Séminaire Delange-Pisot-Poitou.
Théorie des nombres

Jean-Marc Deshouillers

La « nouvelle technique » de Hooley

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 2 (1978-1979), exp. n° 23, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_2_A2_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 23, 5 p.

26 mars 1979

LA "NOUVELLE TECHNIQUE" DE HOOLEY

par Jean-Marc DESHOUILLERS (*)
[Université de Bordeaux]

1. Introduction. Présentation des résultats.

Soit $\Delta(n) = \max_{u>0} \sum_{d|n, u<d\leq eu} 1$. La méthode récemment introduite par Hooley [1] consiste en une majoration en moyenne de la quantité $\Delta(n)$ et à son application à divers domaines de la Théorie des nombres : évaluation d'expressions arithmétiques liées aux diviseurs, mais aussi approximation modulo 1 , théorie additive (problème de Waring). Voici un échantillonage des résultats obtenus (conformément à l'usage, on notera $d(n)$ le nombre de diviseurs de n).

THÉORÈME 1. - *Lorsque le nombre réel* x *tend vers l'infini, on a :*

$$\sum_{n\leq x} \Delta(n) = O(x \log^{(4/\pi)-1} x) .$$

THÉORÈME 2. - *Soient* x *un nombre réel, et* k *un entier inférieur à* $x^{2(1-\delta)}$ (δ *réel positif fixé*) ; *on a*

$$\sum_{\ell\leq x, m\leq x, \ell m\equiv a(\mathrm{mod}\ k)} 1 = O_\varepsilon\left(\frac{d\{(a\ ,\ k)\}\ x^2\ \log^{(4/\pi)-1+\varepsilon} x}{k}\right)$$

lorsque x *tend vers l'infini.*

THÉORÈME 3. - *Soient* B *et* x *deux nombres réels positifs, et* a *un entier pair non carré inférieur à* $\log^B x$; *on a :*

$$\sum_{n\leq x} d(an^2 - 1) \sim \frac{12x \log x}{\pi^2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)\frac{1}{n}\right)\prod_{p|a}\left(1 + \frac{1}{p}\right)^{-1}$$

uniformément en a *lorsque* x *tend vers l'infini.*

THÉORÈME 4. - *Soient* θ *un nombre irrationnel, et* γ *un nombre réel ; pour tout nombre réel positif* ε , *il y a une infinité d'entiers* n *tels que*

$$\|n^2\ \theta - \gamma\| < n^{(-1/2)} \log^{(2/\pi)-(1/2)+\varepsilon} n .$$

THÉORÈME 5. - *Soit* $r_8(n)$ *le nombre de manières d'exprimer l'entier* n *comme somme de* 8 *cubes* >0 ; *pour tout nombre réel positif* ε , *on a, lorsque* n *tend vers l'infini,*

$$r_8(n) = O_\varepsilon(n^{5/3}(\log n)^{\sqrt{3}-1+\varepsilon}) .$$

(*) Texte reçu le 1er octobre 1979.

Jean-Marc DESHOUILLERS, Laboratoire associé au CNRS n° 226, UER Mathématiques et Informatique, Université de Bordeaux-I, 351 cours de la Libération, 33405 TALENCE CEDEX.

Dans le temps dont nous disposons, nous allons esquisser la démonstration des théorèmes 1 et 2, et indiquer brièvement une connection entre le théorème 2 et l'évaluation de sommes trigonométriques.

2. Esquisse de la démonstration du théorème 1.

Le lecteur pourra se convaincre de la difficulté du problème en essayant d'améliorer l'encadrement trivial

$$[x] \leqslant \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) \leqslant x \sum_{n\leqslant x} d(n) \leqslant x \log x + O(x) .$$

Dans son article, HOOLEY indique les deux résultats

$$\frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) \to \infty \quad \text{et} \quad \sum_{n\leqslant x} \Delta(n) = O\left(\frac{x \log x}{\sqrt{\log \log x}}\right)$$

obtenus essentiellement par ERDÖS et à la manière d'ERDÖS, par des arguments combinatoires élémentaires et non triviaux.

