Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres

Martine Pathiaux

Familles fermées de n-uples de nombres algébriques

Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres, tome 20, n° 1 (1978-1979), exp. n° 5, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SDPP_1978-1979__20_1_A3_0>

© Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres
(Secrétariat mathématique, Paris), 1978-1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Delange-Pisot-Poitou. Théorie des nombres » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
20e année, 1978/79, n° 5, 7 p.

6 novembre 1978

FAMILLES FERMÉES DE n-UPLES DE NOMBRES ALGÉBRIQUES

par Martine PATHIAUX (*)
[Univ. P. et M. Curie]

On se propose de généraliser l'ensemble S des nombres de Pisot. Charles PISOT l'a lui-même généralisé dans une première direction, en considérant le cas où le nombre algébrique n'est plus entier, et a introduit les ensembles S_q [4].

Définition. - Soit $q \in \underset{\sim}{N}^*$, S_q est l'ensemble des nombres algébriques θ de module > 1 aux quels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant les propriétés suivantes :

1° $Q(0) = q$,

2° $\frac{1}{\theta}$ est le seul zéro de $Q(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

3° $A(\frac{1}{\theta}) \neq 0$,

4° $|\frac{A(z)}{Q(z)}| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

5° $|A(0)| \geqslant |Q(0)|$.

Les ensembles S_q sont fermés. De plus, $S_1 = S$, et dans ce cas la condition 5° est inutile, car automatiquement réalisée.

Une autre manière de généraliser cet ensemble S est de considérer des n-uples $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n)$ constitués de nombres algébriques.

Définition. - Soit $n \in \underset{\sim}{N}^*$, Σ^n désigne l'ensemble des n-uples $(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)$ où θ_i , pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$, est un nombre algébrique de module strictement supérieur à 1 , dont tous les conjugués, autres que θ_j pour $j \neq i$, sont de module strictement inférieur à 1 .

Deux éléments de Σ^n sont égaux, s'ils sont égaux dans leur ensemble. On définit sur Σ^n une topologie naturelle de sorte que si $t_j = (\theta_1^{(j)} , \ldots , \theta_n^{(j)})$ est une suite d'éléments de Σ^n , alors $\lim_{j\to\infty} t_j = (\theta_1^* , \ldots , \theta_n^*)$ si, et seulement si, on peut ranger les éléments de t_j de sorte que

$$\lim_{j\to\infty} \theta_i^{(j)} = \theta_i^* \quad \text{pour} \quad i = 1 , 2 , \ldots , n .$$

Remarque. - CANTOR [2] a étudié la sous-famille de Σ^n constituée d'éléments où les θ_i sont entiers algébriques sans toutefois prouver que cette sous-famille est fermée. Le seul résultat positif est dû à KELLY [3], qui a démontré que la

(*) Texte reçu le 21 mai 1979
Martine PATHIAUX, 187 boulevard Bineau, 92200 NEUILLY

sous-famille de Σ^2 , constituée d'éléments (θ_1 , θ_2) , où, θ_1 et θ_2 sont complexes conjugués, entiers algébriques, est fermée.

De façon plus précise, on essaye de déterminer des familles de sous-ensembles de Σ^n qui soient fermées, et telles que leur réunion soit Σ^n . Ces familles vont être déterminées à l'aide de conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme, sans zéro sur $|z| = 1$, ait n zéros dans $|z| < 1$.

THÉORÈME 1. - Soit $Q(z)$ un polynôme à coefficients rationnels, n'ayant pas de zéro sur $|z| = 1$, vérifiant $Q(0) \neq 0$; une condition nécessaire et suffisante pour que $Q(z)$ ait n zéros dans $|z| < 1$ est qu'il existe 3 polynômes F_1 , F_2 , F_3 de $\mathbb{Q}[z]$ vérifiant

(i) $Q(z)\, F_3(z) = z^n F_1(z) + F_2(z)$,

(ii) $F_1(z)$ et $F_3(z)$ sans zéros dans $|z| \leq 1$,

(iii) $|F_2(z)| < |Q(z)\, F_3(z)|$ si $|z| = 1$.

Démonstration dans le cas où $n = 1$.

La condition suffisante est évidente d'après ROUCHÉ.

Démontrons la condition nécessaire : posons $Q(z) = (z - \frac{1}{\theta})D(z)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, $D(z) \in \mathbb{R}[z]$ et $|\theta| > 1$, $D(z)$ a tous ses zéros dans $|z| > 1$.

