+k}$ et $y_n y_{n-1} \dots y_{p+1}$ tendent respectivement vers $+\infty$ et 0 avec k et $1/n$, les formules déduites de (5.7)

$$z_n = x_n - b_n - \frac{x_{n+1} - b_{n+1}}{x_{n+1}} + \frac{x_{n+2} - b_{n+2}}{x_{n+1} x_{n+2}} - \dots + (-1)^k \frac{x_{n+k} - b_{n+k} - \frac{z_{n+k+1}}{x_{n+k+1}}}{x_{n+1} \dots x_{n+k}}$$

$$t_n = y_n (y_{n-1} - b_{n-1}) - y_n y_{n-1} (y_{n-2} - b_{n-2}) + \dots + (-1)^{n-p+1} y_n \dots$$

$$\dots y_{p+1} (y_p - b_p - t_p).$$

montrent que les valeurs d'accumulation de z_n et t_n ne sont pas influencées par les p premières valeurs de a_n et b_n .

Puisque $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$ implique qu'on a A_n pour tout n assez grand, il en résulte que dans cette hypothèse $k(\xi, \eta)$ est entièrement déterminé par la donnée, à partir d'un certain rang, de deux suites d'entiers positifs a_n et b_n avec $a_n > b_n \geq 0$ et

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n} \quad y_{n+1} = \frac{1}{y_n - a_n} \quad a_n = [x_n]$$

$$\frac{z_{n+1}}{x_{n+1}} = x_n - z_n - b_n \quad \frac{t_{n+1}}{y_{n+1}} = y_n - t_n - b_n \quad b_n = [x_n - z_n]$$

$$0 < z_n < x_n \quad -1 < y_n < 0 < t_n < 1$$

et d'une manière analogue à (4.11) :

$$k(\xi, \eta) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{t_n z_n}{x_n - y_n}, \frac{(t_n - y_n)(x_n - z_n)}{x_n - y_n} \right]$$

10.- Conséquences : Détermination de K .

En comparant, à l'aide des formules du paragraphe 7 et des formules de récurrence (5.7), les valeurs des produits $v_n |p_n|$, $v'_n |p'_n|$ relatifs à des

indices n différents entre eux de quelques unités, on est conduit à des calculs plus compliqués mais analogues à celui par lequel nous avons établi que $k(\xi, \eta) > \frac{1}{3}$ est, à partir d'un certain rang, incompatible avec B . C'est par cette voie que Cassels prouve que l'hypothèse $k(\xi, \eta) > \frac{4}{11}$ exige que les suites des a_n et des b_n soient exclusivement constituées, à l'exception d'un nombre fini de termes, par la répétition indéfinie de la période suivante, désignée par S :

$$S \quad \begin{cases} a_n = 4 & , & a_{n+1} = a_{n+2} = a_{n+3} = 1 \\ b_n = 2 & , & b_{n+1} = b_{n+2} = b_{n+3} = 0 \end{cases}$$

En fait, les nombres ξ et η correspondant aux développements de ce type sont ceux de la forme

$$\xi = \frac{A\sqrt{7} + B}{C\sqrt{7} + D} \quad \eta = \frac{-3\sqrt{7} - 7 + E\sqrt{7} + F}{14(C\sqrt{7} + D)}$$

où A, B, C, D sont des entiers arbitraires tels que $AD - BC = \pm 1$.

Parmi eux se trouvent les couples notables

$$\xi = \sqrt{7} \quad , \quad \eta = -\frac{3\sqrt{7}}{14} - \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{7 - \sqrt{7}}{14} \quad , \quad \eta = -\frac{1}{14} .$$

Pour tous ces couples on a $k(\xi, \eta) = \frac{27}{28\sqrt{7}} > \frac{4}{11}$; par suite :

Théorème 4.

$$K = \frac{27}{28\sqrt{7}} = 0,3644\dots$$

11.- Autres valeurs remarquables de $k(\xi, \eta)$.

La valeur de $k(\xi, \eta)$ immédiatement inférieure à K (ou la borne supérieure de ces valeurs), donc inférieure à $\frac{4}{11}$, n'est pas connue. Citons cependant la valeur $\frac{37}{10\sqrt{110}} = 0,3528\dots$ qui correspond aux couples ξ, η

dont le développement par l'algorithme précédent est exclusivement constitué, à partir d'un certain rang, par la répétition indéfinie de la période

$$T \quad \begin{cases} a = 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b = 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{cases}$$

et aussi la valeur $\frac{23 + 8\sqrt{7}}{126} = 0,3505\dots$ qui est une valeur d'accumulation pour l'ensemble des $k(\xi, \eta)$ et qui correspond aux couples ξ, η dont le développement est constitué à partir d'un certain rang par les groupements S et T de la façon suivante :

$$\dots T \underbrace{S \dots S}_{n_1 \text{ fois } S} T \underbrace{S \dots S}_{m_2 \text{ fois } S} T S \dots S T \underbrace{S \dots S}_{m_k \text{ fois } S} T S \dots$$

où les entiers m_k augmentent indéfiniment avec k .

On peut se demander si ces deux valeurs sont respectivement la valeur immédiatement inférieure à K et la plus petite valeur d'accumulation des $k(\xi, \eta)$. L'algorithme qui vient d'être décrit pourrait permettre d'en décider. Au prix de quelques modifications, il pourrait aussi être utilisé pour l'étude diophantienne de la forme $v\xi - u + \eta$, sans la restriction $v > 0$.

-:-:-:-:-