Le point-clef de la démonstration du théorème 1 est l'obtention de la majoration.

$$(1) \qquad \sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) \frac{\Delta(n)}{n} = O(\log^{4/\pi} x) .$$

Soit $\nu = p_1 \dots p_s$ un entier sans facteur carré ; le nombre de diviseurs de ν dans l'intervalle $]u , eu]$ est égal au nombre de solutions de la double inégalité

$$\log u < \beta_1 \log p_1 + \dots + \beta_s \log p_s \leqslant \log u + 1 ,$$

(où les β_i valent 0 ou 1), ou encore au nombre $P_\nu(w)$ de solutions de la double inégalité

$$w - 1 < \alpha_1 \log p_1 + \dots + \alpha_s \log p_s \leqslant w + 1$$

(où les α_i valent + 1 ou - 1 et $w = \log eu^2/\nu$). De la minoration $\pi^2 \sin^2 z/2 \geqslant 2z^2$ valable pour $|z| \leqslant 1$, on déduit la majoration

$$\Delta(\nu) \leqslant \sup_w \frac{\pi^2}{2} \sum_{\alpha_j=\pm 1} \frac{\sin^2 1/2(F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) - w)}{(F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) - w)^2} ,$$

où $F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s) = \alpha_1 \log p_1 + \dots + \alpha_s \log p_s$.

A l'aide de la relation $(4 \sin^2 \frac{1}{2} z)/z^2 = \int_{-1}^{1} (1 - |t|) \exp itz \, dt$, on obtient

$$\Delta(\nu) \leqslant \sup_w \frac{\pi^2}{8} \int_{-1}^{1} (1 - |t|) \exp itw \left(\sum_{\alpha_j=\pm 1} \exp it F(\alpha_1 , \dots , \alpha_s)\right) dt$$

$$\leqslant 3 \int_0^1 \prod_{j=1}^{s} 2|\cos(t \log p_j)| \, dt ;$$

ainsi $\Delta(\nu)$ est majoré par l'intégrale d'une fonction multiplicative, et on a donc

$$\sum_{n\leqslant x} \mu^2(n) \frac{\Delta(n)}{n} \leqslant 3 \int_0^1 \prod_{p\leqslant x} \left(1 + \frac{2|\cos(t \log p)|}{p}\right) dt$$

$$\leqslant 3 \int_0^1 \exp\left(2 \sum_{p\leqslant x} \frac{|\cos(t \log p)|}{p}\right) dt .$$

La dernière somme écrite, qui vaut $\int_{3/2}^{x} (|\cos(t \log u)| \, d\pi(u))/u$ est alors majorée sans grande difficulté à l'aide du théorème des nombres premiers (la forme $\pi(u) = \mathrm{li}\, u + O(u . \log^{-2} u)$ est suffisante) et la majoration (1) en résulte.

Grâce à la majoration triviale

$$\Delta(\ell m) \leq d(\ell)\Delta(m) , \tag{2}$$

on déduit de (1) la majoration

$$\sum_{n\leq x} \frac{\Delta(n)}{n} = O(\log^{4/\pi} x) . \tag{3}$$

Pour en déduire le théorème 1, HOOLEY écrit

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Delta(n) &\leq \sum_{n\leq x^{1/2}} d(n) + \sum_{x^{1/2}<n\leq x} \Delta(n) \\ &= O(x^{1/2} \log x) + O(\frac{1}{\log x} \sum_{n\leq x} \Delta(n)\log n) ,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\sum_{n\leq x} \Delta(n)\log n &= \sum_{n\leq x} \Delta(n) \sum_{m/n} \Lambda(m) \\ &= \sum_{\ell m\leq x} \Delta(\ell m)\Lambda(m) \\ &\leq \sum_{\ell\leq x} \Delta(\ell) \sum_{m\leq x/\ell} d(m)\Lambda(m) \\ &= O(x \sum_{\ell\leq x} \frac{\Delta(\ell)}{\ell}) ,\end{aligned}$$

ce qui conduit à la démonstration du théorème 1.

3. Esquisse de la démonstration du théorème 2. (On notera $\eta = 2^{5/\delta}$, $X = x^{\delta^2/5\eta \log\log x}$.)

Pour majorer la somme introduite dans l'énoncé du théorème 2, on commence par découper le champ de sommation de ℓ en intervalles de la forme $[L , eL]$; la contribution des L inférieurs à $x \log^{-\eta} x$ est évaluée par une technique classique due à VAN DER CORPUT [2] ; la contribution des L restants est

$$O(\log\log x \sum_{n\leq x^2, n\equiv a(\mathrm{mod}\ k)} \Delta(u)) ,$$

et nous nous attacherons désormais à la majoration de cette dernière somme en supposant (cas auquel on se ramène sans grand problème) que a et k sont premiers entre eux.