Supposons par exemple $\theta > 0$. $Q(z)$ s'écrit alors

$$Q(z) = \tfrac{1}{\theta}(z - 1)\, D(z) + z(1 - \tfrac{1}{\theta})\, D(z) .$$

Posons $F_3^* = 1$, $F_2^* = \frac{1}{\theta}(z - 1)\, D(z)$, $F_1^* = (1 - \frac{1}{\theta})\, D(z)$; alors F_3^* , F_2^* , F_1^* , ont toutes les propriétés requises sauf une, celle d'appartenir à $\mathbb{Q}[z]$. En effet, (i) et (ii) sont réalisées.

De plus,

$$|\tfrac{1}{\theta}(z - 1)| \leq \tfrac{1}{\theta}|\theta - z| = \tfrac{1}{\theta}|1 - \theta z| = |z - \tfrac{1}{\theta}| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Donc

$$|Q(z)| > |F_2^*(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Approchons alors les coefficients de D et θ par des rationnels à ε près.

$$D(z) = D_\varepsilon(z) + R_\varepsilon(z) \quad \text{avec} \quad D_\varepsilon(z) \in \mathbb{Q}[z] , \quad \|R_\varepsilon(z)\| < \varepsilon ,$$

$$\theta = a_\varepsilon + b_\varepsilon \quad \text{avec} \quad a_\varepsilon \in \mathbb{Q} , \quad |b_\varepsilon| < \varepsilon ,$$

alors

$$Q(z) = z(1 - \tfrac{1}{a_\varepsilon})\, D_\varepsilon(z) + F_{2,\varepsilon}(z) \quad \text{avec} \quad F_{2,\varepsilon}(z) \in \mathbb{Q}[z] .$$

Posons $F_{1,\varepsilon} = (1 - \frac{1}{a_\varepsilon})D_\varepsilon(z)$. Alors, lorsque $\varepsilon \to 0$, $F_{1,\varepsilon}$ tend vers F_1^* , et $F_{2,\varepsilon}$ vers F_2^* uniformément sur $|z| = 1$.

Le théorème de Rouché implique que, si ε est suffisamment petit, $F_{1,\varepsilon}$ n'a pas de zéro dans $|z| \leqslant 1$.

De plus,

$$|F_{2,\varepsilon}| < |Q(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1$$

si ε est petit puisque

$$|F_2^*| < |Q(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Donc si ε est petit, $F_{3,\varepsilon} = 1$, $F_{2,\varepsilon}$, $F_{1,\varepsilon}$ répondent à la question.

La démonstration dans le cas général consiste à montrer que la propriété est vraie dans $\underset{\sim}{R}$, et on approche ensuite une solution trouvée par des rationnels.

Notation. - Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans $|z| \leqslant 1$, holomorphe en $z = 0$, avec $f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots$ au voisinage de $z = 0$, où les u_i sont réels. On note

$$\delta_i(f) = \begin{vmatrix} u_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ u_1 & u_0 & 0 & & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_i & u_{i-1} & u_{i-2} & \ldots & u_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & u_0 & u_1 & \ldots\ldots & & u_i \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & 0 & u_0 & \ldots\ldots & & u_{i-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & & u_0 \end{vmatrix}$$

et

$$d_{n,r}(f) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ u_0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ u_1 & u_0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ u_{r-1} & u_{r-2} & \ldots & u_0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & u_0 & u_1 & \ldots & u_r & u_n \\ 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & u_0 & \ldots & u_{r-1} & u_{n-1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots\ldots & u_0 & u_{n-r} \end{vmatrix} \qquad d_{1,0}(f) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ u_0 & u_1 \end{vmatrix}$$

THÉORÈME 2. - Soit $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n)$ un élément de Σ^n , alors il existe deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ tels que

(i) $Q(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \ldots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de $Q(z)$ dans $|z| \leqslant 1$

(iii) $A(\frac{1}{\theta_i}) \neq 0$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$,

(iv) $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

(v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots$ avec $\delta_i(\frac{A}{Q}) \geqslant 0$ pour $i = 0 , 1 , \ldots , n - 1$.

Démonstration. - Soit $P(z)$ le polynôme de degré minimal, primitif, à coefficient dans $\underset{\sim}{Z}$, dont $\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n$ soient racines et $\tilde{P}(z)$ son polynôme réciproque. Alors $\tilde{P}(z)$ a exactement n racines dans $|z| < 1$ et aucune racine dans $|z| = 1$. Le théorème 1 implique qu'il existe 3 polynômes F_1 , F_2 , F_3 de $\underset{\sim}{Z}[z]$ tels que

$$\tilde{P}(z) F_3(z) = z^n F_1(z) + F_2(z) \quad \text{avec} \quad F_1 \quad \text{et} \quad F_3 \quad \text{sans zéro dans} \quad |z| \leqslant 1$$

et

$$|\tilde{P}(z) F_3(z) > |F_2(z)| \quad \text{si} \quad |z| = 1 .$$

Prenons $Q(z) = \tilde{P}(z) F_3(z)$ et $A(z) = F_2(z)$, alors les propriétés (i), (ii), (iii) et (iv) sont vérifiées. De plus,

$$\frac{A(z)}{Q(z)} = \frac{F_2(z)}{z^n F_1(z) + F_2(z)} = 1 + u_n z^n + \ldots$$

Donc

$$\delta_0(\tfrac{A}{Q}) = \delta_1(\tfrac{A}{Q}) = \ldots = \delta_{n-1}(\tfrac{A}{Q}) = 0$$

et (v) est vérifiée.

Définition. - Soit $q \in \underset{\sim}{N}^*$ et $n \in \underset{\sim}{N}^*$, S_q^n est l'ensemble des éléments $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n)$ de Σ^n aux quels on peut associer deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant :

(i) $Q(0) = q$,

(ii) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \ldots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de $Q(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $A(1/\theta_i) \neq 0$ pour $i = 1 , 2 , \ldots , n$,

(iv) $\left|\frac{A(z)}{Q(z)}\right| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

(v) $\frac{A(z)}{Q(z)} = u_0 + u_1 z + \ldots$ avec $\delta_i(\frac{A}{Q}) \geqslant 0$ pour $i = 0 , 1 , \ldots , n - 1$.

Remarque. - $S_1^1 = S$, $S_q^1 = S_q$.

THÉORÈME 3. - $\bigcup_{q \in \underset{\sim}{N}^*} S_q^n = \Sigma^n$.

Cette propriété résulte immédiatement du théorème 2.

LEMME. - Soit $f(z)$ une fraction rationnelle, sans pôle à l'origine, avec $f(z) = u_0 + u_1 z + \ldots$ au voisinage de 0 , u_i réels, vérifiant :

(i) $|f(z)| \leqslant 1$ si $|z| = 1$,

(ii) $\delta_i(f) \geqslant 0$ pour $i = 0 , \ldots , n - 1$.

Soit $r = \min(n-1$, inf i tel que $\delta_i = 0)$, si $d_{n,r} \neq 0$, alors $f(z)$ a au moins n pôles dans $|z| < 1$, et si $f(z)$ a exactement n pôles, alors $d_{n,r} \neq 0$.

THÉORÈME 4. - S_q^n est fermé.

Démonstration. - Soit $t_j = (\theta_1^{(i)}, \ldots, \theta_n^{(i)})$ une suite d'éléments de S_q^n tels que

$$\lim_{i\to\infty} \theta_j^{(i)} = \theta_j^* \quad \text{pour} \quad j = 1, \ldots, n \quad \text{avec} \quad |\theta_j|^* > 1 .$$

A chaque élément t_j on associe une fraction rationnelle A_j/Q_j qui sert à le définir. Les fractions rationnelles appartiennent alors à la famille $\mathfrak{F}(q, n, \delta)$, définie par Charles PISOT [4], qui est compacte. Donc une sous-suite (notée de façon identique) converge vers A^*/Q^* uniformément sur tout compact de $|z| < 1$, et dont les pôles sont pris parmi les $1/\theta_i^*$ et $A^*/Q^* \in \mathfrak{F}(q, n, \delta)$.

Il suffit simplement alors de démontrer que A^*/Q^* a effectivement n pôles dans $|z| < 1$.

Cela résulte du lemme précédent et du fait que $q^{s+1} u_{i,s} \in \underset{\sim}{Z}$. Donc il existe i_0 tel que, pour $i \geqslant i_0$, $0 \leqslant s \leqslant n-1$,

$$u_s^* = u_{i,s} \quad \text{si} \quad \frac{A_i}{Q_i} = u_{i,0} + u_{i,1} z + \ldots \quad \frac{A^*}{Q^*} = u_0^* + u_1^* z + \ldots$$

au voisinage de $z = 0$.

THÉORÈME 5. - Si $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n) \in S_q^n$ est point limite de S_q^n , alors $|\theta_i| \neq 1$.

Remarque. - On peut essayer de préciser les "plus petits" éléments de S_q^n , c'est-à-dire de déterminer, par exemple, $\inf_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in S_q^n} \prod |\theta_i|$, et pour quels n-uples ce minimum est atteint.

THÉORÈME 6. - $\inf_{(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_n)\in S_1^n} = \theta_0$, où θ_0 est le plus petit élément de l'ensemble S , c'est-à-dire la racine > 1 du polynôme $z^3 - z - 1$.