L'entier n étant donné, on posera $n = n_1 n_2$, où n_1 regroupe les facteurs premiers de n au plus égaux à X, et n_2 les autres. Une version pondérée de la méthode de VAN DER CORPUT déjà citée permet de majorer la contribution des entiers n pour lesquels n_1 est anormalement grand ($n_1 > x^{\delta}$), et on est conduit à majorer la somme

$$\Sigma = \sum_{n_1 n_2\leq x^2, n_1\leq x^{\delta}, n_1 n_2\equiv a(\mathrm{mod}\ k)} \Delta(n_1 n_2) ;$$

l'inégalité (2) du paragraphe précédent implique

$$\Sigma \leq \sum_{n_1\leq x^{\delta}, (n_1,k)=1} \Delta(n_1) \sum_{n_2\leq x^2/n_1, n_2\equiv a n_1^{-1}(\mathrm{mod}\ k)} d(n_2) .$$

Pour majorer la dernière somme écrite, HOOLEY commence par majorer (via le crible)

la quantité

$$\sum_{n_2 \leq x^2/n_1, n_2 \equiv a n_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} 1$$

et se ramène à celle-ci par un argument alternatif :

ou bien $\Omega(n_2)$ est petit (au plus $\frac{4}{\delta}$), et alors on utilise la majoration $d(n_2) = O(1)$,

ou bien $\Omega(n_2)$ est grand, mais alors n_2 admet un petit (au plus $n_2^{\delta/4}$) diviseur d tel que $d_2 = d$ et qui possède, à constante près, $(\frac{4}{\delta})$, autant de facteurs premiers que n_2 . En découpant la sommation en n_2 selon les valeurs de d_2 , on est de nouveau ramené à majorer une quantité

$$\sum_{d_2 \leq z, d_2 \equiv a d_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} 1 \ .$$

HOOLEY obtient ainsi

$$\sum_{n_2 \leq x^2/n_1, n_2 \equiv a n_1^{-1} (\mathrm{mod}\ k)} d(n_2) = O\left(\frac{x^2 (\log \log x)^{\varepsilon}}{n_1 \varphi(k) \log x}\right)$$

pour un certain $\varepsilon(\delta)$.

Cette majoration, jointe à la majoration (3) du paragraphe précédent, conduit au théorème 2.

4. Utilité du théorème 2.

Soit à évaluer la somme $S_0 = \sum_{n \leq N} e(\frac{a}{b} n^3)$, somme qui intervient aussi bien dans l'étude de la répartition modulo 1 de la suite αn^3 que lors de l'étude du nombre de représentations d'un entier en somme de cubes ; en suivant H. WEYL, on écrit

$$|S_0|^2 = \sum_{1 \leq n_1 \leq N} \sum_{1 \leq n_2 \leq N} e(\tfrac{a}{b}(n_1^3 - n_2^3)) \ .$$

Par le changement de variables $n = n_1$, $h = n_1 - n_2$, on a :

$$|S_0|^2 = N + \sum_{0 < |h| < N} \sum_{1 \leq n \leq N, 1 \leq n-h \leq N} e(\tfrac{a}{b} h(3n^2 - 3nh + h^2))$$

en élevant de nouveau au carré et en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient la majoration suivante (dans laquelle T_h désigne la dernière somme écrite) :

$$|S_0|^4 \ll N^2 + N \sum_{0 < |h| < N} |T_h|^2 \ .$$

Ainsi, la majoration de S_0 passe-t-elle par la majoration de

$$|T_h|^2 = \sum_{m_1} \sum_{m_2} e(3 \tfrac{a}{b} h(m_1^2 - m_1 h - m_2^2 + m_2 h)) \ ,$$

où m_1 et m_2 sont tels que $1 \leq m_i \leq N$ et $1 \leq m_i - h \leq N$; par le changement de variables $m = m_1$, $k = m_1 - m_2$, on est essentiellement ramené à la majoration

de

$$S_1 = \sum_{1 \leq h \leq N} \sum_{1 \leq k \leq N} \left| \sum_m e(6 \frac{a}{b} hkm) \right| ,$$

où le champ de sommation de la troisième variable est un sous-intervalle de l'intervalle $1 , N$. La troisième somme étant une progression géométrique, on est ramené à majorer

$$S_2 = \sum_{1 \leq h \leq N} \sum_{1 \leq k \leq N} \frac{1}{\| 6 \frac{ahk}{b} \|^*}$$

(où $\|u\|^* = \max(\|u\| , \frac{1}{N})$), somme qui se réécrit :

$$S_2 = \sum_{u \bmod b} \frac{1}{\| 6 \frac{au}{b} \|^*} \sum_{1 \leq h \leq N, 1 \leq k \leq N, hk \equiv u (\mathrm{mod}\ b)} 1$$

expression dans laquelle la dernière somme est justiciable du théorème 2.

RÉFÉRENCES

[1] HOOLEY (C.). - On a new technique and its applications to the theory of numbers, Proc. London math. Soc., Series 3, t. 38, 1979, p. 115-151.

[2] VAN DER CORPUT (J. G.). - Une inégalité relative au nombre des diviseurs, Koninkl. nederl. Akad. Wetensch., Proc., t. 42, 1939, p. 547-553.