Cette propriété découle de résultats de SMYTH [5] et AMARA. De plus, ce minimum est atteint pour le n-uple $(\xi \sqrt[n]{\theta_0}, \xi^2 \sqrt[n]{\theta_0}, \ldots, \xi^n \sqrt[n]{\theta_0})$ où ξ est une racine primitive n-ième de l'unité.

On obtient une autre classification de l'ensemble Σ^n en sous-familles fermées, généralisant les sous-ensembles introduits par Marie-José BERTIN [1], en utilisant le résultat suivant :

THÉORÈME 7. - Soit $F(z)$ un polynôme de $\underset{\sim}{Q}[z]$, n'ayant pas de zéro dans $|z|=1$, vérifiant $Q(0) \neq 0$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $F(z)$ ait n zéros dans $|z| < 1$ est qu'il existe 3 polynômes F_1 , F_2 , F_3 de $\underset{\sim}{Q}[z]$ véri-

fiant les propriétés suivantes :

(i) $F_3(z)\,F(z) = z^n F_1(z) + F_2(z)$,

(ii) $F_1(z)$ et $F_3(z)$ n'ont pas de zéro dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|F_1(z)| > |F_2(z)|$ si $|z| = 1$.

Démonstration (avec $n = 1$). - La condition suffisante est évidente d'après ROUCHÉ.

Démontrons la condition nécessaire : $F(z)$ s'écrit alors

$$F(z) = (z - \frac{1}{\theta})D(z) \quad \text{avec} \quad \theta \in \underset{\sim}{R} , \quad D(z) \in \underset{\sim}{R}[z] , \quad |\theta| > 1 ,$$

$D(z)$ n'a pas de zéro dans $|z| \leqslant 1$.

Soit $F(z) = zD(z) - \frac{1}{\theta} D(z)$. Posons

$$F_1^* = D(z) , \quad F_2^* = -\frac{1}{\theta} D(z) , \quad F_3^* = 1 .$$

Alors, F_1^* , F_2^* , F_3^* ont toutes les propriétés requises sauf une, celle d'appartenir à $\underset{\sim}{Q}[z]$. De façon identique au théorème 1, on approche θ et les coefficients de D , par des rationnels pour obtenir le résultat cherché.

COROLLAIRE. - Soit $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n)$ un élément de Σ^n , alors il existe deux polynômes $A(z)$ et $Q(z)$ de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant :

(i) $A(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| < 1$ si $|z| = 1$,

(iv) $\frac{1}{\theta_1} , \frac{1}{\theta_2} , \ldots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros de l'équation $z^n Q(z) - A(z) = 0$ dans $|z| \leqslant 1$.

(Démonstration analogue à celle du théorème 2.)

Définition. - Soit $0 < h < 1$ et $q \in \underset{\sim}{N}^* - \{1\}$, $\Sigma^n_{q,h}$ est l'ensemble des éléments $(\theta_1 , \theta_2 , \ldots , \theta_n)$ de Σ^n aux quels on peut associer deux polynômes de $\underset{\sim}{Z}[z]$ vérifiant :

(i) $A(0) \neq 0$,

(ii) $\frac{A(z)}{Q(z)}$ holomorphe dans $|z| \leqslant 1$,

(iii) $|\frac{A(z)}{Q(z)}| < 1$ si $|z| = 1$,

(iv) $\frac{1}{\theta_1} , \ldots , \frac{1}{\theta_n}$ sont les seuls zéros du polynôme $z^n Q(z) - A(z)$ dans $|z| \leqslant 1$,

(v) $Q(0) = q$.

On peut alors facilement démontrer le théorème suivant.

THÉORÈME 8. - $\bigcup_{q \in \tilde{\mathbb{N}}^* - \{1\}, 0<h<1} \Sigma^n_{q,h} = \Sigma^n$.

THÉORÈME 9. - $\Sigma^n_{q,h}$ est fermé.

BIBLIOGRAPHIE

[1] BERTIN (M.-J.). - Familles fermées de nombres et d'entiers algébriques, Thèse Sc. math.

[2] CANTOR (D. G.). - On sets of algebraic integers whose remaining conjugates lie in the unit circle, Trans. Amer. math. Soc., t. 105, 1962, p. 391-406.

[3] KELLY (J. B.). - A closed set of algebraic integers, Amer. J. Math., t. 72, 1950, p. 565-572.

[4] PISOT (C.). - Familles compactes de fractions rationnelles et ensembles fermés de nombres algébriques, Ann. scient. Ec. Norm. Sup., 3e série, t. 81, 1964, p. 165-188.

[5] SMYTH (C. J.). - On the product of conjugates outside the unit circle of an algebraic integer, Bull. London math. Soc., t. 3, 1971, p. 169-175.